ATTI

DELLA

ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

ANNO CCCL

1953

SERIE OTTAVA

RENDICONTI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

VOLUME XIV.

(1° semestre 1953)

ROMA

ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

1953

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

Seduta del 10 gennaio 1953

Presiede il Presidente PROF. FRANCESCO GIORDANI

NOTE DI SOCI

Analisi matematica. — *Determinazione del valore di un classico prodotto infinito.* Nota (*) del Corrisp. FRANCESCO G. TRICOMI.

1. Il prodotto infinito

$$(1+xz)(1+x^2z)(1+x^3z)\cdots$$

che, cambiando z in $-z$ ed x in $1/a$, può anche mettersi sotto la forma

$$f(z)=\left(1-\frac{z}{a}\right)\left(1-\frac{z}{a^2}\right)\left(1-\frac{z}{a^3}\right)\cdots \tag{1}$$

fu considerato già da Euler (1), che ne trasse per primo importanti conseguenze aritmetiche, e poi anche da Cauchy, da Jacobi e da altri illustri matematici del secolo scorso. Non mi risulta però che finora esso sia stato mai «sommato», cioè che la funzione $f(z)$ sia mai stata ricondotta ad altre trascendenti note, a prescindere da alcuni casi particolari, per esempio $z=\pm 1$, in cui essa è stata ricondotta alle funzioni *theta* ellittiche già da Jacobi.

In questa Nota mi propongo di far vedere come la funzione $f(z)$ possa esprimersi in termini finiti mediante la trasformata di Laplace della nuova trascendente intera, sorta da un problema di Biologia,

$$G(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a^n-1}\frac{z^n}{n!}, \qquad (a>1), \tag{2}$$

(*) Presentata nella seduta del 10 gennaio 1953.

(1) Vedi L. EULER, *Opera omnia* (1), *23*, p. 142 sg., oppure P. BACHMANN, *Zahlentheorie II* (Leipzig, Teubner, 1894) 2ter Absch.

su cui richiamai l'attenzione un anno fa circa [2], ponendo in luce alcune sue insolite proprietà.

Riceve così, mi sembra, una prima conferma la mia previsione che tale funzione sarebbe probabilmente riuscita utile anche in questioni di tutt'altro genere di quella da cui era sorta.

2. Il calcolo della trasformata di Laplace

$$\gamma(s) = \int_0^\infty e^{-st} G(t)\, dt \equiv \mathfrak{L}_s [G(t)]$$

non presenta alcuna speciale difficoltà perché – essendo la G una funzione intera di genere 1, cioè, come anche si dice, una funzione *di tipo esponenziale* – – la sua trasformata si calcola [3] trasformando termine a termine la serie (2). Pertanto, essendo

$$\mathfrak{L}_s [t^n] = \frac{n!}{s^{n+1}},$$

si trova così che è

$$\gamma(s) = \frac{1}{s} g\left(\frac{1}{s}\right), \tag{3}$$

avendo posto

$$g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{a^n - 1}, \tag{3'}$$

dove la serie di potenze ha, come immediatamente si verifica, il raggio di convergenza a; ciò che è in connessione col fatto che l'ascissa di convergenza della trasformata $\gamma(s)$ è $1/a$.

3. Per iniziare lo studio della funzione $g(z)$ definita dalla (3') – cioè, in sostanza, della trasformata di Laplace della funzione G – cominciamo col cambiare z in az, analogamente a quanto si fece nello studio della funzione $G(z)$. Troviamo così che

$$g(az) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{a^n - 1} z^n = \sum_{n=1}^{\infty} z^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a^n - 1} z^n,$$

cioè che la funzione $g(z)$ soddisfa all'equazione funzionale

$$g(az) = g(z) + \frac{z}{1 - z} \tag{4}$$

che, cambiando z in z/a, può anche scriversi

$$g(z) = \frac{z}{a - z} + g\left(\frac{z}{a}\right). \tag{4'}$$

(2) F. G. Tricomi, *Una nuova trascendente intera connessa con una ben nota serie non continuabile*. Questi « Rend. » (8) 11 (1951II), 141–144; *A new entire function...*, « Commun. pure & appl. Math. New York Univ. », 5 (1952), 213–222; *Una nuova funzione introdotta dalla Batteriologia*. « Rend. Semin. Mat. Torino », 11 (1951–52), 35–46.

(3) G. Doetsch, *Handbuch der Laplace-Transformation* (Basel, Birkhäuser, 1950) 10. Kap. § 1, p. 355 sg.

Con l'applicazione N volte ripetuta dalla (4') si trova, più generalmente, che

$$g(z) = \sum_{n=1}^{N} \frac{z}{a^n - z} + g\left(\frac{z}{a^N}\right),$$

ma, essendo $a > 1$, $g(0) = 0$, è evidentemente

$$\lim_{N \to \infty} g\left(\frac{z}{a^N}\right) = 0;$$

dunque, qualunque sia z, purché diversa da una potenza di a, si ha

$$g(z) = z \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a^n - z}. \tag{5}$$

La (5), di cui è superfluo sottolineare l'interesse, mostra che *la funzione $g(z)$ è una funzione meromorfa avente come poli (semplici) tutti e soli i punti $a, a^2, a^3, \cdots$, il cui sviluppo di Mittag-Leffler non richiede alcun fattore di convergenza.*

4. Cerchiamo di rappresentare la funzione meromorfa $g(z)$, o, più esattamente la funzione $-g(z)/z$, come quoziente di due funzioni intere per la classica via, cioè ponendo

$$-\frac{g(z)}{z} = \frac{d}{dz} \log f(z) = \frac{f'(z)}{f(z)} \tag{6}$$

con

$$\log f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^z \frac{dz}{z - a^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \log \frac{z - a^n}{-a^n},$$

il che implica

$$f(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a^n}\right). \tag{7}$$

Siamo così condotti alla già accennata funzione $f(z)$ di Euler, che è manifestamente una funzione intera avente come *zeri* i punti $a, a^2, a^3, \cdots$, i quali sono tali che la serie (geometrica)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(a^n)^r} = \left(\frac{1}{a^r}\right)^n$$

converge per qualsiasi $r > 0$. Si tratta dunque di una funzione avente l'*esponente di convergenza* $\rho_1 = 0$. Inoltre basta guardare la (6) per accorgersi che *anche il rango p è uguale a zero, e così pure l'ordine* ρ, perché in una funzione *canonica* di rango finito, è sempre $\rho = \rho_1$ [4].

Inoltre, col solito cambiamento di z in az, si vede subito che la funzione f soddisfa all'importante equazione funzionale

$$f(az) = (1 - z) f(z) \tag{8}$$

(4) Vedi per esempio G. SANSONE, *Lezioni sulla teoria delle funzioni di una variabile complessa* (Padova, CEDAM, 1947), I, p. 252 e 265.

che, fra l'altro, consente una facile determinazione dei coefficienti c_n del suo sviluppo in serie di potenze di z, con un metodo usato già da Euler. Precisamente dalla (8) si deduce subito la relazione ricorrente.

$$a^n c_n = c_n - c_{n-1}, \qquad (n = 1, 2, \cdots)$$

che, essendo altresì $c_0 = 1$, fornisce immediatamente il valore di c_n e quindi lo sviluppo

$$f(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-z)^n}{(a-1)(a^2-1)\cdots(a^n-1)}. \tag{9}$$

Poiché gli zeri di $f(z)$ ed i coefficienti c_n sono tutti reali, per un noto teorema di Laguerre [5] può asserirsi che anche *gli zeri delle successive derivate* $f'(z), f''(z), \cdots$ *sono tutti reali (e positivi) e che fra due successivi zeri di* $f(z)$ *cade uno ed un solo zero di* $f'(z)$, *fra due successivi zeri di* $f'(z)$ *uno ed un solo zero di* $f''(z)$, *ecc.*

Fra l'altro, questo teorema permette di farsi subito un'idea abbastanza precisa dell'andamento di $f(x)$ per $z = x$ *reale*. Precisamente si vede che, al crescere di x da $-\infty$ ad a, $f(x)$ decresce monotonamente da $+\infty$ a 0, passando per il valore 1 quando $x = 0$. Poi $f(x)$ prende alternativamente valori *negativi* e *positivi* nei successivi intervalli $(a, a^2), (a^2, a^3), \cdots$, entro cui cade sempre uno ed un solo massimo o minimo della funzione.

Ad ogni modo, considerata la (8), ci si potrebbe anche limitare a studiare la funzione nell'intervallo $(0, a)$ soltanto.

5. È cosa nota e che, come si diceva in principio, risale già a Jacobi, che il prodotto euleriano (1) può, in taluni casi esprimersi mediante funzioni *theta* ellittiche. Tuttavia crediamo utile mostrare, a conclusione di questa Nota, come possano così esplicitamente calcolarsi i valori di $f(x)$ per $x = \pm 1$ ed $x = \pm\sqrt{a}$, nonché i valori di $f'(x)$ negli zeri a^n di $f(x)$.

All'uopo ci si serve delle note formule [6]

$$\begin{cases} \vartheta_1(v) = 2 q_0 q^{1/4} \sin \pi v \prod_{n=1}^{\infty} (1 - 2 q^{2n} \cos 2\pi v + q^{4n}) \\ \vartheta_2(v) = 2 q_0 q^{1/4} \cos \pi v \prod_{n=1}^{\infty} (1 + 2 q^{2n} \cos 2\pi v + q^{4n}) \\ \vartheta_3(v) = q_0 \prod_{n=1}^{\infty} (1 + 2 q^{2n-1} \cos 2\pi v + q^{4n-2}) \\ \vartheta_4(v) = q_0 \prod_{n=1}^{\infty} (1 - 2 q^{2n-1} \cos 2\pi v + q^{4n-2}) \end{cases}$$

in cui è

$$q_0 = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^{2n}) = \left(\frac{\vartheta_1'(0)}{2\pi}\right)^{1/3} q^{-1/12}.$$

(5) SANSONE, loc. cit., p. 276.

(6) Vedi per esempio TRICOMI, *Funzioni ellittiche* (2ª ed. Bologna, Zanichelli, 1951), p. 172.

Precisamente, ponendo

$$q = \frac{1}{\sqrt{a}} < 1, \tag{10}$$

l'ultima formula fornisce senz'altro

$$f(1) = \left(\frac{\vartheta_1'(0)}{2\pi}\right)^{1/3} a^{1/24} \tag{11}$$

mentre, ponendo $v = 0$ negli sviluppi di ϑ_2, ϑ_3 e ϑ_4, si hanno le formule

$$f(-1) = \sqrt{\frac{\vartheta_2(0)}{2f(1)}}\, a^{1/6} \quad , \quad f(-\sqrt{a}) = \sqrt{\frac{\vartheta_3(0)}{f(1)}} \quad , \quad f(\sqrt{a}) = \sqrt{\frac{\vartheta_4(0)}{f(1)}} \tag{12}$$

che, tenendo conto delle due ben note relazioni algebriche fra le funzioni *thetanulle*, forniscono le non triviali uguaglianze

$$\begin{cases} f(-1) f(\sqrt{a}) f(-\sqrt{a}) = 1 \\ [f(-\sqrt{a})]^8 - [f(\sqrt{a})]^8 = \dfrac{16}{\sqrt{a}} [f(-1)]^8. \end{cases} \tag{13}$$

Perciò, se si identificano $f(-1)$, $f(\sqrt{a})$ e $f(-\sqrt{a})$ con le coordinate di un punto dello spazio, nonostante che queste siano tre funzioni trascendenti di a, la curva descritta dal punto al variare del parametro a è algebrica!

Più generalmente, servendosi dell'identità

$$1 + 2t\cos 2\pi v + t^2 = (1 + e^{2\pi v i} t)(1 + e^{-2\pi v i} t),$$

si vede che le funzioni *theta* di argomento v generico, permettono di calcolare in termini finiti i moduli di

$$f(e^{2\pi v i}) \quad \text{e} \quad f(\sqrt{a}\, e^{2\pi v i}).$$

Finalmente, quanto ai valori di $f'(x)$ negli zeri a^n, non c'è che da derivare la (8) rispetto a z, con che si ha

$$a f'(az) = (1 - z) f'(z) - f(z), \tag{14}$$

e porre poi $z = 1$, $z = a$, $z = a^2, \cdots$, con che si ha successivamente

$$f'(a) = -\frac{1}{a} f(1) \quad , \quad f'(a^2) = \frac{a-1}{a^2} f(1) \quad , \quad f'(a^3) = -\frac{(a-1)(a^2-1)}{a^3} f(1), \cdots$$

e, in generale,

$$f'(a^n) = (-1)^n \frac{(a-1)(a^2-1), \cdots, (a^n-1)}{a^n} f(1), \quad (n = 1, 2, \cdots). \tag{15}$$

6. Per ultimo osserviamo che, per la (3), la (6) e per ben note proprietà della trasformazione di Laplace, la relazione esistente fra la funzione intera $f(z)$ e la nuova trascendente intera definita dalla serie (2), può esplicitarsi nel modo seguente:

$$f(z) = \exp\{-\mathfrak{L}_{1/z}[G(t)/t]\}. \tag{16}$$

Infatti si ha che

$$\mathfrak{L}_{1/z}[G(t)/t] = \int_0^z \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{a^n - 1}\right) dx = \int_0^z \frac{g(x)}{x}\, dx = -\log f(z).$$

Geologia. — *Analogie geologiche tra la Sardegna e l'Africa Minore.* Nota I (*) del Corrisp. Silvio Vardabasso.

In occasione del XIX Congresso Geologico Internazionale di Algeri (settembre 1952) – al quale ho preso parte come membro della delegazione italiana – ho percorso l'Atlante nel settore algerino dal Mediterraneo al Sahara.

Avendo una certa famigliarità con la geologia della Sardegna, in queste escursioni ho cercato qualche analogia, che credo di aver riconosciuto nella prospiciente zona costiera africana, sulla quale in particolare mi intratterrò qui brevemente.

Le montagne che per oltre 2000 Km. si estendono dal canale di Sicilia all'Oceano Atlantico in modo da formare con le loro depressioni intermedie un'orlatura di 300–350 km sul continente africano, vengono ritenute per lo più come un elemento a parte (Africa Minore) cioè come catene liminari aggiunte solo nel Terziario alla struttura dell'immenso, antico continente.

Questa rilevante zona montuosa, tutto sommato circa il doppio di quella delle Alpi e degli Appennini presi insieme, può essere considerata in certo qual modo come la continuazione dei nostri sistemi montuosi in terra d'Africa.

In relazione però con la sua posizione marginale rispetto al blocco continentale, il sistema atlantico rivela caratteristiche orografiche e geologiche particolari, che lo differenziano alquanto dalle Alpi e dagli Appennini. Ne consegue che la distinzione dell'Atlante in singoli tratti o zone incontra qualche difficoltà, tanto che ancora non si è raggiunta una concordanza di vedute. Comunque, per quanto riguarda il settore algerino, intermedio fra quello tunisino ad est e quello marocchino ad ovest, i geologi francesi fanno di solito la seguente distinzione in zone a partire da nord a sud:

1° Catene Litorali Cabiliche, 2° Atlante Telliano, 3° Altopiani, 4° Atlante Sahariano.

Solo più oltre con l'immensa distesa del deserto comincia il blocco continentale vero e proprio, velato da una copertura sedimentare relativamente sottile quasi indisturbata.

Allo stesso modo come nelle Alpi anche nell'Atlante si delinea in grande una culminazione assiale ad ovest, dove appunto il rilievo montuoso attinge le massime altezze, superiori ai 4000 m. (Alto Atlante). Così la infrastruttura paleozoica e precambrica dell'Atlante, mentre affiora largamente nel Marocco, va scomparendo verso est, tanto che nel settore tunisino la formazione più antica è rappresentata solo da qualche scarso affioramento di Permico non metamorfico. Nelle catene litorali dell'Algeria invece il complesso cristallino antico, sicuramente prepermico, ha ancora una parte notevole.

(*) Presentata nella seduta dell'8 novembre 1952.

Si tratta di piccoli massicci allineati, per lo più interrotti dal mare, a partire da Bona oltre Philippeville, Algeri, ecc.; massicci meglio sviluppati nelle Cabilie, Grande e Piccola, donde il nome di Catene Cabiliche.

All'infuori di questa zona costiera, nell'Algeria non si incontrano formazioni cristalline. Infatti a differenza delle Alpi, ma analogamente agli Appennini (escluse le Apuane), un metamorfismo orogenetico regionale pare non abbia interessato la serie meso-cenozoica; a meno che non si debba considerare come un indizio gli schisti ardesiaci passanti al flysch cretaceo nell'Atlante Telliano a sud di Blida, erroneamente ritenuti un tempo paleozoici.

Il complesso cristallino delle Cabilie consiste essenzialmente, dal basso in alto, di gneiss per lo più occhiadini, dai quali si passa talvolta attraverso sottili alternanze a micaschisti vari; su questi seguono schisti filladici, schisti grafitoidi, arenarie quarzitiche e schisti poco metamorfici, eccezionalmente fossiliferi.

Nella catena del Giurgiura [4], che limita a sud il massiccio della Grande Cabilia, da questo complesso schistoso si passa ad una *facies* non metamorfica di flysch carbonifero (Culm sempre più clastico verso l'alto).

Nel metamorfismo delle Cabilie non è riconoscibile un iato; il fenomeno evidentemente ha interessato tutta la serie con intensità variamente decrescente. Da rilevare però che tra i gneiss ed i micaschisti da una parte ed il complesso filladico dall'altra i limiti coincidono spesso con disturbi secondari (schiacciamenti, milonitizzazioni).

Localmente notevoli sono le intercalazioni di calcari cristallini tanto grigi, tipo bardiglio, quanto bianchi (marmi saccaroidi), impropriamente detti « cipollini ». Questi calcari metamorfici privi o poveri di minerali sono indubbiamente riferibili a più orizzonti stratigrafici, nei quali si presentano ora in lenti o strati sottili ora in grossi banchi e addirittura in masse cospicue.

La loro presenza sta ad indicare, allo stesso modo come le *facies* arenacee, che anche la serie schistosa è con ogni verosimiglianza essenzialmente di natura sedimentare.

Entro questi schisti delle Cabilie sono praticamente assenti le pietre verdi vere e proprie; solo qua e là si riconoscono tracce di *facies* anfibolitiche per lo più localizzate in prossimità dei marmi, nel qual caso vanno riferite ad originarie *facies* sedimentari. Talvolta però, specialmente nei gneiss, si incontra anche qualche anfibolite discordante, riferibile presumibilmente ad originari filoni basici.

Notevole invece, sia per la potenza dei filoni che per lo sviluppo gigantesco dei loro costituenti, le belle pegmatiti a tormalina con i soliti passaggi alle *facies* aplitiche, in giacitura per lo più discordante entro gneiss e micaschisti.

Rare e di piccole entità le intrusioni granitiche, tra le quali degne di particolare menzione sono: la granodiorite di Menerville con la sua marcata aureola di contatto ed il granito di Alì-bu-Nab (casa forestale a SO del Camp du Marechal) a tessitura però ancora debolmente parallela, tuttavia

con qualche chiazza di concentrazione basica, ma senza evidente aureola di contatto; almeno per quanto la vegetazione e la copertura detritica acconsentano di rilevarlo.

Comunque, si ha l'impressione che questi graniti, superficialmente molto arenizzati, siano intimamente legati al complesso schistoso antico e non abbiano rapporti genetici con le eruzioni terziarie, contrariamente a quanto si constata invece per i graniti della zona litoranea della Cabilia di Collo.

Per quanto gli autori che si sono occupati del rilevamento della zona si esprimano con prudente riserbo, ritengo di gran lunga più attendibile il riferimento del metamorfismo degli schisti e della venuta dei graniti in generale – fatte cioè le eccezioni sopra accennate – al ciclo ercinico.

In tal modo il cristallino antico dell'Algeria si inserisce naturalmente e stabilisce un raccordo tra l'ercinico del Marocco e quello della Libia [3], dove la serie paleozoica dal Cambrico al Carbonifero inferiore è stata interessata da questa orogenesi.

Ciò premesso, parmi possibile un confronto tra il cristallino dei massicci algerini e quello della Sardegna, nonostante alcune differenze caratteristiche, che andremo rilevando. Partiamo da un punto di riferimento sicuro: il Siluriico inferiore fossilifero [1] del Gebel Aissa Mimun, piccolo avamposto attualmente isolato dal massiccio della Grande Cabilia.

Qui ci troviamo davanti a *facies* poco diverse da quelle dell'Ordoviciano del Fluminese (Portixeddu), mentre le filladi delle Cabilie in generale ricordano molto da vicino quelle dell'Ogliastra (Sardegna orientale), dove il Siluriico metamorfico è la continuazione diretta di quello fossilifero del Gerrei e del Sarrabus più a sud.

E l'analogia litologica diventa ancora più stretta per la presenza delle intercalazioni calcaree, che potrebbero essere equivalenti dei banchi a cistoidi dell'Ordoviciano sardo rispettivamente a quelli ad *Orthoceras* del nostro Gotlandiano. Particolarmente significativi poi mi sembrano i passaggi dai micaschisti o dalle filladi agli schisti grafitoidi tanto nella Grande Cabilia che nella Sardegna centro-orientale, dove l'appartenenza di questi ultimi alla *facies* graptolitica classica di Goni è fuori di dubbio; *facies* notoriamente molto diffusa nel Siluriico superiore di tutto il Mediterraneo occidentale, e perciò prezioso termine di riferimento.

Bene inteso, dato il grado avanzato di metamorfismo degli schisti neri della Grande Cabilia, sarà piuttosto difficile portare una prova paleontologica diretta della loro appartenenza al Gotlandiano.

Il termine più profondo e più cristallino del complesso schistoso è rappresentato qui – come si è notato – da una poderosa massa (circa 2500 m.) di gneiss per lo più occhiadini, intimamente legati ai micaschisti.

Su questi gneiss, formanti di regola altrettanti nuclei di anticlinale, poggia una serie di calcari marmorei, che a nord del Fort National può

(1) Scoperto dall'ing. A. Barbier, illustrato dai coniugi Termier.

raggiungere lo spessore anche di alcune centinaia di metri. Solo sopra si sviluppa il più vasto complesso filladico riferibile con tutta probabilità al Silurico e forse anche al Devonico ed al Carbonifero inferiore.

Indubbiamente più difficile è l'interpretazione stratigrafica del complesso gneiss-micaschisti con le sue pegmatiti, apliti e « granuliti » [2], le quarziti ed i marmi.

In considerazione però del fatto che questa serie molto cristallina appartiene allo stesso ciclo di metamorfismo delle filladi (intese come espressione generica, comprensiva di tutta la serie superiore meno cristallina alla quale fa passaggio – « Schistes satinées » della carta di Thiébaut –), visto inoltre che una discordanza fra le due serie non può dirsi accertata nel settore algerino, contrariamente a quanto è bene manifesto invece nel Marocco, dove la discordanza precambrica è chiara, io non sarei alieno dall'attribuire il complesso gneissico piuttosto al Cambrico che non al Precambrico.

Questo modo di vedere contrasta però con l'interpretazione di Krenkel [9] – ben noto esperto della geologia dell'Africa – il quale estende a tutta l'infrastruttura dell'Africa Minore, e quindi anche ai massicci cabilico e numidico, le sue « Afrícidi » e « Varíscidi ».

A priori ciò è ben possibile; nel caso nostro però non mi sembra per ora accertato. Del resto in uno scambio di idee avuto sul posto con Thiébaut, il miglior conoscitore della Grande Cabilia, a proposito dei potenti affioramenti di marmi a nord del Fort National, ho avuto l'impressione che anche questo autore ritenesse verosimile la loro appartenenza, da me affacciata, ai calcari ad archeociatine del Cambrico, con analogia a quello sardo.

Come ben si comprende, il tentativo di ricostruire – sia pure a grandi linee – l'originaria successione stratigrafica dell'infrastruttura cristallina dell'Atlante in questi massicci litoranei rappresenta un arduo problema. E ciò tanto più perché alle incertezze sopra accennate si aggiungono localmente le complicazioni dovute alle dislocazioni del ciclo alpino (laminazioni anche con tendenza a piccole scaglie tettoniche). Queste dislocazioni recenti però – e qui sono tutti concordi – non sono state accompagnate o seguite da una ricristallizzazione regionale.

Una differenza caratteristica fra i massicci sardo e cabilico è data dalla scarsità nel secondo di quei graniti che invece hanno avuto tanta parte nel ciclo ercinico del primo.

Di questa differenza può essere tentata una spiegazione prendendo in esame il non meno importante problema del decorso del metamorfismo nella infrastruttura mediterranea dei due settori.

La cristallizzazione del Paleozoico (e del Precambrico) nei massicci cabilico e numidico è stata la conseguenza di un succedersi di metasomatismi di profondità entro una serie litologicamente varia, ma soprattutto are-

(2) Mentre in generale la schistosità del complesso cristallino corrisponde ai piani di stratificazione delle originarie rocce sedimentari, certe granuliti gneissiche, secondo Royer, dovrebbero la loro tessitura parallela ad una laminazione di intercalazioni granitiche.

naceo-argillosa, sia pure interessata da manifestazioni vulcaniche durante il Cambrico ed il Silurico. Un apporto di alcali, dapprima K poi Na, ha determinato un graduale spostamento delle basi preesistenti (Fe, Mg, Ca . . .) con feldspatizzazioni favorite dalla mobilizzazione del Si. La provenienza del quale elemento può forse non essere ricercata esclusivamente fuori del complesso sedimentare. Così ad esempio vene, filoni o lenti di quarzo entro le filladi delle Cabilie potrebbero rappresentare, almeno in parte, essudati dei sedimenti arenacei sottostanti o intercalati.

Specialmente la formazione gneissica è risultata da una molto intensa feldspatizzazione, il fronte della quale si è esteso fino ai micaschisti. Come risulta dalle accurate ricerche petrografiche e chimiche di L. Royer [11], integrate ed aggiornate da J. Thiébaut [16, 17], alla fine prevalse un'albitizzazione in conseguenza del rilevante apporto di Na; che è appunto una delle caratteristiche della nostra serie cristallina [3].

Nei metasomatismi del massiccio cabilico oltre all'apporto di alcali e silice un'importanza specifica va attribuita alla venuta del B, manifesta nell'abbondanza della tormalina soprattutto entro le magnifiche pegmatiti [4] della valle dell'Aissi (a SE di Tizi Uzu), ai contatti (« greisen ») della granulite di Menerville, negli schisti della Cabilia di Collo (qui anche piccole manifestazioni di Sn) ed altrove.

Nel cristallino ercinico della Sardegna invece la tormalina è piuttosto rara; tuttavia qualche confronto potrebbe essere fatto con i micaschisti ed i gneiss tormaliniferi dell'Asinara ed i graniti della Gallura (Tempio, Caprera, ecc.).

Le cause di questi complessi fenomeni di metamorfismo con parziale espulsione e rideposito delle basi originarie, con le iniezioni filoniane da aplitico-pegmatitiche a quarzifere, con la formazione delle *facies* anfibolitiche e la cristallizzazione dei marmi, lo scolorimento di singoli orizzonti schistosi ed infine con la, sia pur limitata, caolinizzazione degli stessi potrebbero essere ricercate in un magmatismo primario più profondo (« ipogenetico »), del quale però direttamente non si hanno le prove.

Per la oggettività della difficile discussione bisogna però riconoscere che nemmeno graniti di anatessi veri e propri affiorano nella Grande Cabilia; tuttavia a SO del Fort National, tra i villaggi di Ait Atelli e Ait Frah si può osservare – e lo abbiamo effettivamente constatato sotto la guida di Thiébaut – che i gneiss occhiadini perdono la loro tessitura parallela e fanno passaggio ad un tipo di struttura, che può essere già definita granitica. Ed è

(3) Le idee innovatrici sul metamorfismo regionale – precursore Michel Levy – formulate specialmente da Sederholm e da Wegmann, sviluppate poi da altri geologi e petrografi – ricordiamo qui Jung e Roques con la loro terminologia ancora poco familiare nella nostra letteratura geologica, ma seguìta da Thiébaut nello studio sopra citato – trovano una conferma nelle recenti ricerche sul cristallino della Grande Cabilia.

(4) Queste pegmatiti per Royer piuttosto che il residuo di un magma granitico profondo, data l'assenza di elementi rari, pare sieno sostanzialmente il prodotto della fusione dei gneiss e micaschisti solo con l'apporto di qualche elemento fumarolico.

da attendersi che questo granito di anatessi costituisca la parte più profonda, non affiorante, del massiccio.

Il fenomeno della granitizzazione non avrebbe dato però origine ad un magma « litoide » così mobile da introdursi nella sovrastante serie cristallina.

Questo ritengo sia avvenuto invece in Sardegna, dove l'ingente massa granitica si è sostituita al Cambrico, del quale ad eccezione dell'Iglesiente non si ha più traccia, ed in parte al Silurico, ciò che è ancora riconoscibile specialmente nelle zone marginali della grande dorsale granitica smantellata, spianata, dislocata e nuovamente scolpita fra il Gennargentu e le Bocche di Bonifacio. Così ad esempio i gneiss occhiadini e le pegmatiti entro i micaschisti dall'altopiano di Buddusò (Mamone) al Mare Tirreno (bacino del Posada), i graniti a grossi feldspati orientati della Gallura, associati a gneiss e micaschisti (bacino del Liscia ed altrove), l'analoga associazione su più vasta scala, con abbondanza di pegmatiti ed apliti, col granito pure a grandi feldspati nell'Isola Asinara, li ritengo aspetti diversi dello stesso fenomeno di migmatizzazione ercinica del Paleozoico sardo. E forse anche il problema genetico dei porfiroidi occhiadini del Gerrei (Medio Flumendosa, Rio Mulargia, ecc.) può essere meglio spiegato se posto in rapporto con una parziale trasformazione della serie arenaceo–argillosa ordoviciana.

Per quanto queste ed altre questioni attendano ancora di essere approfondite, non si può prescindere dal problema geologico dello spazio attualmente occupato dal granito del massiccio ercinico sardo, del quale ho trattato brevemente in una precedente Nota [18, 19]. Confido perciò che la questione della natura litogena del nostro granito abbia ad attirare l'attenzione dei giovani petrografi.

NOTE PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Sul differenziale generalizzato delle forme differenziali esterne.* Nota II di GIULIO ARUFFO, presentata (*) dal Corrisp. B. SEGRE.

Si fa seguito ad una Nota dallo stesso titolo apparsa in questi « Rendiconti » (9).

5. TEOREMA II. – *Condizione necessaria e sufficiente affinché sia:*

$$d'[\omega_r\, dx^{h_1} \cdots dx^{h_p}] = 0 \tag{16}$$

è che risulti

$$d'\,\dot{\omega}_r\,(X/C) = 0, \tag{17}$$

(*) Nella seduta dell'8 novembre 1952.

(9) Serie VIII, vol. XIII, fasc. 6, pp. 367–372 (1952).

per ogni valore delle costanti $c^{k_1}, \cdots, c^{k_p}$ *soddisfacenti alle:*

$$0 < c^{k_l} < 1 \qquad (l = 1, \cdots, p).$$

Basterà limitarci a supporre $r+p \leq n-1$, ché in caso contrario sia la (16) che la (17) sono sempre soddisfatte.

La condizione è necessaria. Per il teor. I, l'ipotesi implica che sia:

$$d\,[\omega_r^{(m)}\, dx^{k_1} \cdots dx^{k_p}] \xrightarrow{m} 0 \qquad (\text{in } D_n),$$

e cioè

$$[d\omega_r^{(m)}\, dx^{k_1} \cdots dx^{k_p}] \xrightarrow{m} 0 \qquad (\text{in } D_n). \tag{18}$$

Posto:

$$d\omega_r^{(m)} = \frac{1}{(r+1)!}\, b^{(m)}_{i_1, \cdots, i_{r+1}}\, [dx^{i_1} \cdots dx^{i_{r+1}}],$$

dalla (18) discende che è:

$$b^{(m)}_{i_1, \cdots, i_{r+1}} \xrightarrow{m} 0 \qquad (\text{in } D_n), \tag{19}$$

ogni qualvolta gli indici $i_1 \cdots, i_{r+1}$ sono tutti distinti da $k_1, \cdots, k_p$.

Detto $E_{n-p}(C)$ l'$(n-p)$–blocco intersezione di E_n con l'S_{n-p} di equazioni $x^{k_l} = c^{k_l}$ $(l = 1, \cdots, p)$, e $D_{n-p}(C)$ un qualsasi $(n-p)$–campo tutto interno ad $E_{n-p}(C)$, dalla (19) segue che, al divergere di m, la traccia di $d\omega_r^{(m)}$ su $E_{n-p}(C)$ tende a zero uniformemente in $D_{n-p}(C)$. Ma poiché, per la ben nota covarianza del differenziale esterno, la traccia di $d\omega_r^{(m)}$ coincide col differenziale della traccia di $\omega_r^{(m)}$, si ha pure:

$$d\omega_r^{(m)}\,(X/C) \xrightarrow{m} 0 \qquad (\text{in } D_{n-p}(C)). \tag{20}$$

Inoltre dalla:

$$\omega_r^{(m)} \xrightarrow{m} \omega_r \qquad (\text{in } D_n),$$

segue la:

$$\omega_r^{(m)}\,(X/C) \xrightarrow{m} \omega_r\,(X/C) \qquad (\text{in } D_{n-p}(C)). \tag{21}$$

Detto ora $D_{r+1}(C)$ un qualsiasi $(r+1)$–campo tutto interno ad $E_{n-p}(C)$ [10] vale l'eguaglianza:

$$\int_{dD_{r+1}(C)} \omega_r^{(m)}\,(X/C) = \int_{D_{r+1}(C)} d\omega_r^{(m)}\,(X/C). \tag{22}$$

Per le (20), (21), è lecito passare al limite per $m \to \infty$ sotto segno di integrale nei due membri della (22), e con ciò si ottiene:

$$\int_{dD_{r+1}(C)} \omega_r\,(X/C) = 0.$$

(10) Ciò ha senso in quanto, per ipotesi, è $r+1 \leq n-p$.

Da qui, stante l'arbitrarietà di $D_{r+1}(C)$, segue la tesi [11].

La condizione è sufficiente. Risulta:

$$[\omega_r\, dx^{k_1} \cdots dx^{k_p}] = \frac{1}{r!}\, a_{i_1,\cdots,i_r}\, [dx^{i_1} \cdots dx^{i_r}\, dx^{k_1} \cdots dx^{k_p}] =$$

$$= \frac{1}{(r+p)!}\, \varphi_{j_1,\cdots,j_{r+p}}\, [dx^{j_1} \cdots dx^{j_{r+p}}],$$

ove i coefficienti $\varphi_{j_1,\cdots,j_{r+p}}$ sono le funzioni delle x, emisimmetriche rispetto agli indici, definite dalle:

$$\begin{cases} \varphi_{j_1,\cdots,j_{r+p}} = 0 \text{ ogni volta che uno almeno dei } k_1,\cdots,k_p \text{ non compaia tra gli indici } j_1,\cdots,j_{r+p}. \\ \varphi_{j_1,\cdots,j_r\,k_1,\cdots,k_p} = a_{j_1,\cdots,j_r}. \end{cases}$$

Determiniamo ora funzioni $\Phi_{j_1,\cdots,j_{r+p}}$, continue in E_n ed emisimmetriche rispetto agli indici, in guisa che risulti:

$$\frac{\partial^{r+p}\, \Phi_{j_1,\cdots,j_{r+p}}}{\partial x^{j_1} \cdots \partial x^{j_{r+p}}} = \varphi_{j_1,\cdots,j_{r+p}},$$

scegliendo $\Phi = 0$ quando sia nulla la corrispondente φ.

In forza del criterio I ricordato nel n. 2, per provare la tesi basterà far vedere che, per ogni scelta degli $r+p+1$ indici $j_1,\cdots,j_{r+p+1}$, vale un'eguaglianza del tipo:

$$\sum_1^{r+p+1}{}_h\, (-1)^{h-1}\, \Phi_{j_1,\cdots,j_{h-1}\,j_{h+1},\cdots,j_{r+p+1}} = \sum_1^{r+p+1}{}_h\, \lambda_{j_1,\cdots,j_{h-1}\,j_{h+1},\cdots,j_{r+p+1}},$$

con le λ continue in E_n ed emisimmetriche rispetto agli indici, e $\lambda_{j_1,\cdots,j_{h-1}\,j_{h+1},\cdots,j_{r+p+1}}$ non dipendendo da x^{j_h}. La precedente eguaglianza è sempre soddisfatta se tra gli indici $j_1,\cdots,j_{r+p+1}$ non figurano tutte le $k_1,\cdots,k_p$, perché in tal caso risultano nulle tutte le Φ che compaiono entro il sommatorio. Data l'emisimmetria delle funzioni che entrano in gioco, si constata facilmente che ci si può quindi limitare a supporre $j_{r+2} = k_1,\cdots,j_{r+p+1} = k_p$: con ciò l'uguaglianza da stabilire assume la forma:

$$(23) \qquad \sum_0^{r+1}{}_h\, (-1)^{h-1}\, \Phi_{i_1,\cdots,i_{h-1}\,i_{h+1},\cdots,i_{r+1}\,k_1,\cdots,k_p} =$$

$$= \sum_1^{r+1}{}_h\, \lambda_{i_1,\cdots,i_{h-1}\,i_{h+1},\cdots,i_{r+1}\,k_1,\cdots,k_p} + \sum_1^{p}{}_h\, \lambda_{i_1,\cdots,i_{r+1}\,k_1,\cdots,k_{h-1}\,k_{h+1},\cdots,k_p}.$$

(11) Osserviamo esplicitamente che non sarebbe lecito desumere senz'altro la (17) dalla (20) e dalla sufficienza della condizione espressa dal teor. I; e ciò perché il simbolo $\omega_r^{(m)}(X/C)$ ha significato di traccia della forma approssimante ω_r, e non di forma approssimante la traccia di ω_r.

Queste due forme sono distinte, poiché i loro coefficienti omologhi

$$\left[a^{(m)}_{i_1,\cdots,i_r}\right]_{x^{k_l}} = C^{k_l} \quad , \quad \left\{\left[a_{i_1,\cdots,i_r}\right]_{x^{k_l}} = C^{k_l}\right\}^{(m)}$$

risultano generalmente diversi.

Posto:

$$A_{i_1,\dots,i_r}(x^1,\dots,x^n)=\int_0^{x^{i_1}}\cdots\int_0^{x^{i_r}} a_{i_1,\dots,i_r}(x^1,\dots,x^n)\,dx^{i_1}\cdots dx^{i_r},$$

in virtù dello stesso criterio I, dall'ipotesi $d'\omega_r(X/C)=0$ segue che, per ogni scelta degli $r+1$ indici $i_1,\dots,i_{r+1}$ tutti distinti da $k_1,\dots,k_p$, dev'essere:

$$(24)\qquad \sum_1^{r+1}{}_h(-1)^{h-1}A_{i_1\dots,i_{h-1}i_{h+1},\dots,i_{r+1}}=\sum_1^{r+1}{}_h l_{i_1,\dots,i_{h-1}i_{h+1},\dots,i_{r+1}},$$

ove le funzioni l soddisfano alle solite condizioni di continuità e di emisimmetria e $l_{i_1,\dots,i_{h-1}i_{h+1},\dots,i_{r+1}}$ è indipendente da x^{i_h}.

Si può inoltre scegliere:

$$\Phi_{i_1,\dots,i_{h-1}i_{h+1},\dots,i_{r+1}k_1,\dots,k_p}=\int_0^{x^{k_1}}\cdots\int_0^{x^{k_p}} A_{i_1,\dots,i_{h-1}i_{h+1},\dots,i_{r+1}}\,dx^{k_1}\cdots dx^{k_p}.$$

Con ciò, tenuto conto della (24), si ottiene:

$$\sum_1^{r+1}{}_h(-1)^{h-1}\Phi_{i_1,\dots,i_{h-1}i_{h+1},\dots,i_{r+1}k_1,\dots,k_p}=$$

$$=\int_0^{x^{k_1}}\cdots\int_0^{x^{k_p}}\left\{\sum_1^{r+1}{}_h(-1)^{h-1}A_{i_1,\dots,i_{h-1}i_{h+1},\dots,i_{r+1}}\right\}dx^{k_1}\cdots dx^{k_p}=$$

$$=\sum_1^{r+1}{}_h\int_0^{x^{k_1}}\cdots\int_0^{x^{k_p}} l_{i_1,\dots,i_{h-1}i_{h+1},\dots,i_{r+1}}\,dx^{k_1}\cdots dx^{k_p}.$$

Poiché i_h è certo distinto da $k_1,\dots,k_p$, l'integrale

$$\int_0^{x^{k_1}}\cdots\int_0^{x^{k_p}} l_{i_1,\dots,i_{h-1}i_{h+1},\dots,i_{r+1}}\,dx^{k_1}\cdots dx^{k_p}$$

non dipende da x^{i_h}, dunque l'ultimo membro della precedente eguaglianza può venir identificato col secondo membro della (23), qualora si assuma:

$$\lambda_{i_1,\dots,i_{h-1}i_{h+1}i_{r+1}k_1,\dots,k_p}=\int_0^{x^{k_1}}\cdots\int_0^{x^{k_p}} l_{i_1,\dots,i_{h-1}i_{h+1},\dots,i_{r+1}}\,dx^{k_1}\cdots dx^{k_p},$$

$$\lambda_{i_1,\dots,i_{r+1}k_1,\dots,k_{h-1}k_{h+1},\dots,k_p}=0.$$

Ciò dimostra la sufficienza della condizione enunciata dal teor. II.

6. Come corollari del teor. II, si hanno le seguenti proposizioni.

TEOREMA III. – *Condizione necessaria e sufficiente affinché sia*

$$d'[f(x^1,\dots,x^n)\,dx^{k_1}\cdots dx^{k_p}]=0,$$

è che f dipenda soltanto da $x^{k_1},\dots,x^{k_p}$.

La sufficienza della condizione è ovvia; per ciò che riguarda la necessità basta osservare che, posto $\omega_r = \omega_0 = f(x^1, \cdots, x^n)$ in virtù del teor. II, dall'ipotesi del teor. III segue:

$$d'\omega_0(X/C) = d'f(X/C) = 0.$$

Ora, dette $x^{i_1}, \cdots, x^{i_{n-p}}$ le variabili distinte da $x^{k_1}, \cdots, x^{k_p}$ e posto: $f(X/C) = \varphi(x^{i_1}, \cdots, x^{i_{n-p}})$, la condizione $d'\varphi = 0$ si traduce in ciò che, se E_1 è un arco di curva orientato avente per origine ed estremo ordinatamente $\overline{P}$ e P, risulta:

$$0 = \int_{\partial E_1} \varphi(x^{i_1}, \cdots, x^{i_{n-p}}) = \varphi(P) - \varphi(\overline{P}).$$

E questa esprime appunto che è $\varphi(P) = \varphi(\overline{P}) = \text{cost.}$, in quanto, tenuto fisso $\overline{P}$, per la connessione di E_n, il punto P può variare liberamente in E_n.

TEOREMA IV. – *Se, nell'*S_n *delle variabili* $x^1, \cdots, x^n$, *la*

$$\omega_r = \frac{1}{r!} a_{i_1, \cdots, i_r} [dx^{i_1} \cdots dx^{i_r}]$$

è una forma chiusa e, inoltre, si ha $a_{i_1, \cdots, i_r} = 0$ *tutte le volte che uno almeno degli indici* $i_1, \cdots, i_r$ *sia diverso da ciascuno dei* p *interi fissati* $k_1, \cdots, k_p$ $(l \leq k_l \leq n$, *per* $l = 1, \cdots, p$; $r \leq p < n)$, *allora ciascuno dei coefficienti di* ω_r *dipende dalle sole variabili* $x^{k_1}, \cdots, x^{k_p}$, *e la forma* ω_r *risulta pure chiusa nell'*$S_p(x^{k_1}, \cdots, x^{k_p})$.

La dimostrazione può dedursi come segue dal teor. III. Fissato uno qualsiasi dei coefficienti $a_{i_1, \cdots, i_r}$ non nulli di ω_r, si consideri la forma chiusa che è traccia di ω_r sull'$S_{n-(p-r)}$ intersezione dei $p - r$ iperpiani $x^l = c^l$, ove i valori dell'indice l siano quelli tra i numeri $k_1, \cdots, k_p$ che son distinti da $i_1, \cdots, i_r$. Tale traccia si riduce al solo termine $a_{i_1, \cdots, i_r}(X/C)[dx^{i_1} \cdots dx^{i_r}]$ (ove non è sotto–intesa alcuna somma). Per il teor. III, $a_{i_1, \cdots, i_r}(X/C)$ dipende dalle sole variabili $x^{i_1}, \cdots, x^{i_r}$, e quindi $a_{i_1, \cdots, i_r}$ non può dipendere da alcuna variabile diversa da $x^{k_1}, \cdots, x^{k_p}$. Pertanto la forma ω_r viene a dipendere di fatto da queste sole p variabili, ed è quindi chiusa nel loro S_p.

Osserviamo che il teor. IV costituisce una generalizzazione del teor. III, coincidendo con esso per $r = p$.

7. Nel presente numero, supposto che ciascuno dei coefficienti $a_{i_1, \cdots, i_r}$ sia continuo in E_n ed ammetta ivi derivata continua rispetto ad x^{i_h}, per ogni $i_h = i_1, \cdots, i_r$ proveremo il

TEOREMA V. – *Nelle ipotesi suddette, la forma* ω_r *è dotata in* E_n *di differenziale generalizzato:*

$$d'\omega_r = \sigma_{r+1} = \frac{1}{(r+1)!} b_{i_1, \cdots, i_{r+1}} [dx^{i_1} \cdots dx^{i_{r+1}}],$$

ove i coefficienti b di $\sigma_{r,1}$ *hanno la stessa espressione che compare nel differenziare ordinario:*

$$b_{i_1, \cdots, i_{r+1}} = \sum_1^{r+1}{}_h (-1)^{h-1} \frac{\partial a_{i_1, \cdots, i_{h-1} i_{h+1}, \cdots, i_{r+1}}}{\partial x^{i_h}}.$$

Il teorema è conseguenza pressoché immediata del teor. I e della nota proprietà che, se $f(x^1, \cdots, x^n)$ è continua in E_n insieme con $\frac{\partial}{\partial x^i}$, allora:

$$\frac{\partial}{\partial x^i} f^{(m)} \xrightarrow{m} \frac{\partial f}{\partial x^i} \qquad (\text{in } D_n).$$

Risulta infatti:

$$d\omega_r^{(m)} = \frac{1}{(r+1)!} \alpha^{(m)}_{i_1, \cdots, i_{r+1}} [dx^{i_1} \cdots dx^{i_{r+1}}]$$

con:

$$\alpha^{(m)}_{i_1, \cdots, i_{r+1}} = \sum_1^{r+1}{}_h (-1)^{h-1} \frac{\partial a^{(m)}_{i_1, \cdots, i_{h-1} i_{h+1}, \cdots, i_{r+1}}}{\partial x^{i_h}} .$$

Per ipotesi, tanto $a_{i_1, \cdots, i_{h-1} i_{h+1}, \cdots, i_{r+1}}$ che $\frac{\partial a_{i_1, \cdots, i_{h-1} i_{h+1}, \cdots, i_{r+1}}}{\partial x^{i_h}}$ esistono continue in E_n, sicché

$$\frac{\partial a^{(m)}_{i_1, \cdots, i_{h-1} i_{h+1}, \cdots, i_{r+1}}}{\partial x^{i_h}} \xrightarrow{m} \frac{\partial a_{i_1, \cdots, i_{h-1} i_{h+1}, \cdots, i_{r+1}}}{\partial x^{i_h}} \qquad (\text{in } D_n).$$

Ne consegue:

$$d\omega_r^{(m)} \xrightarrow{m} \sigma_{r+1} \qquad (\text{in } D_n),$$

d'onde, per il teor. I, la tesi.

Analisi matematica. — *Il fenomeno di Gibbs nell'interpolazione delle funzioni discontinue.* Nota I di LUIGI MERLI, presentata (*) dal Corrisp. G. SANSONE.

1. In una recente Nota (1), studiando il comportamento dei polinomi di interpolazione di Hermite di una funzione continua nell'intervallo $(-1, 1)$, che nell'origine abbia una discontinuità di prima specie, abbiamo riscontrato la presenza di un fenomeno analogo a quello di Gibbs negli sviluppi in serie di polinomi ortogonali. Approssimando infatti la funzione $f(x) = |x|/x$, per $x \neq 0$, $f(0) = 0$, coi polinomi di interpolazione di Hermite, $y = H_n(x)$, di grado $\leq 8n + 1$, costruiti prendendo come punti fondamentali gli zeri del polinomio di Tchebycheff di prima specie, abbiamo provato che per $x > 0$ $(x < 0)$ mentre i massimi (i minimi) di $H_n(x)$ si mantengono costantemente uguali ad 1 (-1), i minimi (i massimi), le cui ascisse tendono a zero per $n \to \infty$, tendono a zero. Scopo di questa Nota è di far vedere che tale fenomeno si ripresenta nella stessa precisa forma se, anziché interpolare la $f(x)$ negli zeri dei polinomi di Tchebycheff di prima specie, si scelgono, più in

(*) Nella seduta del 13 dicembre 1952.

(1) L. MERLI, *Alcune osservazioni sull'interpolazione delle funzioni discontinue.* « Boll. U. M. I. » (IV), pp. 140–146 (1949).

generale, come *punti fondamentali*, gli zeri dei polinomi ultrasferici di Gegenbauer $P_n^{(\lambda)}(x)$, con $0 < \lambda < 1/2$ [2].

2. Ricordiamo che assegnata una funzione $f(x)$ definita in $(-1, 1)$ ed una successione di ascisse $\{x_k^{(n)}\}$, $k = 1, 2, \ldots, n$, il relativo polinomio interpolante di Hermite è dato da

$$H_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f(x_k^{(n)})\, h_k^{(n)}(x), \tag{1}$$

con

$$h_k^{(n)}(x) = v_k^{(n)}(x)\, l_k^{(n)}(x), \tag{2}$$

dove

$$v_k^{(n)}(x) = 1 - \frac{\omega_n''(x_k^{(n)})\,(x - x_k^{(n)})}{\omega_n'(x_k^{(n)})}, \tag{3}$$

ed

$$l_k^{(n)}(x) = \frac{\omega_n(x)}{\omega_n'(x_k^{(n)})\,(x - x_k^{(n)})} \tag{4}$$

$$\omega_n(x) = C \prod_{i=1}^{n} (x - x_i^{(n)}) \quad , \quad C \neq 0.$$

Ricordiamo inoltre che, nell'ipotesi che la successione $\{x_k^{(n)}\}$ sia data dagli zeri del polinomio $\omega_n(x) = P_n^{(\lambda)}(x)$, con $0 < \lambda < 1/2$, si ha uniformemente, qualunque sia la funzione $f(x)$ continua, in $(-1, 1)$,

$$\lim_{n \to \infty} H_n(x) = f(x) \text{ [3]}. \tag{5}$$

Si consideri invece una funzione $f(x)$ continua in $(-1, 1)$ salvo nell'origine ove supponiamo che abbia una discontinuità di prima specie e sia $f(0) = 0$. Posto $n = 4r + 1$ ed $x_{2r+1} = 0$, costruiamone il relativo polinomio interpolante di Hermite, che per brevità indicheremo ancora con $H_r(x)$,

$$H_r(x) = \sum_{k=1}^{2r} f(x_k^{(r)})\, h_k^{(r)}(x) + \sum_{k=2r+2}^{4r+1} f(x_k^{(r)})\, h_k^{(r)}(x). \tag{6}$$

Facendo uso di un procedimento di Féjer, abbiamo provato [4], che, nell'ipotesi che i *punti fondamentali* siano gli zeri del polinomio di Tchebycheff di prima specie, si ha ancora uniformemente, per qualunque intervallo escludente l'origine,

$$\lim_{r \to \infty} H_r(x) = f(x). \tag{7}$$

Con lo stesso procedimento vogliamo ora far vedere che la (7) è valida anche nell'ipotesi più generale che i punti fondamentali siano gli zeri

(2) I polinomi di Tchebycheff di prima specie si hanno nel caso particolare $\lambda = 0$.

(3) G. SZEGÖ, *Orthogonal Polynomials*. « Ann. Math. Colloquium Publ. », p. 383, New-York (1939).

(4) Cfr. lav. cit. nota [1], p. 141.

$\{x_k^{(r)}\}$, $k = 1, 2 \cdots, 4r+1$, con $-1 < x_{4r+1} < x_{4r} < \cdots < x_{2r+1} = 0 < x_{2r} < < x_{2r-1} < \cdots < x_1 < 1$, del polinomio ultrasferico $P_r^{(\lambda)}(x)$, con $0 < \lambda < 1/2$.

È in questo caso

$$h_k^{(r)}(x) \geqq 0,$$

per $-1 \leq x \leq 1$, qualunque siano k ed r. Si ha infatti, per $0 < \lambda < 1/2$,

$$v_k^{(r)}(x) = \frac{1 - 2x\left(\lambda + \frac{1}{2}\right)x_k + 2\lambda x_k^2}{1 - x_k^2} > 0, \tag{8}$$

qualunque siano k ed r [5].

Inoltre, tenuto conto che è

$$\max_{-1 \leq x \leq 1} |P_n^{(\lambda)}(x)| = O(n^{\lambda - 1/2}) \quad , \quad 0 < \lambda < \frac{1}{2} \tag{9}$$

e

$$|P_n'^{(\lambda)}(\theta_k^{(n)})| \sim k^{-\lambda - 1} n^{\lambda + 3/2} \quad , \quad x_k^{(n)} = \cos\theta_k^{(n)} \quad , \quad 0 < \theta_k^{(n)} \leq \frac{\pi}{2}, \tag{10}$$

nel senso che il rapporto tra $|P_n'^{(\lambda)}(\theta_k^{(n)})|$ e $k^{-\lambda - 1} n^{\lambda + 3/2}$, rimane tra due certe costanti positive dipendenti solamente da λ [6], sarà

$$h_k^{(r)}(x) = \frac{\left[1 - 2x\left(\lambda + \frac{1}{2}\right)x_k + 2\lambda x_k^2\right][P_r^{(\lambda)}(x)]^2}{(1 - x_k^2)(x - x_k)^2 [P'^{(\lambda)}(x_k)]^2} \leq \tag{11}$$

$$\leq R(\lambda) \frac{(4r+1)^{-4} k^{2\lambda + 2}}{(x - x_k)^2},$$

con $R(\lambda)$ costante assoluta dipendente solamente da λ.

Sia ora $0 < \delta \leq x \leq 1$ e sia σ un numero positivo arbitrario: per la uniforme continuità potremo determinare corrispondentemente un ε tale che se x' e x'' sono due punti qualunque in $(\delta, 1)$, tali che $|x' - x''| < \varepsilon$, risulta $|f(x') - f(x'')| < \sigma$.

Fissato un punto x qualunque di $(\delta, 1)$, si ha:

$$|f(x) - H_r(x)| \leq \left|\sum_{k=1}^{2r} [f(x) - f(x_k)] h_k^{(r)}(x)\right| + \left|\sum_{k=2r+2}^{4r+1} [f(x) - f(x_k)] h_k^{(r)}(x)\right| \leq$$

$$\leq \sum_{k=1}^{2r}{}' |f(x) - f(x_k)| h_k(x) + \sum_{1}^{2r}{}'' f(x) - f(x_k)| h_k^{(r)}(x) +$$

$$+ \sum_{k=2r+2}^{4r+1} |f(x) - f(x_k)| h_k^{(r)}(x),$$

dove $\sum'$ indica la somma estesa a tutti i punti tali che $|x - x_k| \leq \varepsilon$ e $\sum''$ la somma estesa a tutti gli altri punti $x_k^{(r)}$.

Tenuto conto che è $\sum_{k=1}^{4r+1} h_k^{(r)}(x) \equiv 1$, sarà:

$$\sum_{k=1}^{2r}{}' |f(x) - f(x_k^{(r)})| h_k^{(r)}(x) < \sigma \cdot \sum_{k=1}^{2r} h_k^{(r)}(x) \leq \sigma;$$

(5) Cfr. G. Szegö, op. cit. in [3], p. 332.

(6) Cfr. G. Szegö, op. cit. in [3], pp. 163 e 232.

d'altra parte, indicando con M il massimo del valore assoluto di $f(x)$ in $(-1, 1)$, tenuto conto della (11),

$$\sum_{k=1}^{2r}{}'' |f(x) - f(x_k^{(r)})| \, h_k^{(r)}(x) + \sum_{k=2r+2}^{4r+1} |f(x) - f(x_k^{(r)})| \, h_k^{(r)}(x) \leq$$

$$\leq 2M \sum_{k=1}^{4r+1} h_k^{(r)}(x) \leq \frac{2MR(\lambda)}{\varepsilon^2} (4r+1)^{-4} \sum_{k=1}^{4r+1} k^{2\lambda+2} <$$

$$< \frac{2MR(\lambda)}{\varepsilon^2} (4r+1)^{2(\lambda-1.2)} \quad , \quad \left(0 < \lambda < \frac{1}{2}\right).$$

Si avrà quindi:

$$|f(x) - H_r(x)| \leq \sigma + \frac{2MR(\lambda)}{\varepsilon^2} (4r+1)^{2(\lambda-1/2)},$$

ed essendo σ arbitrario e $0 < \lambda < 1/2$, quando $r \to \infty$, segue la (7), per tutti gli x per cui è $0 < \delta \leq x \leq 1$.

Analogamente si ragiona per $-1 \leq x \leq -\delta < 0$, $(\delta > 0)$.

Analisi matematica. — *Sulle singolarità delle soluzioni della equazione* $\Delta u + cu = 0$ (*). Nota di BRUNO PINI, presentata (**) dal Socio M. PICONE.

In una Nota (1) precedente abbiamo indicato certi perfezionamenti a un risultato di M. Picone (2) relativo alle singolarità puntuali isolate delle soluzioni dell'equazione $\Delta u + c(P)u = 0$.

Nel caso di punti non isolati, H. Lebesgue (3) ha provato che: *Una funzione limitata in un dominio* D *a tre o più dimensioni, armonica in* D, *salvo al più nei punti di un arco limitato di curva rettificabile, interna a* D, *è armonica in tutto* D.

M. Picone (4) ha dato una generalizzazione notevole della precedente proposizione. Precisati i concetti di porzione di frontiera *ordinaria* ed *eli-*

(*) Lavoro eseguito nel Seminario Matematico dell'Università di Bologna.

(**) Nella seduta del 10 gennaio 1953.

(1) B. PINI, *Osservazioni su un teorema di M. Picone relativo all'equazione* $\Delta u + cu = 0$, in corso di stampa nel « Boll. U.M.I. ».

(2) M. PICONE, *Intorno alla teoria di una classica equazione a derivate parziali della Fisica-Matematica.* « Annales de la Soc. Polonaise de Mat. », t. XXI (1948), 161-169, ed F. LEJA, *Remarques sur le travail précédent de M. Mauro Picone.* Ibidem 170–172.

(3) H. LEBESGUE, *Sur les singularités des fonctions harmoniques.* « Comptes Rendus de l'Acad. des Sciences », Paris, t. 176 (1923) 1097-1099 e 1270-1271. Cfr. anche G. BOULIGAND, *Sur la définition et le mode de continuité de la fonction de Green harmonique et de la solution du problème de Dirichlet,* « Bull. des Sciences Math. », t. XLVII (1923), 386–397.

(4) M. PICONE, *Sur la théorie d'une équation aux dérivées partielles classique de la physique mathématique.* « Comptes Rendus de l'Acad. des Sciences », Paris, t. 226 (1948), 1945-1947; e *Sulle singolarità delle soluzioni di una classica equazione a derivate parziali della fisica matematica.* « Atti 3° Congresso U.M.I. », Roma 1951, pp. 69–71.

minabile e quello di *varietà regolare q-dimensionale senza bordo*, Picone enuncia il seguente teorema:

Se A *è un campo limitato e di diametro* δ *dello spazio* S_n *(ad n dimensioni), siano* $\mathfrak{F}_i$ A $(i = 1, 2, \cdots, \mu)$ *parti di* $\mathfrak{F}$A *ordinarie o eliminabili, a due a due prive di punti comuni, la parte* $\mathfrak{F}_i$ A *essendo contenuta in una varietà regolare senza bordo a* q_i *dimensioni* $(0 \leq q_i \leq n-2)$, α_i *un numero positivo* $< n-2-q_i$ *per* $n > 2+q_i$, < 1 *per* $n = 2+q_i$, *e sia*

$$(1) \qquad \tau_i(P) = \begin{cases} r(P, \mathfrak{F}_i A) & \text{per } n > 2+q_i \\ 1/\lg \dfrac{e\delta}{r(P, \mathfrak{F}_i A)} & \text{per } n = 2+q_i \end{cases} \qquad (e = \text{numero di Nepero})$$

ove la notazione $r(P, \mathfrak{E})$ *sta ad indicare la distanza del punto* P *dall'insieme* $\mathfrak{E}$. *Se sussiste il teorema di esistenza ed unicità per il problema di Dirichlet concernente l'equazione*

$$(2) \qquad \Delta u + c(P)\, u = 0$$

e il campo A* *ottenuto da* A *aggregandogli quelle delle* $\mathfrak{F}_i$ A *che sono eliminabili, allora una soluzione* $u(P)$ *in* A *della* (2), *per la quale si abbia*

$$\lim_{\substack{P \to P_0 \\ P \subset A}} u(P) \prod_1^{\mu}{}_i [\tau_i(P)]^{\alpha_i} = 0$$

per ogni punto P_0 *di* $\mathfrak{F}$A, *è identicamente nulla in* A.

Nel caso che sia $q_i = 0$, cioè che le varietà siano tutte dei punti, Picone ha dato una semplice dimostrazione dalla quale scende che una opportuna limitazione superiore *positiva* per la $c(P)$ assicura anche l'unicità della soluzione.

Noi vogliamo provare che, sostituendo alle funzioni $\tau_i(P)$ delle opportune funzioni potenziali, si può migliorare in più di una direzione la surriportata proposizione di Picone.

1. Cominciamo col provare che la proposizione di Picone si può estendere sostituendo la convergenza puntuale con quella in media [5].

Sia D un dominio dell'S_n $(n \geq 3)$, che per semplicità supponiamo semplicemente connesso; la sua frontiera sia una varietà regolare $\mathfrak{V}_0$ di cui

$$x_i = x_i^{(0)}(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{n-1}), \qquad i = 1, 2, \cdots, n,$$

sia una rappresentazione parametrica regolare sul dominio rettangolare R; supponiamo che le $x_i^{(0)}$ siano funzioni di classe 2. Fissiamo su $\mathfrak{V}_0$ delle porzioni di frontiera, siano $\mathfrak{V}_1, \mathfrak{V}_2, \cdots, \mathfrak{V}_\mu$, le quali siano varietà regolari limitate, rispettivamente a $q_1, q_2, \cdots, q_\mu$ dimensioni, con $0 < q_i \leq n-2$. Fissiamo poi in $D - \mathfrak{F}D$ un numero finito di varietà regolari limitate $\mathfrak{V}_{\mu+1}, \mathfrak{V}_{\mu+2}, \cdots, \mathfrak{V}_{\mu+\nu}$, rispettivamente a $q_{\mu+1}, q_{\mu+2}, \cdots, q_{\mu+\nu}$ dimensioni, con $0 < q_i \leq n-2$.

(5) G. CIMMINO, *Nuovo tipo di condizioni al contorno e nuovo metodo di trattazione per il problema generalizzato di Dirichlet*. « Rend. Circolo Mat. Palermo », t. LXI, 177-220 (1937).

Consideriamo la varietà $\mathfrak{V}_0(t)$:

$$x_i = x_i^{(0)}(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{n-1}) + t\nu_i, \qquad i = 1, 2, \cdots, n,$$

per $t > 0$ sufficientemente piccolo, essendo $\nu_1, \nu_2, \cdots, \nu_n$ i coseni direttori della normale interna. Ad ogni varietà $\mathfrak{V}_{\mu+h}$ associamo una varietà chiusa $(n-1)$-dimensionale $\mathfrak{V}_{\mu+h}(t)$

$$x_i = x_i^{(h)}(\beta_1^{(h)}, \beta_2^{(h)}, \cdots, \beta_{n-1}^{(h)}, t), \qquad i = 1, 2, \cdots, n,$$

sul dominio base $R^{(h)}$, la quale per $t \to 0$ si riduca alla $\mathfrak{V}_{\mu+h}$ in modo che per un $\varepsilon > 0$ a piacere esista un t_ε tale che per $0 < t < t_\varepsilon$ la $\mathfrak{V}_{\mu+h}(t)$ sia tutta contenuta nell'intorno ipersferico di raggio ε della $\mathfrak{V}_{\mu+h}$ e tale che quest'ultima sia contenuta nel dominio che ha per frontiera la $\mathfrak{V}_{\mu+h}(t)$. Supponiamo poi che le $x_i^{(h)}$ siano funzioni di classe 2. Per t abbastanza piccolo la $\mathfrak{V}_0(t)$ e le $\mathfrak{V}_{\mu+h}(t)$, $h = 1, 2, \cdots, \nu$, saranno rispettivamente il contorno esterno e i contorni interni di un dominio $D(t)$. Essendo P un punto di $D - \mathfrak{F}D - \sum_h^\nu \mathfrak{V}_{\mu+h}$ ed M_i un punto variabile sulla $\mathfrak{V}_i$, consideriamo il potenziale

$$\omega(P) = \sum_1^{\mu+\nu} {}_i \int_{\mathfrak{V}_i} \frac{d\mathfrak{V}_i}{r_i^\alpha} \qquad n-3 < \alpha < n-2 \tag{3}$$

ove $r_i = PM_i$.

Sia ora $u(P)$ una soluzione regolare della (2) in $D - \mathfrak{F}D - \sum_1^\nu {}_h \mathfrak{V}_{\mu+h}$. Posto $v = u/\omega$ e indicando con p un numero > 1, sussiste l'identità [6]

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left[\int_{\mathfrak{V}_0(t)} |v|^p \, d\mathfrak{V}_0 + \sum_1^\nu {}_i \int_{\mathfrak{V}_{\mu+i}(t)} |v|^p \, d\mathfrak{V}_{\mu+i}\right] &= \int_R \left(\frac{\partial \Omega}{\partial t} |v|^p\right)_{\mathfrak{V}_0(t)} d\alpha_1 \, d\alpha_2 \cdots d\alpha_{n-1} + \\
&+ \sum_1^\nu {}_h \int_{R^{(h)}} \left(\frac{\partial \Omega_h}{\partial t} |v|^p\right)_{\mathfrak{V}_{\mu+h}(t)} d\beta_1^{(h)} \, d\beta_2^{(h)} \cdots d\beta_{n-1}^{(h)} + \\
&+ p \int_{D(t)} |v|^p \left[\frac{\Delta\omega}{\omega} + c + \frac{1}{(p-1)\,\omega^2} \sum_1^n {}_k \left(\frac{\partial \omega}{\partial x_k}\right)^2\right] dx_1 \, dx_2 \cdots dx_n - \\
&- p(p-1) \int_{D(t)} \frac{|v|^{p-2}}{\omega^4} \sum_1^n {}_k \left(\frac{\partial u}{\partial x_k}\omega - \frac{p}{p-1} u \frac{\partial \omega}{\partial x_k}\right)^2 dx_1 \, dx_2 \cdots dx_n,
\end{aligned} \tag{4}$$

dove

$$\Omega = \left(\left\| \frac{\partial x_i^{(0)}}{\partial \alpha_j} \right\|^2\right)^{1/2}, \qquad \Omega_h = \left(\left\| \frac{\partial x_i^{(h)}}{\partial \beta_j^{(h)}} \right\|^2\right)^{1/2}.$$

Ora è

$$\Delta\omega = -\alpha(n-\alpha-2) \sum_1^{\mu+\nu} {}_i \int_{\mathfrak{V}_i} \frac{d\mathfrak{V}_i}{r_i^{\alpha+2}}$$

(6) Cfr. il lavoro citato in (1).

e

$$\sum_1^n{}_k \left(\frac{\partial\omega}{\partial x_k}\right)^2 = \alpha^2 \sum_{ij}^{1}{}^{\mu+\nu} \int_{\mathfrak{V}_i}\int_{\mathfrak{V}_j} \frac{1}{(r_i r_j)^{\alpha+1}} \sum_1^n{}_k \frac{\left(x_k - \xi_k^{(i)}\right)\left(x_k - \xi_k^{(j)}\right)}{r_i r_j}\, d\mathfrak{V}_i\, d\mathfrak{V}_j,$$

essendo $P \equiv (x_1, x_2, \cdots, x_n)$, $M_i \equiv (\xi_1^{(i)}, \xi_2^{(i)}, \cdots, \xi_n^{(i)})$; di qui, tenendo presente che $\left|\sum_1^n{}_k \frac{\left(x_k - \xi_k^{(i)}\right)\left(x_k - \xi_k^{(j)}\right)}{r_i r_j}\right| \leq 1$ e la diseguaglianza di Schwarz–Hölder, si ha

$$\sum_1^n{}_k \left(\frac{\partial\omega}{\partial x_k}\right)^2 \leq \omega\alpha^2 \sum_1^{\mu+\nu}{}_i \int_{\mathfrak{V}_i} \frac{d\mathfrak{V}_i}{r_i^{\alpha+2}}$$

e quindi

$$-\frac{\Delta\omega}{\omega} - \frac{1}{(p-1)\,\omega^2} \sum_1^n{}_k \left(\frac{\partial\omega}{\partial x_k}\right)^2 \geq \frac{\alpha}{\omega} \sum_1^{\mu+\nu}{}_i \int_{\mathfrak{V}_i} \frac{d\mathfrak{V}_i}{r_i^{\alpha+2}} \left(n - 2 - \frac{\alpha p}{p-1}\right) > \frac{\alpha}{\delta^2}\left(n - 2 - \frac{\alpha p}{p-1}\right)$$

se δ indica il diametro di D.

Perciò:

I. – *Sia* $u(P)$ *soluzione regolare di* (2) *in* $D - \mathfrak{F}D - \sum_1^{\nu}{}_h \mathfrak{V}_{\mu+h}$, $p > 1$, $\delta =$ *diametro* D, *e* α *un numero positivo tale che* $\alpha < \frac{p-1}{p}(n-2)$. *Allora, se*

$$c(P) < \frac{\alpha}{\delta^2}\left(n - 2 - \frac{\alpha p}{p-1}\right),$$

e se la $u(P)$ *verifica le condizioni*

$$\lim_{t\to 0}\left[\int_{\mathfrak{V}_0(t)} \left|\frac{u}{\omega}\right|^p d\mathfrak{V}_0 + \sum_1^{\nu}{}_i \int_{\mathfrak{V}_{\mu+i}(t)} \left|\frac{u}{\omega}\right|^p d\mathfrak{V}_{\mu+i}\right] = 0$$

$$\lim_{t\to 0} \sum_1^{\nu}{}_h \int_{R^{(h)}} \left(\frac{\partial\Omega_h}{\partial t}\left|\frac{u}{\omega}\right|^p\right)_{\mathfrak{V}_{\mu+h}(t)} d\beta_1^{(h)}\, d\beta_2^{(h)} \cdots d\beta_{n-1}^{(h)} = 0$$

essendo ω *definito dalla* (3), *è* $u(P) \equiv 0$.

Infatti, per un noto ragionamento, è sufficiente che il primo membro di (4) sia negativo, almeno per t abbastanza piccolo, perché la convergenza in media a zero d'ordine p (>1) della v su $\mathfrak{F}D(t)$, porti di conseguenza che v è identicamente nulla in D.

Se poi la funzione che è eguale a u/ω in $D - \mathfrak{F}D - \sum_1^{\nu}{}_h \mathfrak{V}_{\mu+h}$ e a zero in $\mathfrak{V}_i$, riesce continua in tutto D, allora si può prendere p grande a piacere e quindi si può supporre che sia $c(P) < \alpha(n-2-\alpha)/\delta^2$ con $\alpha < n-2$.

2. Consideriamo ora convergenza puntuale, anziché in media. Sia A un campo limitato dell'S_n ($n \geq 3$). Sulla $\mathfrak{F}A$ fissiamo addirittura una infinità numerabile di varietà regolari prive due a due di punti comuni, $\mathfrak{V}_i$, $i = 1, 2, \cdots$,

e supponiamo che $\mathfrak{V}_i$ abbia dimensione q_i $(0 < q_i \leq n-2)$. Associamo ad ogni $\mathfrak{V}_i$ un numero positivo α_i in modo che la serie $\sum_1^\infty{}_i \alpha_i$ sia convergente, e indichiamo, come precedentemente, con r_i la distanza $\overline{PM}_i$ essendo P un punto di A ed M_i un punto di $\mathfrak{V}_i$; sia poi δ un numero $>$ del diametro di A; a, b, ϵ, tre numeri positivi per cui sia

$$0 < a \leq \epsilon + \frac{\pi r_i}{2\delta} \leq b < \frac{\pi}{2}$$

al variare di P in A, di M_i su $\mathfrak{V}_i$ e per $i = 1, 2, \cdots$. Poniamo

$$\omega(P) = \sum_1^\infty{}_i \alpha_i \int_{\mathfrak{V}_i} \operatorname{sen}\left(\epsilon + \frac{\pi r_i}{2\delta}\right) \frac{d\mathfrak{V}_i}{r_i^{n-2}}. \tag{3'}$$

Sussiste la seguente proposizione:

II. *Se* $u(P)$ *è soluzione di* (2) *in* A, *se*

$$\lim_{\substack{P \to P_0 \\ P \quad A}} \frac{u(P)}{\omega(P)} = 0$$

per ogni punto P_0 *di* $\mathfrak{F}A$, *e se*

$$c(P) < \frac{\pi^2}{4\delta^2} + \frac{(n-3)\pi}{2\delta\omega(P)} \sum_1^\infty{}_i \alpha_i \int_{\mathfrak{V}_i} \cos\left(\epsilon + \frac{\pi r_i}{2\delta}\right) \frac{d\mathfrak{V}_i}{r_i^{n-1}}, \tag{5}$$

allora è $u(P) \equiv 0$.

Per la dimostrazione basta ripetere il ragionamento di cui si è val o Picone nel caso che per ogni i sia $q_i = 0$ [7].

Poiché la funzione $v(P) = u(P)/\omega(P)$ è continua in $A + \mathfrak{F}A$ e nulla su $\mathfrak{F}A$, avendosi

$$\Delta v + \frac{2}{\omega} \sum_1^n{}_k \frac{\partial\omega}{\partial x_k} \frac{\partial v}{\partial x_k} + \left(\frac{\Delta\omega}{\omega} + c\right) v = 0,$$

basta provare che

$$\frac{\Delta\omega}{\omega} + c < 0 \qquad \text{in} \quad A,$$

e ciò avviene se la $c(P)$ soddisfa la limitazione (5) perché la serie (3'), e quelle che da essa si deducono derivando termine a termine, sono uniformemente convergenti in ogni dominio contenuto in A, ed è

$$\Delta\omega = -\frac{\pi^2}{4\delta^2}\omega(P) - \frac{(n-3)\pi}{2\delta} \sum_1^\infty{}_i \alpha_i \int_{\mathfrak{V}_i} \cos\left(\epsilon + \frac{\pi r_i}{2\delta}\right) \frac{d\mathfrak{V}_i}{r_i^{n-1}}.$$

Volendo ora istituire un confronto tra questi risultati e la proposizione di Picone, basta ricordare che sotto opportune ipotesi di rego-

(7) Cfr. il lavoro citato in (2).

larità per la varietà limitata $\mathfrak{V}$, p-dimensionale ($p \leq n-2$), la funzione potenziale

$$\int_{\mathfrak{V}} \frac{f(M)}{[r(P,M)]^{n-2}}\, d\mathfrak{V},$$

dove $f(M)$ è una funzione continua e positiva, soddisfa le limitazioni [8]

$$\frac{a}{[r(P,\mathfrak{V})]^{n-2-p}} < \int_{\mathfrak{V}} \frac{f(M)}{[r(P,M)]^{n-2}}\, d\mathfrak{V} < \begin{cases} \dfrac{b}{[r(P,\mathfrak{V})]^{n-2-p}} & \text{per } p < n-2 \\ -b \lg r(P,\mathfrak{V}) & \text{per } p = n-2, \end{cases}$$

a e b essendo due certe costanti positive. Pertanto quando il punto P di A tende a un punto M di una $\mathfrak{V}_i$ della $\mathfrak{F}A$, il comportamento della funzione da noi indicata con $\omega(P)$ e quello della funzione $[\tau_i(P)]^{-\alpha_i}$ considerata da Picone è il medesimo se α_i si prende $= 1$ (anzichè < 1) per $q_i = 2-n$, ed $= n-2-q_i$ (anzichè $< n-2-q_i$) per $q_i < n-2$. La proposizione provata è quindi più ampia di quella di Picone. Contemporaneamente noi otteniamo una limitazione superiore *positiva* per la $c(P)$, in tutto analoga a quella data da Picone nel caso che per ogni i sia $q_i = 0$, la quale assicura l'unicità della soluzione.

Calcolo delle variazioni. — *Traiettorie luminose in uno spazio trasparente. – Esistenza di regioni non illuminate da una sorgente luminosa puntiforme*(*). Nota di FERNANDO BERTOLINI, presentata (**) dal Socio M. PICONE.

Nei suoi *Fondamenti di Calcolo delle Variazioni* L. Tonelli dimostra un teorema d'esistenza del minimo per il funzionale $J(P) = \int_L f(P)\, ds$, in una classe di curve rettificabili, con $f(P)$ continua e non negativa in un dominio limitato, nulla al più in un numero finito di punti, nell'ipotesi di un comportamento particolare (detto *regolare*) di $f(P)$ nelle vicinanze di questi punti (cfr. L. Tonelli, op. cit., vol. II, p. 56).

Ora, l'ipotesi della continuità di $f(P)$ è sovrabbondante, e può esser rimpiazzata in ogni caso con quella della limitatezza ed infercontinuità (1) di $f(P)$; l'ipotesi del comportamento regolare può esser rimossa, ma a patto di aggiungere alla classe delle curve rettificabili considerate altre curve, non rettificabili, che ho detto *quasi rettificabili*, per le quali il funzionale $J(L)$

8 Cfr. per esempio l'articolo di G. GIRAUD in ASCOLI, BURGATTI, GIRAUD, *Equazioni alle derivate parziali dei tipi ellittico e parabolico*, Firenze, 1936, p. 149.

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto Nazionale per le Applicazioni del Calcolo.

(**) Nella seduta del 10 gennaio 1953.

(1) O semicontinuità inferiore.

può esser definito; anche l'ipotesi della limitatezza del dominio di definizione di $f(P)$ può esser rimossa (come aveva del resto osservato lo stesso Tonelli), dovendo però allora supporsi uno speciale comportamento all'infinito per la funzione $f(P)$.

Sia $f(P)$ una funzione infercontinua e non negativa in un continuo T, eventualmente privato dei punti $P_1, P_2, \cdots, P_\nu$, limitata in ogni parte di T che sia chiusa e non contenga $P_1, P_2, \cdots, P_\nu$, verificante la relazione $f(P) \geq g(\overline{OP})$, dove $g(t)$ è una funzione continua e non negativa nell'intervallo $(0, \infty)$, ivi non sommabile. Sia Γ^* la classe delle curve continue tracciate in T, di cui sia rettificabile ogni arco che non contenga alcuno dei punti $P_1, P_2, \cdots, P_\nu$ (curve *quasi-rettificabili*): queste curve si intendono assegnate mediante un'equazione parametrica $P = O + a(t)$ $(0 \leq t \leq 1)$, dove $a(t)$ è una funzione vettoriale continua ed, in ogni intervallo chiuso che escluda i valori di t corrispondenti eventualmente ai punti $P_1, \cdots, P_\nu$, a variazione limitata.

Su ogni curva rettificabile $L \in \Gamma^*$ è definito l'integrale $J(L) = \int_L f(P)\, ds =$

$= \int_0^1 f[O + a(t)] \left| da(t) \right|$ [2], e questa definizione si estende a tutte le curve di Γ^*, ponendo $J(L) = \int_L f(P)\, ds = \int_0^1 f[O + a(t)] \left| da(t) \right|$ eguale all'estremo superiore dei valori $\sum_{k=1}^{n} J(C_k)$, dove $C_1, C_2, \cdots, C_n$ sono archi arbitrari (ed in numero arbitrario) rettificabili di L, presi in modo che corrispondano ad intervalli dell'asse t mutuamente privi di punti interni comuni [3].

Riferiremo ogni curva $L \in \Gamma^*$ ad un parametro *canonico* σ, definito come segue:

$$\sigma(t) = \int_0^t f[O + a(\tau)] \left| da(\tau) \right| / J(L) \quad \text{per} \quad J(L) \neq 0$$

$$\sigma(t) = t \quad \text{per} \quad J(L) = 0,$$

e diremo $P = O + \alpha(\sigma)$ la corrispondente equazione parametrica.

Ciò premesso, diremo *chiusa* ogni classe Γ di curve $L \in \Gamma^*$ la quale contenga ogni curva rappresentata da una funzione $\alpha(\sigma)$ verso cui converga uniformemente una successione $\{\alpha_n(\sigma)\}$ di funzioni rappresentanti *canonicamente* curve di Γ.

Si dimostrano allora i teoremi seguenti:

I. *Il funzionale $f(P)$ è infercontinuo nella classe Γ^*, con la metrica lagrangiana.*

(2) Si tratta di un integrale del tipo Lebesgue-Stieltjes.

(3) Si tratta dunque di un integrale «improprio» del tipo Lebesgue-Stieltjes.

II. *Se è* $f(P) > 0$ *in* $T - P_1 - \cdots - P_\nu$, *allora il funzionale* $J(L)$ *ha minimo in ogni classe chiusa di curve di* Γ^* *aventi dall'origine distanza non superiore ad un fissato numero* H.

Se è $f(P) > 0$ *in* T, *allora il funzionale* $J(L)$ *ha minimo in ogni classe chiusa di curve rettificabili di* Γ^*, *aventi dall'origine distanza non superiore ad un fissato numero* H.

Se rinunciassimo all'ipotesi $f(P) \geq g(\overline{OP})$, T essendo illimitato, non si potrebbe più affermare l'esistenza del minimo con la generalità del teorema II, potendo accadere che l'estremo inferiore del funzionale venga rappresentato *solo* dall'integrale $\int_L f(P)\,ds$ esteso ad una curva *passante per il punto all'infinito* (per così dire), ossia sconnessa ed illimitata, non appartenente quindi alla classe considerata. Ciò accade per esempio se è $f(P) = OP^\alpha$ con $\alpha < -2$, e la classe Γ è l'insieme delle curve quasi rettificabili congiungenti due punti P_1 e P_2 (distinti da O) per cui sia $|1 + \alpha|\, P_1\widehat{O}P_2 \geq \pi$ [4]. Nell'esempio seguente, la funzione $f(P)$ è continua.

Nello spazio ordinario, istituiamo un sistema di coordinate polari di polo in O, raggio vettore ρ, e colatitudine φ. Poniamo

$$f(P) \equiv 1 \quad \text{per} \quad \rho \leq 1 \text{ e per } \pi \geq \varphi \geq \frac{\pi}{2},$$

$$f(P) = \rho^{-5} \quad \text{per} \quad \rho \geq \sigma = \sqrt{(2+\sqrt{3})/3} \quad , \quad 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{3},$$

$$f(P) \equiv \sigma^{-5} - 5\sigma^{-6}(\rho - \sigma) - \left[\frac{5\sigma^{-6}}{\sigma - 1} + \frac{\sigma^{-5} - 1}{(\sigma-1)^2}\right](\rho - \sigma)^2 -$$

$$- \left[\frac{5\sigma^{-6}}{(\sigma-1)^2} + 2\,\frac{\sigma^{-5}-1}{(\sigma-1)^3}\right](\rho - 1)(\rho - \sigma)^2$$

$$\text{per} \quad 1 \leq \rho \leq \sigma \quad , \quad 0 \leq \varphi \leq \pi/3\,;$$

daremo poi a $f(P)$ un valore arbitrario in tutti gli altri punti dello spazio, il cui insieme chiamiamo A.

Orbene, tutte le estremali del funzionale $\int_L f(P)\,ds$ che escono dal punto P_0 di coordinate polari $\rho = 2 + \sqrt{3}$, $\varphi = 0$ non hanno in Ā alcun punto: di conseguenza, il funzionale $\int_L f(P)\,ds$ non può aver minimo nella classe delle curve rettificabili congiungenti il punto P_0 con un punto arbitrario di Ā.

La ricerca del minimo del funzionale $J(L)$ (nel caso che il dominio di definizione di $f(P)$ sia l'intero spazio) può interpretarsi come la ricerca della traiettoria luminosa in un mezzo di cui $f(P)$ rappresenti l'indice di rifrazione: nell'esempio ora riferito, una sorgente luminosa puntiforme posta in P_0 lascerebbe all'oscuro l'insieme A.

(4) Cfr. la mia Nota *Studio del funzionale* $\int_L \rho^\alpha\,ds$ in corso di pubblicazione.

Geometria. — *Alcune osservazioni sul confronto tra connessioni affini e metriche riemanniane.* Nota di ALDO COSSU, presentata (*) dal Socio E. BOMPIANI.

In questa Nota (1) si confronta una generica connessione affine con una generica metrica riemanniana supposte definite su una stessa varietà regolare.

Si determinano mediante questo confronto configurazioni o corrispondenze invarianti allorquando si ricercano quegli enti, già definiti dalla metrica, che vengono conservati in relazione alla generica connessione.

Si riesce in questo modo a caratterizzare geometricamente classi ben note di connessioni affini.

1. CONNESSIONI EUCLIDEE. – Sia X_n una varietà n–dimensionale regolare e su di essa si consideri una connessione affine asimmetrica di parametri $L^k_{ih}(x)$ $(i, h, k = 1, 2, \cdots, n)$ ed una generica metrica determinata dal tensore doppio covariante simmetrico $g_{hk}(x)$ di rango n.

Indichiamo inoltre con $S^{\cdot\cdot i}_{hk} = L^i_{[hk]}$ il tensore di torsione della connessione e con G^i_{hk} i simboli di Christoffel di seconda specie relativi alla forma quadratica $g_{hk}\,dx^h\,dx^k$.

Come è notissimo la connessione di parametri L^i_{hk} dicesi *euclidea* rispetto al tensore g_{hk} allorquando il modulo di un qualunque vettore, fatto secondo la metrica determinata da g_{hk}, si conserva nel trasporto per equipollenza (2) determinato dalla supposta connessione.

Posto

$$L^i_{hk} = G^i_{hk} + T^{\cdot\cdot i}_{hk}, \tag{1.1}$$

la condizione necessaria e sufficiente affinché la connessione sia euclidea rispetto a g_{hk} è data dalle

$$T^{\cdot\cdot t}_{rh}\, g_{kt} + T^{\cdot\cdot t}_{rk}\, g_{ht} = 0. \tag{2.1}$$

Si ha quindi che le (1.1) si possono scrivere tenendo conto delle (2.1), secondo le

$$L^i_{hk} = G^i_{hk} + 2\,S^{\cdot\cdot t}_{r(h}\, g_{k)t} + S^{\cdot\cdot i}_{hk}. \tag{3.1}$$

Il Bompiani (3) ha dimostrato che la più generale connessione affine avente come autoparallele le geodetiche della metrica determinata da g_{hk} e tale che risulti euclidea rispetto al suddetto tensore è del tipo

$$L^i_{hk} = G^i_{hk} + S^{\cdot\cdot i}_{hk}, \tag{4.1}$$

(*) Nella seduta del 13 dicembre 1952.

(1) Questa Nota è stata suggerita dalla Nota di E. BOMPIANI, *Connessioni affini e geometria riemanniana*. « Rend. di Mat. », vol. X, ser. V, fasc. 3-4, pp. 391-405 (1951).

(2) Si ricorda che un vettore ξ^r applicato in x si trasporta per equipollenza nel vettore $\xi^i - L^i_{hk}\,\xi^k\,dx^h$ applicato in $x + dx$.

(3) Cfr. la Nota cit. nella (1).

ove $S_{hk}^{\cdot\cdot i}$ soddisfa le

$$S_{rh}^{\cdot\cdot t} g_{kt} + S_{rk}^{\cdot\cdot t} g_{ht} = 0, \tag{5.1}$$

Le (5.1), sempre secondo il Bompiani, si possono interpretare nel seguente modo.

Considerate le (5.1) nel punto $\underset{\circ}{x}$ della X_n, in relazione ad ogni spostamento dx^r, si consideri il tensore

$$\alpha_{hk}(dx) = S_{rh}^{\cdot\cdot t} g_{kt} dx^r.$$

Indicate allora con ξ^i e η_j rispettivamente le coordinate proiettive omogenee di punto e di iperpiano in uno spazio proiettivo $(n-1)$–dimensionale le

$$\rho \eta_h = \alpha_{hk} \xi^k,$$

ρ fattore di proporzionalità, rappresentano una reciprocità. Per le (5.1) tale reciprocità è un sistema nullo.

Si osservi però che le (5.1) si possono interpretare geometricamente in modo più suggestivo in relazione alla metrica, mostrando che esse esprimono che *la direzione di torsione* [4] *di una generica faccetta piana è sempre trasversale (normale), rispetto alla supposta metrica, alla faccetta stessa e viceversa.*

Si consideri infatti la generica faccetta piana per $\underset{\circ}{x}$ determinata dalle direzioni dx^h, δx^k; se la direzione di torsione è trasversale alla facetta deve aversi

$$S_{rh}^{\cdot\cdot t} g_{kt} dx^r dx^h dx^k = 0 \quad , \quad S_{rh}^{\cdot\cdot t} g_{kt} \delta x^r dx^h dx^k = 0;$$

se le precedenti sono verificate qualunque sia dx^r e δx^h, si ottengono le (5.1) e viceversa.

Segue inoltre che *condizione necessaria e sufficiente affinché una connessione euclidea rispetto alla forma quadratica* $g_{hk} dx^h dx^k$ *abbia come autoparallele le geodetiche relative alla suddetta metrica è che la direzione di torsione di una generica faccetta piana sia a questa trasversale.*

Si noti inoltre che in tal caso non soltanto la connessione asimmetrica ha come autoparallele le geodetiche della metrica, ma per di più la connessione simmetrica associata alla supposta connessione asimmetrica coincide con la connessione di parametri G_{hk}^{i}.

2. Confronto tra una generica connessione ed una generica metrica. – Si consideri ancora una generica connessione asimmetrica di parametri L_{hk}^{i} e la generica metrica determinata dal tensore g_{hk}. Siano ξ^i e η^i due vettori controvarianti applicati in un punto $\underset{\circ}{x}$ della X_n; il loro prodotto n-

(4) Come è noto, assegnate per un punto $\underset{\circ}{x}$ due direzioni dx^h, δx^k, si consideri la faccetta piana da esse determinata, è facile provare che la direzione del vettore $S_{hk}^{\cdot\cdot i} dx^h \delta x^k$ non varia al variare delle due direzioni nella faccetta. La suddetta direzione prende il nome di *direzione di torsione* relativa alla faccetta.

terno, fatto secondo la suddetta metrica, si conserva nel trasporto relativo alla connessione data, da $\overset{0}{x}$ a $\overset{0}{x} + dx$ se è verificata la

$$\mathrm{T}^{\cdot\cdot i}_{r(h}\, g_{k)t}\, \xi^h\, \eta^k\, dx^r = 0. \tag{1.2}$$

Per interpretare geometricamente le (2.1) si osservi che, fissato il sistema di differenziali dx^r, rimane determinato in relazione ad esso il tensore doppio covariante simmetrico

$$a_{hk}(dx) = \mathrm{T}^{\cdot\cdot i}_{r(h}\, g_{k)t}\, dx^r. \tag{2.2}$$

Posto allora

$$\rho\, \eta_h = a_{hk}\, \overset{0}{\xi}{}^k \tag{3.2}$$

con ρ fattore di proporzionalità, se si interpretano le $\overset{0}{\xi}{}^k$ e le η_h rispettivamente come coordinate omogenee di direzione e di $(n-1)$–direzione nella stella di centro $\overset{0}{x}$, le (3.2) rappresentano una polarità. Si può quindi concludere che *il prodotto interno di due vettori si conserva nello spostamento da* $\overset{0}{x}$ *a* $\overset{0}{x}+dx$ *se e soltanto se le loro direzioni sono coniugate nella polarità* (3.2).

In relazione quindi ad ogni sistema di differenziali dx^r, o spostamento, si ha, in generale, il conò quadrico di ∞^{n-2} direzioni, fondamentale della polarità (3.2), di equazione

$$a_{hk}(dx)\, \delta x^h\, \delta x^k = 0 \tag{4.2}$$

le cui direzioni sono relative a quei vettori per i quali si conserva il modulo nel trasporto da $\overset{0}{x}$ a $\overset{0}{x} + dx$. Se per di più la direzione determinata dal sistema differenziale dx^r coincide con quella di uno dei vettori per cui si conserva il modulo, deve aversi

$$\mathrm{T}_{(rh}^{\cdot\cdot\cdot i}\, g_{k)t}\, dx^r\, dx^h\, dx^k = 0. \tag{5.2}$$

La (5.2) può interpretarsi nella stella delle direzioni di centro $\overset{0}{x}$ come il cono cubico delle ∞^{n-2} direzioni di quei vettori per ciascuno dei quali si conserva il modulo in relazione allo spostamento determinato dalla propria direzione.

Si osservi che, posto

$$\Psi^{\cdot\cdot i}_{hk} = \mathrm{T}^{\cdot\cdot i}_{(hk)} = \Gamma^i_{hk} - \mathrm{G}^i_{hk} \tag{6.2}$$

ove con Γ^i_{hk} si sono indicati i parametri della connessione simmetrica associata a quella di parametri L^i_{hk}, la (5.2) si può anche scrivere secondo la

$$\Psi^{\cdot\cdot i}_{(rh}\, g_{k)t}\, dx^r\, dx^h\, dx^k = 0. \tag{7.2}$$

Cioè il cono (5.2) relativo alla connessione asimmetrica coincide con l'analogo cono relativo alla sua simmetrica associata.

Introdotto il vettore covariante

$$\mu_r = \mathrm{T}^{\cdot\cdot i}_{(rh}\, g_{k)t}\, \overset{0}{\xi}{}^h\, \overset{0}{\xi}{}^k, \tag{8.2}$$

ove $\overset{0}{\xi}{}^h$ è un generico vettore controvariante, gli spostamenti dx^r in relazione ai quali il suddetto vettore conserva il modulo sono quelli soddisfacenti la

$\mu_r\, dx^r = 0$. Le (8.2) interpretandole come al solito, nella stella delle direzioni di centro $\overset{\circ}{x}$, dànno luogo ad una corrispondenza quadratica tra le direzioni dei vettori ξ^h e le $(n-1)$–direzioni dei vettori μ_r, le ∞^{n-2} direzioni parallele a μ_r essendo quelle relative a spostamenti per i quali i vettori ξ^h conservano il modulo. Si noti infine che per la (8.2) ad una assegnata $(n-1)$–direzione corrispondono, in generale, 2^{n-2} direzioni ξ^h.

Si riprenda in esame il tensore (2.2), posto

$$(9.2) \qquad b_{hk}(dx) = \Psi^{\cdot\cdot}_{r(h}{}^{i}\, g_{k)t}\, dx^r \quad , \quad c_{hk}(dx) = S^{\cdot\cdot}_{r(h}{}^{i}\, g_{k)t},$$

si ha che

$$(10.2) \qquad a_{hk} = b_{hk} + c_{hk}.$$

Se si ha quindi che ξ^h soddisfa contemporaneamente le

$$(11.2) \qquad a_{hk}\,\xi^h\,\xi^k = b_{hk}\,\xi^h\,\xi^k = 0$$

allora

$$(12.2) \qquad c_{hk}\,\xi^h\,\xi^k = 0.$$

Cioè *se il modulo del vettore ξ^h vien conservato nel trasporto da $\overset{\circ}{x}$ a $\overset{\circ}{x}+dx$ sia rispetto alla connessione asimmetrica data, sia rispetto alla sua simmetrica associata, la direzione di torsione della faccetta piana individuata dal vettore ξ^h e dallo spostamento dx^r è trasversale al vettore ξ^h*; ma non viceversa. Infatti se è verificata la (12.2) si ha $a_{hk}\,\xi^h\,\xi^k = b_{hk}\,\xi^h\,\xi^k$ il cui significato geometrico è evidente.

Più in particolare si ha che *condizione necessaria e sufficiente affinché una generica faccetta piana applicata in $\overset{\circ}{x}$ abbia la direzione di torsione trasversale è che per ogni vettore per cui si conserva il modulo nel trasporto secondo la connessione data da $\overset{\circ}{x}$ al generico $\overset{\circ}{x}+dx$, si conservi il modulo anche secondo la connessione simmetrica associata.* In tal caso si ha sempre $a_{hk} = b_{hk}$.

3. Su una particolare classe di connessioni determinata da una metrica riemanniana. – Si riprenda in esame il tensore (2.2) e si supponga che esso sia della forma

$$(1.3) \qquad a_{hk}(dx) = \varphi_n\, dx^r\, \gamma_{hk}$$

ove φ_r è un vettore covariante e γ_{hk} un tensore doppio covariante simmetrico.

In tal caso la polarità (3.2) è ovviamente indipendente dallo spostamento dx^r.

Si osservi inoltre che *in relazione ad ogni spostamento dx^r determinante una direzione parallela alla giacitura del vettore φ_r ($\varphi_r\, dx^r = 0$) si conserva il modulo di un generico vettore, o il prodotto interno di una generica coppia di vettori.* Questa proprietà è sufficiente a caratterizzare geometricamente connessioni soddisfacenti le

$$(2.3) \qquad T^{\cdot\cdot}_{r(h}{}^{i}\, g_{k)t} = \varphi_r\, \gamma_{hk}.$$

Si ha quindi che *la più generale connessione di parametri Γ^i_{hk} che conserva il modulo di un qualunque vettore secondo la metrica definita dalla*

forma g_{hk} in relazione ad ogni spostamento (da x a $x+dx$) determinante una direzione parallela ad una assegnata giacitura (funzione di x) è data da

$$(3.3) \qquad L^{i}_{hk} = G^{i}_{hk} + S^{\cdot\cdot i}_{hk} + 2\,[S^{\cdot\cdot t}_{r(h}\, g_{k)t} + \varphi_{(h}\,\gamma_{k)r}]\, g^{ri} - \varphi_r\, g^{ri}\,\gamma_{hk}$$

ove φ_r è un arbitrario vettore covariante avente la giacitura assegnata e γ_{hk} un arbitrario vettore doppio covariante simmetrico.

La giacitura del vettore φ_r si potrà denominare *giacitura degli spostamenti euclidei.*

Dalle (1.3) segue ancora che per i vettori ξ^h soddisfacenti la

$$(4.3) \qquad \gamma_{hk}\,(\overset{\circ}{x})\,\xi^h\,\xi^k = 0$$

si conserva il modulo nel trasporto, secondo la connessione (3.3), da $\overset{\circ}{x}$ a $\overset{\circ}{x}+dx$, con dx generico.

Si è già visto che la parte principale dell'incremento subìto dal modulo di un vettore ξ^h nel trasporto, secondo una generica connessione, dal punto $\overset{\circ}{x}$ a $\overset{\circ}{x}+dx$ è dato da

$$(5.3) \qquad \Delta\,(g_{hk}\,\xi^h\,\xi^k) = 2\,T^{\cdot\cdot t}_{r(h}\, g_{k)t}\,\xi^h\,\xi^k\,dx^r.$$

Il rapporto tra l'incremento (5.3) ed il modulo del vettore in $\overset{\circ}{x}$ è dato quindi dall'invariante infinitesimo

$$(6.3) \qquad \frac{\Delta\,(g_{hk}\,\xi^h\,\xi^k)}{g_{hk}\,\xi^h\,\xi^k} = \frac{2\,T^{\cdot\cdot t}_{r(h}\, g_{k)t}\,\xi^h\,\xi^k\,dx^r}{g_{hk}\,\xi^h\,\xi^k}$$

che dipende, in generale, dallo spostamento dx^r e dalla direzione del vettore ξ^h (5).

Si noti però che, in generale, per ogni assegnato spostamento dx^r, esistono ∞^1 direzioni dx^h di vettori in relazione ai quali si ha lo stesso invariante (6.3).

Posto infatti quest'ultimo eguale a $\psi_r\,dx^r$ si ha che le direzioni δx_r devono soddisfare l'espressione

$$(7.3) \qquad (2\,T^{\cdot\cdot t}_{r(h}\, g_{k)t} - \psi_r\, g_{hk})\,dx^r\,dx^h\,dx^k = 0.$$

La (7.3) può interpretarsi nella stella delle direzioni di centro $\overset{\circ}{x}$ in questo modo. Si consideri il cono (4.2) relativo allo spostamento dx^r ed il cono isotropo $g_{hk}\,\delta x^h\,\delta x^k = 0$ relativo alla nostra metrica, il cono (7.3) appartiene al fascio determinato da essi.

È necessario notare però che il fascio in questione varia, in generale, al variare dello spostamento dx^r. Per una connessione invece del tipo (3.3) esso è indipendente dallo spostamento ed ha come cono quadrico base oltre al cono isotropo, il cono $\gamma_{hk}\,\delta x^h\,\delta x^k = 0$.

(5) Usufruendo dell'invariante (6.3), la connessione per cui $c_{hk} = 0$ (cfr. n. 2) è caratterizzata dal fatto che l'invariante (6.3) coincide con quello relativo alla connessione simmetrica associata alla data.

4. CONNESSIONI METRICHE. – Fra le connessioni del tipo (3.3) si può caratterizzarne una ben nota imponendo la condizione che l'invariante (6.3) sia indipendente dalla direzione del vettore che si trasporta. Affinché ciò avvenga deve aversi

$$\gamma_{rs}\,\xi^r\,\xi^s = \tau\, g_{hk}\,\xi^r\,\xi^s \tag{1.4}$$

per qualunque vettore ξ^r. Posto allora $\psi_r = \tau\varphi_r$ le (2.3) si scrivono secondo le

$$T^{\cdot\cdot t}_{r(h}\, g_{k)t} = \psi_r\, g_{hk} \tag{2.4}$$

e di conseguenza le (3.3) assumono la forma

$$L^i_{hk} = G^i_{hk} + S^{\cdot\cdot i}_{hk} + 2\, S^{\cdot\cdot t}_{r(h}\, g_{k)t}\, g^{ri} + 2\,\delta^i_{(h}\,\psi_{k)} - \psi_r\, g^{ri}\, g_{hk}\,. \tag{3.4}$$

Le (3.4) dovute a Schouten sonò, come è noto, i parametri della più generale connessione *metrica*, rispetto al tensore g_{hk}. Per una connessione del suddetto tipo vien conservato l'angolo di una coppia qualunque di vettori.

Si può quindi dire che *condizione necessaria e sufficiente affinché una connessione sia metrica rispetto al tensore* g_{hk} *è che l'invariante* (6.3) *sia indipendente dalla direzione del vettore* ξ^r.

Segue inoltre dalle (2.4) che se una connessione è metrica rispetto a g_{hk} i vettori che conservano il loro modulo in relazione ad un qualunque spostamento sono isotropi (cioè a modulo nullo) e viceversa.

Si consideri il caso di una connessione metrica rispetto a g_{hk} la cui connessione simmetrica associata sia pur essa metrica rispetto allo stesso tensore.

Per essa devono valere oltre alle (2.4) anche le

$$\psi^{\cdot\cdot t}_{r(h}\, g_{k)t} = \sigma_r\, g_{hk}\,. \tag{4.4}$$

Sottraendo dalle (2.4) le (4.4) si hanno le

$$S^{\cdot\cdot t}_{r(h}\, g_{k)t} = (\psi_r - \sigma_r)\, g_{hk}\,. \tag{5.4}$$

Moltiplicando le (5.4) prima per g^{hk} e sommando si ottiene

$$\Phi_r = n\,(\psi_r - \sigma_r)$$

ove $\Phi_r = S^{\cdot\cdot t}_{rt}$ è il vettore di Einstein, moltiplicando invece la (5.4) per g^{rh} e sommando si ha

$$\Phi_k = \sigma_k - \psi_k$$

in definitiva quindi si ricava

$$\Phi_k = \psi_k - \sigma_k = 0.$$

Concludendo, se per una connessione metrica rispetto al tensore g_{hk} la connessione simmetrica associata è pur essa metrica rispetto allo stesso tensore, la direzione di torsione di una generica faccetta piana è trasversale alla faccetta ed inoltre i vettori degli spostamenti euclidei delle due connessioni coincidono ($\psi_k = \sigma_k$), o in altre parole, il vettore di Einstein è identicamente nullo.

Si prenda ancora in esame la connessione (3.4), se essa ha come autoparallele le geodetiche della metrica determinata dalla forma $g_{hk}\,dx^h\,dx^k$ deve aversi

$$\psi_{hk}^{\cdot\cdot i} = \delta_h^i\,\eta_k + \delta_k^i\,\eta_h$$

con η_k vettore covariante. Per le (2.4) si ha allora

$$S_{r\,(h}^{\cdot\cdot t}\,g_{k)\,t} = (\psi_r - \eta_r)\,g_{hk} - \eta_{(h}\,g_{k)r} \tag{6.4}$$

e quindi

$$\psi_r = 2\,\eta_r = \frac{2}{n-1}\,\Phi_r .$$

Le (6.4) si scrivono di conseguenza secondo le

$$S_{r\,(h}^{\cdot\cdot t}\,g_{k)\,t} = \frac{1}{n-1}\,[\Phi_r\,g_{hk} - \Phi_{(h}\,g_{k)r}]. \tag{7.4}$$

Si ha quindi che *i parametri della più generale connessione metrica rispetto a* g_{hk} *avente come autoparallele le geodetiche della metrica determinata da* g_{hk} *sono*

$$L_{hk}^i = G_{hk}^i + S_{hk}^{\cdot\cdot i} + \frac{1}{n-1}\,(\delta_h^i\,\Phi_k + \delta_k^i\,\Phi_h) \tag{8.4}$$

ove come al solito $S_{hk}^{\cdot\cdot i}$ *è alternante rispetto ad h, k e soddisfa le* (7.4)

Segue anche subito che *una connessione metrica rispetto a* g_{hk} *ed avente come autoparallele le geodetiche della metrica determinata da* g_{hk} *è necessariamente euclidea se il vettore di Einstein è nullo.*

Per determinare un'interpretazione geometrica delle (7.4) si consideri il tensore

$$H_{hk}^{\cdot\cdot i} = S_{hk}^{\cdot\cdot i} + \frac{1}{n-1}\,\delta_{[h}^i\,\Phi_{k]}$$

costruito a partire dal tensore di torsione della connessione asimmetrica L_{hk}^i; esso, come è noto [6], è il tensore di torsione della connessione

$$P_{hk}^i = L_{hk}^i - \frac{2}{n-1}\,\Phi_h\,\delta_k^i \tag{9.4}$$

trasformata della L_{hk}^i mediante una delle trasformazioni (T_p) che conservano il parallelismo delle direzioni ed intrinsecamente determinata dalla L_{hk}^i

Sostituendo le (9.4) nelle (8.4) si ha

$$P_{hk}^i = G_{hk}^i + H_{hk}^{\cdot\cdot i}$$

ove $H_{hk}^{\cdot\cdot i}$ per le (7.4) soddisfa le

$$H_{r\,(h}^{\cdot\cdot t}\,g_{k)\,t} = 0. \tag{10.4}$$

Si conclude quindi che *condizione necessaria e sufficiente affinché la connessione di parametri* L_{hk}^i *metrica rispetto a* g_{hk}, *abbia come autoparallele le geodetiche della metrica determinata dal suddetto tensore, è che la connessione* P_{hk}^i *sia euclidea e che la direzione di torsione, relativa a quest'ultima, di una qualunque faccetta piana sia trasversale alla faccetta stessa.*

(6) Cfr. E. BORTOLOTTI, *Geometria delle varietà a connessione affine*. «Ann. di Mat.», ser. IV, to. VIII (1930-31).

Meccanica. — *Nuovi complementi analitici e numerici allo studio delle aste vibranti*(*). Nota I(**) di DOMENICO CALIGO, presentata dal Socio G. KRALL.

1. Nella presente Nota I e in una II si calcolano gli autovalori (le frequenze) e alcuni integrali occorrenti alla loro determinazione nel problema delle aste libere ad un estremo e con incastro elastico all'altro. Viene così esaurito lo studio sulle aste vibranti non omogenee che ci eravamo proposti, trattando – in due precedenti Note – il caso degli estremi liberi e, rispettivamente, di un incastro rigido (1).

Per facilitare l'uso dei simboli adottati e delle relazioni, qui stabilite, riepiloghiamo brevemente l'impostazione del problema (2).

a) Il modulo di elasticità, il momento di inerzia della sezione resistente, le masse e le forze perturbanti per unità di lunghezza saranno indicate, rispettivamente, con $E, \mathfrak{J}, \mu, q$; l'asta sia di lunghezza L; le soluzioni per le vibrazioni trasversali abbiano la forma $w(x,t) = \overline{w}(x)\, e^{i\nu t}$, nell'ipotesi che l'azione perturbante sia armonica, di frequenza ν, del tipo $q(x,t) = q(x)\, e^{i\nu t}$, $(i = \sqrt{-1})$.

L'equazione dinamica dell'asta

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(E\mathfrak{J}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) + \mu(x)\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = q(x,t)$$

si riduce allora all'equazione nella sola variabile indipendente x

$$(1) \qquad \frac{d^2}{dx^2}\left(E\mathfrak{J}\frac{d^2\overline{w}}{dx^2}\right) - \nu^2\mu(x)\overline{w}(x) = q(x) \quad , \quad (0 \leq x \leq L),$$

con le condizioni:

all'estremo libero:

$$E\mathfrak{J}\frac{d^2\overline{w}}{dx^2} = 0 \quad , \quad \frac{d}{dx}\left(E\mathfrak{J}\frac{d^2\overline{w}}{dx^2}\right) = 0,$$

all'incastro:

$$\frac{d\overline{w}}{dx} = 0 \quad , \quad \overline{w}(x) = 0,$$

all'estremo con incastro elastico:

$$E\mathfrak{J}\frac{d^2\overline{w}}{dx^2} - k\frac{d\overline{w}}{dx} = 0 \quad , \quad \overline{w}(x) = 0,$$

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto Nazionale per le Applicazioni del Calcolo.

(**) Pervenuta all'Accademia il 15 settembre 1952.

(1) D. CALIGO, *Complementi analitici e numerici allo studio delle aste vibranti*. «Rend. Acc. Naz. Lincei», ser. VIII, vol. XII, fasc. 1 e 3, pp. 76–83 e 277–285 (1952).

(2) Per maggiori dettagli si veda, ad esempio G. KRALL, *Meccanica tecnica delle vibrazioni*. (Zanichelli, Bologna, 1940), vol. II, cap. XIII.

k essendo una costante positiva, fornita dal momento che si oppone alla rotazione $\omega = 1$ dell'incastro [3].

b) Abbandoniamo, per semplicità, la sopralineatura di $\overline{w}(x)$.

L'equazione (1) si affronta direttamente per $E\mathfrak{J} =$ costante, $\mu =$ costante o per speciali leggi di variazione di $\mathfrak{J}$ e di μ ma in generale conviene ricondursi al principio variazionale di cui la (1) è l'estremale, e cioè

$$(1\,a) \qquad \delta \int_0^L \left[E\mathfrak{J} \left(\frac{d^2 w}{dx^2} \right)^2 - \bar{\nu}^2 \mu w^2 - q(x) w \right] dx = 0,$$

che, per $q(x) \equiv 0$, si riferisce al caso delle oscillazioni libere [4].

Considerato un sistema *completo* $\{w_\varrho(x)\}$ di funzioni, soddisfacenti le condizioni ai limiti specifiche del problema che si esamina, si è portati ad assumere la $w(x)$ come combinazione lineare

$$(2) \qquad w(x) = \sum_1^N{}_\varrho \, a_\varrho w_\varrho(x),$$

e – con l'avvertenza che segue immediatamente – a scrivere le equazioni per la stazionarietà rispetto ai coefficienti a_ϱ (*a priori* incogniti):

$$(3) \qquad \sum_1^N{}_\tau (\varepsilon_{\varrho\tau} - \bar{\nu}^2 \mu_{\varrho\tau}) a_\tau = F_\varrho, \qquad (\rho = 1, 2, \cdots, N).$$

Al sistema (3) si perviene introducendo la combinazione (2) nel principio (1 *a*) e facendo le seguenti posizioni:

$$(4) \qquad \bar{\nu} = \nu L^2 \sqrt{\frac{\mu_0}{E\mathfrak{J}_0}},$$

$\mathfrak{J}_0, \mu_0, q_0$ essendo particolari valori di $\mathfrak{J}, \mu, q$;

$$x = \xi L \quad , \quad (0 \leq \xi \leq 1) \quad , \quad j(\xi) = \frac{\mathfrak{J}}{\mathfrak{J}_0},$$

$$(5) \qquad \mu_{\varrho\tau} = \int_0^1 \frac{\mu(\xi)}{\mu_0} w_\varrho(\xi) w_\tau(\xi) d\xi \quad , \quad \varepsilon_{\varrho\tau} = \int_0^1 j(\xi) \frac{d^2 w_\varrho}{d\xi^2} \frac{d^2 w_\tau}{d\xi^2} d\xi,$$

(3) Ad esempio per un appoggio su una piastra rigida, poggiata su suolo elastico su un'area Ω, ove sia: C il *coefficiente del ballast* (C $\sim$ 2,00–3,00 kg. cm^{-3} per la sabbia, C $\sim$ 20 30 kg cm^{-3} per la roccia), $\mathfrak{J}_0^*$ il momento di inerzia di Ω rispetto all'asse baricentrico $\overline{aa}$ (l'asta è incastrata nel baricentro di Ω e oscilla rigidamente attorno a questo asse), allora è $k = C\mathfrak{J}_0^*$. Infatti ad una rotazione ω attorno ad $\overline{aa}$ corrisponde, alla distanza y, uno spostamento $\omega \cdot y$, quindi una reazione del suolo – atteso il noto significato di C – di $\omega \cdot yC\, d\Omega$, $d\Omega$ essendo l'elemento di area di Ω. Integrando, si ha un momento richiamante alla posizione $\omega = 0$, $\mathfrak{M} = \omega \int_\Omega Cy^2 d\Omega$. Da qui la definizione di k:

$$k = \int_\Omega Cy^2 d\Omega$$

che, per C = costante, diviene $k = C \cdot \mathfrak{J}_0^*$ essendo $\mathfrak{J}_0^* = \int_\Omega y^2 d\Omega$.

(4) Cfr. op. cit. in (2), pp. 273 e 290.

$$(6) \qquad f_\varrho = \int_0^1 \frac{q(\xi)}{q_0} w_\varrho(\xi)\, d\xi \quad , \quad F_\varrho = \frac{1}{2} \frac{L^4}{E J_0} q_0 f_\varrho \, .$$

Sia $\nu_r^2 \, (r = 1, 2, \cdots, N)$ una radice dell'equazione cosiddetta delle frequenze

$$(7) \qquad \| \varepsilon_{\varrho\tau} - \bar{\nu}^2 \mu_{\varrho\tau} \| = 0 \, ,$$

ottenuta annullando il determinante del sistema (3). Sé $\bar{\nu} \neq \nu_r$ il sistema (3) è compatibile; se $\bar{\nu} = \bar{\nu}_r$ e $\bar{a} \equiv (\bar{a}_1, \bar{a}_2, \cdots, \bar{a}_N)$ è una corrispondente autosoluzione del sistema omogeneo associato al (3), condizione necessaria e sufficiente perché il sistema (3) sia compatibile è che il vettore termine noto $(F_1, F_2, \cdots, F_N)$ risulti ortogonale al vettore $\bar{a}$ [5].

c) Se, nella schematizzazione più semplice possibile, si considera nella (2) una sola funzione w_ϱ, l'equazione (7) si riduce alla $\varepsilon_{\varrho\varrho} - \bar{\nu}^2 \mu_{\varrho\varrho} = 0$, da cui, per la scelta della w_ϱ specificata in *d*), segue come valore approssimato della ρ^{ma} frequenza ridotta (cfr. (4)): $\bar{\nu}_\varrho = \sqrt{\frac{\varepsilon_{\varrho\varrho}}{\mu_{\varrho\varrho}}}$; combinando [6] due diverse funzioni w_ϱ e $w_\tau \, (\rho \neq \tau)$ segue invece:

$$\bar{\nu}^2 = \frac{\varepsilon_{\varrho\varrho}\mu_{\tau\tau} - 2\varepsilon_{\varrho\tau}\mu_{\varrho\tau} + \varepsilon_{\tau\tau}\mu_{\varrho\varrho}}{2\{\mu_{\varrho\varrho}\mu_{\tau\tau} - \mu_{\varrho\tau}^2\}} \cdot \left\{ 1 \pm \sqrt{1 - \frac{4(\varepsilon_{\varrho\varrho}\varepsilon_{\tau\tau} - \varepsilon_{\varrho\tau}^2)(\mu_{\varrho\varrho}\mu_{\tau\tau} - \mu_{\varrho\tau}^2)}{(\varepsilon_{\varrho\varrho}\mu_{\tau\tau} - 2\varepsilon_{\varrho\tau}\mu_{\varrho\tau} + \varepsilon_{\tau\tau}\mu_{\varrho\varrho})^2}} \right\} .$$

Se alle w_ϱ si associa anche una funzione w_0, lineare, che fornisce $\varepsilon_{0\tau} = 0$ (caso dell'incastro rigido), oppure se risulta $\varepsilon_{0\tau} = 0$, $\varepsilon_{1\tau} = 0$ (caso dell'asta con estremi liberi), la precedente espressione di $\bar{\nu}^2$ si semplifica notevolmente e si ottiene

$$\bar{\nu} = \sqrt{\frac{\varepsilon_{\tau\tau}}{\mu_{\tau\tau}}} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\mu_{\varrho\tau}^2}{\mu_{\varrho\varrho}\mu_{\tau\tau}}}} \quad , \quad (\tau > \rho), \quad \text{se} \quad \rho = 0, \quad \text{oppure} \quad \rho = 0 \quad \text{od} \quad 1.$$

Si rileva perciò l'interesse pratico di possedere le espressioni degli integrali (5) e (6) e procedimenti per la loro tabellazione per sistemi $\{w_\varrho(\xi)\}$ opportunamente scelti.

d) Nel § 2 del presente lavoro indico un procedimento per la determinazione della successione degli autovalori del problema dell'asta incastrata ad un estremo su suolo elastico con distribuzione dei momenti di inerzia e delle masse esprimibile in serie di potenze della variabile indipendente. L'esposizione è corredata di una tabella, di un grafico e di un esempio

(5) Il metodo, qui riassunto, è detto del Ritz. Su di esso si veda più ampiamente, ad esempio, S. TIMOSHENKO, *Théorie des vibrations* (Béranger. Paris. 1939, § 62; oppure op. cit. in (2), p. 287 e sgg.

(6) Cfr. G. KRALL, *Vibrazioni di uno scafo elastico galleggiante su un fluido, sede di propagazioni ondose*. «Rend. Acc. Naz. Lincei», ser. VIII, vol. I fasc. 9 e 12, pp. 937-948 e 1272-1280 (1946); ovvero idem in «Tecnica Italiana», Nuova Serie, I, 2, Trieste 1946 § 2, nn. 5-6; § 4, n. 3. Cfr. anche, per la scelta più opportuna di ρ e di τ, S. TIMOSHENKO, op. cit. in (5), pp. 400-402.

numerico. *Per le funzioni* $w_\varrho(\xi)$ *conviene scegliere le autosoluzioni* (che saranno esaminate al § 3) *del caso omogeneo*

$$\frac{d^4 w}{d\xi^4} - \delta^4 w(\xi) = 0 \tag{8}$$

$$w(\xi)\Big|_{\xi=0} = 0 \quad , \quad \frac{dw}{d\xi} - \varkappa \frac{d^2 w}{d\xi^2}\Big|_{\xi=0} = 0 \quad , \quad \frac{d^2 w}{d\xi^2}\Big|_{\xi=1} = \frac{d^3 w}{d\xi^3}\Big|_{\xi=1} = 0 \qquad (0 \leq \xi \leq 1) \tag{9}$$

dove, a causa delle trasformazioni convenute in *b*), è (cfr. nota [3]):

$$\varkappa = \frac{E\mathfrak{J}}{kL} \quad , \quad (\varkappa \geq 0);$$

assegnata per $\mathfrak{J}$, μ, q una legge di variazione del tipo

$$\begin{cases} j(\xi) = 1 - \sum_1^n k_h \xi^h \quad , \quad (E\mathfrak{J} = E\mathfrak{J}_0 j(\xi)), \\ \dfrac{\mu(\xi)}{\mu_0} = 1 - \sum_1^n m_h \xi^h \quad , \quad \dfrac{q(\xi)}{q_0} = 1 - \sum_1^n q_h \xi^h, \end{cases} \tag{10}$$

nel § 4 si calcolano gli integrali (5) e (6).

Naturalmente i risultati del presente lavoro concordano con quelli della seconda fra le mie Note, già citate in [1], i quali corrispondono a $\varkappa = 0$.

e) È interessante anche osservare che, per $\varkappa \to +\infty$, il problema si riduce a quello di un'asta libera all'estremo $\xi = +1$, per la quale siano prescritte le condizioni dell'annullarsi dello spostamento e del momento nel punto $\xi = 0$. Le autosoluzioni di questo problema sono quelle di ordine dispari (nodo al mezzo) dell'asta libera di lunghezza doppia, per il che si confronti la prima fra le mie Note, citate in [1]. Nel sistema differenziale (8)–(9) si sostituiscono alle (9) le seguenti condizioni:

$$w(\xi)\Big|_{\xi=0} = \frac{d^2 w}{d\xi^2}\Big|_{\xi=0} = \frac{d^2 w}{d\xi^2}\Big|_{\xi=1} = \frac{d^3 w}{d\xi^3}\Big|_{\xi=1} = 0. \tag{9'}$$

Nel § 5 accenneremo brevemente alla trattazione di questo problema limite.

2. DETERMINAZIONE DEGLI AUTOVALORI. – Le condizioni (9) impongono che il parametro (reale e *positivo*) δ, che compare in (8), verifichi l'equazione

$$1 + \mathrm{Ch}\,\delta \cos\delta - \varkappa\delta(\mathrm{Ch}\,\delta \operatorname{sen}\delta - \mathrm{Sh}\,\delta\cos\delta) = 0 \text{ [7]}. \tag{11}$$

Fissato un valore $\bar{\varkappa}$ di $\varkappa$, poniamo

$$\varphi(\delta) = 1 + \mathrm{Ch}\,\delta\cos\delta - \bar{\varkappa}\delta(\mathrm{Ch}\,\delta\operatorname{sen}\delta - \mathrm{Sh}\,\delta\cos\delta); \tag{12}$$

la risoluzione dell'equazione (11), per $\varkappa = \bar{\varkappa}$, equivale alla determinazione degli zeri positivi Δ_l della funzione $\varphi(\delta)$, definita dalla (12).

(7) In conformità con la tradizione, si pone

$$\mathrm{Sh}\,\delta = \frac{e^\delta - e^{-\delta}}{2} \quad , \quad \mathrm{Ch}\,\delta = \frac{e^\delta + e^{-\delta}}{2} \quad , \quad \mathrm{Th}\,\delta = \frac{\mathrm{Sh}\,\delta}{\mathrm{Ch}\,\delta} \quad , \quad \mathrm{Cth}\,\delta = \frac{1}{\mathrm{Th}\,\delta}.$$

a) *Separazione degli autovalori.* – Siano:

$\bar{\delta}_l$ la soluzione dell'equazione trascendente

$$\text{Th}\,\delta = \text{tang}\,\delta \quad (11')$$

(8),

verificante le relazioni $\bar{\delta}_1 = 0$, $\bar{\delta}_l = \frac{4l-3}{4}\pi - \sigma_l$, (se $l > 1$), con $0{,}0^3 4 > > \sigma_2 > 0{,}0^6 8 > \sigma_3 > \sigma_4 > \cdots > 0$;

δ_l la soluzione dell'equazione trascendente $1 + \text{Ch}\,\delta \cos\delta = 0$ (9), verificante le relazioni $\delta_l = \frac{2l-1}{2}\pi + (-1)^{l-1}\tau_l$, $(l \geqq 1)$, con $0{,}304 > > \tau_1 > 0{,}018 > \tau_2 > 0{,}0^3 8 > \tau_3 > \cdots > 0$.

Orbene: *in ogni intervallo* $I_l \equiv (\bar{\delta}_l , \delta_l)$, *esiste uno e un solo* $\Delta_l = \Delta_l(\varkappa)$ *autovalore del problema considerato.*

Infatti negli intervalli aperti a sinistra $J_l \equiv (\bar{\delta}_l, l\pi)$, $(l > 0)$ è $(-1)^l \varphi'(\delta_l) > 0$; ivi dunque la (12) è funzione decrescente di δ se l è dispari, crescente se l è pari. È inoltre:

$$(-1)^l \varphi(\bar{\delta}_l) \leqq 0 \quad , \quad (-1)^l \varphi(\delta_l) \geqq 0 ,$$

perciò $\varphi(\delta)$ si annulla una volta e una volta soltanto in $I_l\,(< J_l + \bar{\delta}_l)$.

Per ogni $\varkappa$ assegnato gli intervalli I_l operano dunque una separazione delle radici della (11); intervalli di separazione molto più ristretti, e perciò più convenienti per una approssimazione numerica, si potranno ricavare con il seguente metodo:

1° si tabella la seguente funzione di δ:

$$\varkappa = \frac{1}{\delta}\,\frac{1 - \text{tang}^2\frac{\delta}{2}\,\text{Th}^2\frac{\delta}{2}}{\left(\text{Th}^2\frac{\delta}{2} + 1\right)\text{tang}\frac{\delta}{2} + \left(\text{tang}^2\frac{\delta}{2} - 1\right)\text{Th}\,\frac{\delta}{2}}, \quad \text{per } \delta \text{ in } I_l; \quad (13)$$

la (13) è una conseguenza della (11);

2° si costruisce un grafico della funzione (13): esso dovrebbe essere costituito da infiniti archi di curva, privi di punti comuni, corrispondenti ciascuno ad un valore intero di l (archi contenuti nelle semistrisce $\delta_l \leqq \delta \leqq \delta_l$, $\varkappa \geqq 0$); la retta $\varkappa = \bar{\varkappa}$ interseca una sola volta ogni arco;

3° sull'asse δ si leggono gli autovalori $\Delta_l(\varkappa)$ quali ascisse di dette intersezioni; in pratica questa lettura permetterà di individuare un intervallo (a , b), sull'asse δ, contenente l'autovalore desiderato.

Alla fine di questo paragrafo è riportato il grafico per $1 \leqq l \leqq 5$ (v. fig. 1), nonché un esempio numerico di calcolo dei primi 5 autovalori per $\varkappa = +1$.

b) *Calcolo numerico delle radici* Δ_l *della* (11). – È dunque lecito, separata – mediante due numeri a e b in I_l – una radice Δ_l della (11), applicare i consueti metodi di risoluzione numerica approssimata delle

(8) La (11') è l'equazione degli autovalori per il caso $\varkappa \to +\infty$ (cfr. § 1 *e*); i suoi primi tre zeri sono: $\bar{\delta}_1 = 0$, $\bar{\delta}_2 = 3{,}92660\,2312$, $\bar{\delta}_3 = 7{,}06858\,27457$.

(9) La (11) si riduce a questa equazione, per $\varkappa = 0$ (incastro rigido). Metodi per la sua risoluzione sono esposti al § 5 della mia Nota cit. in (1).

equazioni. Si noti preliminarmente che per le definizioni di $\bar{\delta}_l$ e δ_l (confronta § 2, *a*) segue

$$(-1)^l \varphi''(\delta) > 0 \quad , \quad (-1)^l \varphi'''(\delta) > 0 \, , \text{ in } I_l \, ^{(10)};$$

perciò – supposto $a < b$ – il metodo delle corde e quello delle tangenti (con la tangente nel punto $(b\,,\varphi(b))$ forniscono rispettivamente un valore per difetto e uno per eccesso della radice Δ_l, qualunque sia l. Ma il seguente

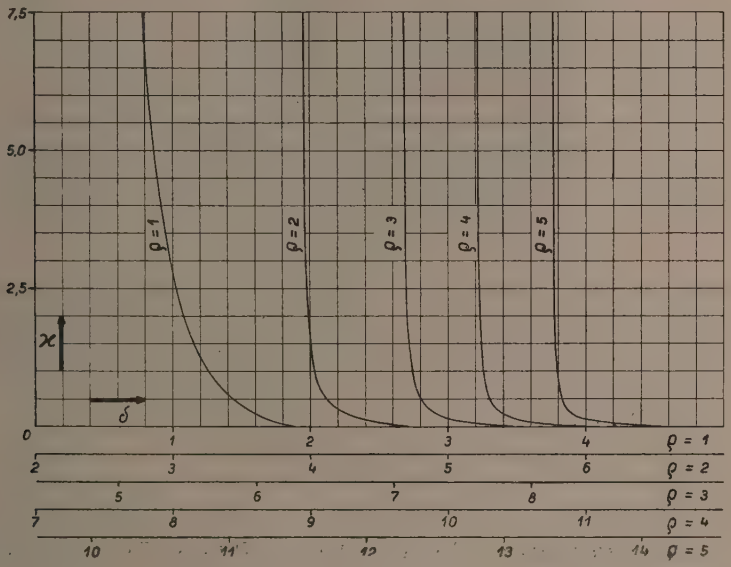


Fig. 1.

metodo, applicabile vantaggiosamente perché la derivata terza della (12) non è mai nulla in $(a\,,b)$, fornisce una convergenza più rapida: si ponga

$$P(x\,,a\,,b) = \frac{\varphi(b) - \varphi(a) - (b-a)\varphi'(a)}{(b-a)^2}(x-a)^2 + \varphi'(a)\cdot(x-a) + \varphi(a)$$

e si risolvano le due equazioni (di II grado)

$$P(x\,,a\,,b) = 0 \quad , \quad P(x\,,b\,,a) = 0\,;$$

(14)

si scelga una radice x_1 della prima e una x_2 della seconda, tali che $x_1 > a$, $x_2 < b$; i due numeri x_1 e x_2 forniscono un nuovo intervallo di separazione, ossia: $a < x_1 < \Delta_l < x_2 < b$ [11].

(10) Ed invero ciò è immediato nell'intervallo $\left(\bar{\delta}_l\,, \frac{2l-1}{2}\pi\right)$; se l è *dispari* occorre constatarlo per l'intervallo $\left(\frac{2l-1}{2}\pi\,,\delta_l\right)$. Ma ivi è sempre $2\operatorname{sen}\delta + \delta\cos\delta > 0$, $(\operatorname{Sh}\delta + \bar{\varkappa}\delta\operatorname{Ch}\delta)\operatorname{sen}\delta > 0$, perciò $\varphi''(\delta) = -2[(2\operatorname{sen}\delta + \delta\cos\delta)\bar{\varkappa}\operatorname{Sh}\delta + (\operatorname{Sh}\delta + \bar{\varkappa}\delta\operatorname{Ch}\delta)\operatorname{sen}\delta)] < 0$; è poi, in detto intervallo, $\varphi'''(\delta) < \varphi'''(\delta_{2m+1}) = -2(\operatorname{Ch}\delta_{2m+1} - 1)\operatorname{Th}\delta_{2m+1} < 0$.

(11) Cfr. PICONE e TORTORICI, *Trattato di Matematiche Generali*. (Studium Urbis, Roma 1947), vol. I, pp. 347–351.

c) Illustreremo con un esempio numerico, relativo a $\varkappa = 1$, il procedimento di calcolo numerico degli autovalori sovra esposto.

Sul grafico si legge: $a = 1{,}24$ e $b = 1{,}26$ e per la separazione del primo autovalore Δ_1; mediante la (14) si riduce questo intervallo di separazione: $1{,}247\ 917 < \Delta_1 < 1{,}247\ 918$, dal quale, se occorre, mediante i metodi delle corde e delle tangenti si può ottenere

$$\Delta_1 = 1{,}247\ 917\ 4096\,, \quad \text{con un errore minore di } 10^{-10}.$$

Nella stessa maniera, *con due sole iterazioni*, si ottiene per i successivi autovalori (e con $\varkappa = 1$):

$\Delta_2 = 4{,}031\ 139\ 436\ 69$	$a = 4{,}025$;	$b = 4{,}035$	errore $< 10^{-12}$
$\Delta_3 = 7{,}134\ 132\ 241$	$a = 7{,}134$;	$b = 7{,}137$	errore $< 10^{-9}$
$\Delta_4 = 10{,}256\ 621\ 074$	$a = 10{,}256$;	$b = 10{,}258$	errore $< 10^{-9}$
$\Delta_5 = 13{,}387\ 756\ 326$	$a = 4\pi + 0{,}820$;	$b = 4\pi + 0{,}822$	errore $< 10^{-9}$.

Nella successiva Nota II daremo le autosoluzioni del problema (8)-(9), il calcolo degli integrali (5) e (6) e riporteremo le tabelle della funzione (13), che sono servite alla costruzione del precedente grafico (Tabella I), e dei suddetti integrali per $\rho, \tau = 1\ 0\ 2$ e per $\varkappa = 0\ ;\ 0{,}25\ ;\ 1\ ;\ 2{,}5\ ;\ \infty$ (Tabelle III–IV–V).

Aerodinamica. — *Determinazione del campo di velocità di una corrente subsonica piana.* Nota di Luigi Marchetti, presentata (*) dal Corrisp. B. Finzi.

§ 1. Premesse. – Oggetto della presente Nota è lo studio del campo di velocità di una corrente piana, stazionaria, isoentropica, irrotazionale di un fluido compressibile, subsonica in ogni punto del campo considerato.

Sotto la fondamentale ipotesi della conoscenza delle linee di corrente, si darà la formula che permette il calcolo numerico della velocità lungo una qualunque linea; ed in particolare lungo quelle che lambiscono il contorno del corpo rigido investito da detta corrente.

Evidentemente non può dirsi certo risolto il problema dell'integrazione dell'equazione che governa il moto di un corpo in un fluido compressibile, ma ci sembra che i risultati cui siamo pervenuti in questa ricerca non siano del tutto privi di interesse. Da una semplice fotografia eseguita in una galleria aerodinamica potranno infatti essere rilevate le linee di corrente; da esse si potrà facilmente risalire al calcolo delle velocità. L'alto costo di una galleria può essere notevolmente ridotto; con l'uso delle gallerie a funzionamento intermittente il fenomeno può, alla luce della nostra ricerca, essere

(*) Nella seduta del 13 dicembre 1952.

studiato quantitativamente: non è infatti necessario il funzionamento della galleria che limitatamente al tempo necessario alla fotografia.

§ 2. EQUAZIONE DIFFERENZIALE DI UN CAMPO PIANO. – Si abbia una corrente bidimensionale, stazionaria, isoentropica, irrotazionale di un fluido compressibile perfetto. In tali condizioni l'equazione di continuità e le equazioni di Eulero possono essere scritte nella forma seguente:

$$(\rho u)_x + (\rho v)_y = 0 \tag{1}$$

$$u u_x + v u_y = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} \quad , \quad u v_x + v v_y = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}, \tag{2}$$

dove u e v indicano rispettivamente le componenti della velocità secondo gli assi x ed y, ρ la densità e p la pressione locale del fluido.

Introducendo la *velocità del suono* [1], che sarà indicata con c, notoriamente definita da $\frac{dp}{d\rho} = c^2$, e notando che si ha

$$\frac{d\rho}{dx} = \frac{d\rho}{dp}\cdot\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial p}{\partial x} \quad , \quad \frac{\partial \rho}{\partial y} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial p}{\partial y}$$

tenendo conto di queste ultime relazioni, dalle equazioni (1) e (2) segue:

$$u_x\left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right) + v_y\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) - \frac{uv}{c^2}(u_y + v_x) = 0, \tag{3}$$

che per l'ipotesi dell'irrotazionalità può essere scritta sotto la forma:

$$u_x\left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right) + v_y\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) - \frac{2uv}{c^2}u_y = 0. \tag{3'}$$

Dall'ammessa irrotazionalità segue l'esistenza di una funzione $\Phi(x, y)$, potenziale di velocità, definita, a meno di una costante additiva, dalle relazioni:

$$u = \Phi_x \quad , \quad v = \Phi_y.$$

E la (3') potrà perciò esprimersi nella forma:

$$\Phi_{xx}\cdot\left(1 - \frac{\Phi_x^2}{c^2}\right) - \frac{2}{c^2}\Phi_x\Phi_y\Phi_{xy} + \Phi_{yy}\cdot\left(1 - \frac{\Phi_y^2}{c^2}\right) = 0. \tag{4}$$

Il nostro problema è quello di integrare tale equazione sotto opportune condizioni al contorno. Studieremo correnti sul piano xy tangenti alla frontiera dell'assegnato corpo C, e all'infinito aventi direzione parallela all'asse x. Soddisfacenti cioè alle condizioni:

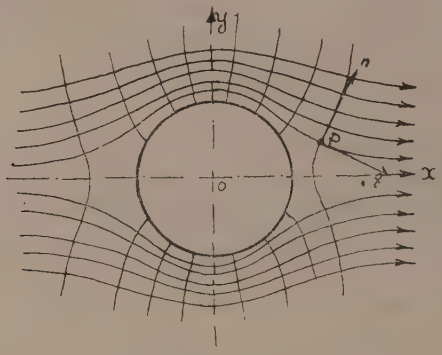
$$\frac{d\Phi}{dn} = 0, \quad \text{su } \mathfrak{F}C \quad ; \quad \left[\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right]_\infty = U \quad , \quad \left[\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right]_\infty = 0$$

(1) c è la velocità *locale* di propagazione del suono, c_0 quella *asintotica*, che risulta legata alla velocità asintotica U della corrente dalla relazione $c^2 = c_0^2 + \frac{\gamma - 1}{2}(U^2 - u^2 - v^2)$ essendo $\gamma = \frac{c_p}{c_v}$ il rapporto fra i calori specifici del fluido a pressione e a volume costanti.

dove con n abbiamo indicato la normale interna e con U la velocità all'infinito.

Ipotesi essenziale che noi faremo è che in ogni punto del campo la corrente sia subsonica, in modo che restando esclusi fenomeni d'urto, ci sia assicurata la continuità della velocità.

§ 3. INTEGRAZIONE DELL'EQUAZIONE. – Supposto il problema risoluto, resteranno sul piano xy determinati due sistemi semplicemente infiniti di curve: le linee equipotenziali, $\Phi =$ costante, e le linee di corrente, $\Psi =$ costante [2]; è facile provare che le linee di corrente sono traiettorie ortogonali delle linee equipotenziali e viceversa.



Per un punto P del piano xy, non interno a C, passano una linea equipotenziale e una linea di corrente. Fisseremo su di esse un sistema di ascisse curvilinee, orientando le $\Psi =$ costante secondo il verso della corrente, e le $\Phi =$ costante in modo da far risultare i versori, rispettivamente t ed n, orientati come la coppia di assi xy. Indicati con α e β i coseni direttori di t, quelli di n risulteranno così uguali rispettivamente a $-\beta$ e α. Deriviamo ora la $\Phi(x, y)$ secondo le direzioni di t e di n. Con evidente significato di simboli si avrà:

$$(5) \qquad \begin{cases} \Phi_t = \Phi_x \alpha + \Phi_y \beta \\ \Phi_n = -\Phi_x \beta + \Phi_y \alpha. \end{cases}$$

Ma Φ_n ci dà la componente della velocità del fluido secondo la direzione n. Risultando identicamente nulla, le (5) ci forniscono i seguenti valori per Φ_x e Φ_y:

$$(6) \qquad \begin{cases} \Phi_x = \alpha \Phi_t \\ \Phi_y = \beta \Phi_t \text{ [3]}. \end{cases}$$

(2) Notoriamente quest'ultime definite dal sistema di equazioni $\Psi_x = -\rho\Phi_y$, $\Psi_y = \rho\Phi_x$.

(3) Risultato facilmente prevedibile, essendo Φ_t il modulo della velocità la cui direzione è quella di t.

Passando nuovamente a derivare le (5) ancora secondo le stesse direzioni otterremo:

$$(7)\qquad \begin{cases} \Phi_{tt} = \Phi_{xx}\,\alpha^2 + 2\,\Phi_{xy}\,\alpha\beta + \Phi_{yy}\,\beta^2 + \Phi_x\,\alpha_t + \Phi_y\,\beta_t \\ 0 \equiv \Phi_{nn} = \Phi_{xx}\,\beta^2 - 2\,\Phi_{xy}\,\alpha\beta + \Phi_{yy}\,\alpha^2 - \Phi_x\,\beta_n + \Phi_y\,\alpha_n . \end{cases}$$

Tenuto conto delle (6), della identità $\alpha^2 + \beta^2 = 1$, e per la formula di Frenet avendosi

$$\Phi_x\,\alpha_t + \Phi_y\,\beta_t = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\alpha^2 + \beta^2) = 0,$$

$$-\Phi_x\,\beta_n + \Phi_y\,\alpha_n = -\frac{1}{r}\Phi_t$$

dove con r si è indicato il raggio di curvatura della linea equipotenziale in P, le (7) possono scriversi:

$$(7')\qquad \begin{cases} \Phi_{tt} = \Phi_{xx}\,\alpha^2 + 2\,\Phi_{xy}\,\alpha\beta + \Phi_{yy}\,\beta^2 \\ 0 = \Phi_{xx}\,\beta^2 - 2\,\Phi_{xy}\,\alpha\beta + \Phi_{yy}\,\alpha^2 - \frac{1}{r}\Phi_t . \end{cases}$$

Per le (6) e per le (7'), la (4) diventa:

$$(8)\qquad c^2\left(\Phi_{tt} + \frac{1}{r}\Phi_t\right) - \Phi_{tt}\cdot\Phi_t^2 = 0.$$

Notiamo subito che nel caso in cui le linee equipotenziali siano rette, risultando in tal caso $r = \infty$ e dovendosi avere, perchè il campo è stato supposto da noi subsonico, $c^2 - \Phi_t^2 > 0$, ne risulterà $\Phi_{tt} = 0$ e cioè $\Phi_t =$ costante.

Il risultato può anche invertirsi osservando che dal supporre $\Phi_t =$ costante, non nulla, segue immediatamente $r = \infty$.

Escluso questo caso, la (8) potrà scriversi nella forma normale

$$(8')\qquad \Phi_{tt} = -\frac{1}{r}\cdot\frac{\left[c_0^2 + \frac{\gamma-1}{2}\cdot(U^2 - \Phi_t^2)\right]\Phi_t}{c_0^2 + \frac{\gamma-1}{2}\cdot(U^2 - \Phi_t^2) - \Phi_t^2}\cdot$$

Siamo così arrivati ad una equazione differenziale del primo ordine, nella funzione incognita Φ_t, considerata lungo una linea di corrente funzione dell'ascissa curvilinea t.

Se si considera ora una linea di corrente, assunto un punto P di essa come origine del nostro sistema di ascisse curvilinee in cui sia noto il valore di Φ_t, che indicheremo con Φ_t° (4), dalla (8') si avrà:

$$-\int_{\Phi_t^\circ}^{\Phi_t} \frac{c_0^2 + \frac{\gamma-1}{2}(U^2 - \Phi_t^2) - \Phi_t^2}{\left[c_0^2 + \frac{\gamma-1}{2}(U^2 - \Phi_t^2)\right]\Phi_t}\, d\Phi_t = \int_0^t \frac{1}{r}\, dt.$$

(4) Basterà sceglierlo sufficientemente a monte del campo perché si possa con buona approssimazione prendere $\Phi_t^\circ = U$.

Ed eseguendo l'integrazione a primo membro si trova:

$$-\int_0^t \frac{1}{r}\,dt = \log \frac{\Phi_t \left[c_0^2 + \frac{\gamma-1}{2}(U^2 - \Phi_t^2)\right]^{\frac{1}{\gamma-1}}}{\Phi_t^0 \left[c_0^2 + \frac{\gamma-1}{2}(U^2 - \Phi_t^{0^2})\right]^{\frac{1}{\gamma-1}}}.$$

Tale formula ci permette l'immediato calcolo numerico della velocità lungo la linea di corrente considerata.

La conoscenza delle traiettorie seguite dalle molecole del fluido, essenziale per avere i valori di r, potrà ottenersi con uno qualsiasi dei ben noti procedimenti di visualizzazione delle correnti (5).

Aerodinamica. — *Sur une distribution composée des vitesses d'agitation moléculaire.* Nota di JEAN JOSEPH BERNARD, presentata (*) dal Socio straniero J. PÉRÈS.

Considérons un gaz en écoulement unidimensionnel stationnaire suivant un axe $\xi\xi'$ dont l'abscisse varie dans le sens du courant de $-\infty$ à $+\infty$ et les domaines définis par ξ_1 et $\xi_2 > \xi_1$: nous supposons qu'en amont de ξ_1 et en aval de ξ_2 l'écoulement est assimilable aux mouvements uniformes définis respectivement par les grandeurs $(\nu_1, \bar{u}_1, T_1)$ et $(\nu_2, \bar{u}_2, T_2)$ représentant la densité numérique, la vitesse moyenne et la température.

Le gaz est supposé constitué d'une seule espèce de molécules entre lesquelles les échanges d'énergie par chocs ne font intervenir que les vitesses de translation; la distribution des vitesses d'agitation moléculaire de composantes (u, v, w) est ainsi définie dans ces deux domaines par la fonction exponentielle de Maxwell

$$(1) \qquad f_i(u, v, w) = \nu_i \left(\frac{h_i}{\pi}\right)^{3/2} \exp\{-h_i[(u-\bar{u}_i)^2 + v^2 + w^2]\} \qquad (i = 1, 2)$$

dans laquelle la grandeur h_i est liée à la température T_i et à la masse m des molécules par la relation usuelle:

$$\frac{1}{h_i} = 2\,R m T_i,$$

R étant la constante des gaz.

1. En admettant que l'écoulement unidimensionnel subsiste dans le domaine (ξ_1, ξ_2) nous envisageons la représentation statistique suivante du mécanisme de la transition: si $M(x, y)$ est un écoulement uniforme correspondant aux valeurs x et y des grandeurs $\bar{u}$ et h de la fonction de

(5) Cfr. per esempio, E. PISTOLESI, *Lezioni di Aerodinamica*, pp. 22–23, Vallerini – Pisa 1951.

(*) Nella seduta del 13 dicembre 1952.

Maxwell, nous admettons qu'il est possible de décomposer l'ensemble E des molécules contenues dans chaque tranche d'abscisse ξ et d'épaisseur $d\xi$ en un nombre fini ou infini d'ensembles partiels $E(x, y)$ dont le mouvement moyen des molécules constitue un écoulement $M(x, y)$; le nombre $n(\xi; x, y)\, d\xi$ de molécules appartenant à chaque ensemble $E(x, y)$ varie dans la zone de transition ainsi que le nombre total $\nu(\xi)\, d\xi$ de molécules E et permet de raccorder les écoulements $M(\bar{u}_1, h_1)$ et $M(\bar{u}_2, h_2)$.

La fonction

$$f_{x,y}(u, v, w) = \left(\frac{y}{\pi}\right)^{3/2} \exp\{-y[(u-x)^2+v^2+w^2]\}$$

représente la densité de probabilité, pour une molécule $E(x, y)$, de posséder une vitesse d'agitation comprise entre (u, v, w) et une valeur infi-

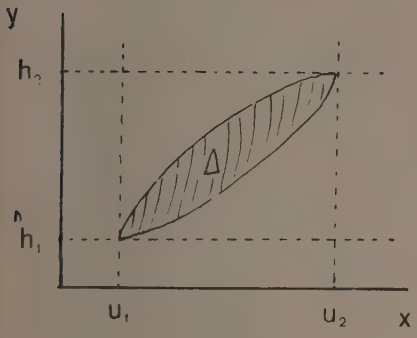


Fig. 1.

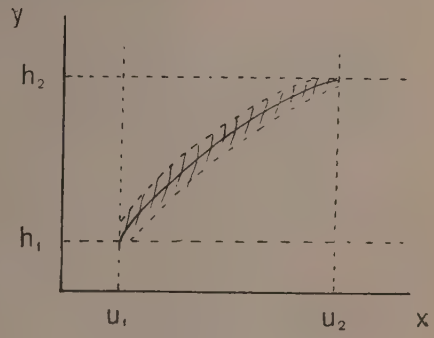


Fig. 2.

niment voisine; pour une molécule E, la densité de probabilité relative à la même condition s'exprime par le produit

$$f(x, y; u, v, w) = \frac{n(\xi; x, y)}{\nu(\xi)} \left(\frac{y}{\pi}\right)^{3/2} \exp\{-y[(u-x)^2+v^2+w^2]\}.$$

Si nous astreignons, pour plus de simplicité, les variables (x, y) à rester comprises entre les valeurs extrêmes $(\bar{u}_1, h_1)$ et $(\bar{u}_2, h_2)$, leur domaine de variation Δ (fig. 1), caractérisant leur dépendance stochastique, est supposé indépendant de ξ et la fonction de distribution se met sous la forme intégrale

$$(2) \qquad F(u, v, w) = \iint_{\Delta} \left(\frac{y}{\pi}\right)^{3/2} \exp\{-y[(u-x)^2+v^2+w^2]\}\, n(\xi; x, y)\, dx\, dy$$

que nous désignons dans cette note par distribution composée. Dans le cas d'une liaison stochastique stricte entre x et y, le domaine Δ peut être considéré comme la limite d'une bande infiniment mince (fig. 2) et l'intégrale (2) se prend le long d'une courbe $y(x)$. On remarque en outre que si les états extrêmes viennent se confondre, le domaine Δ se réduit à un

point et on retrouve à la limite l'expression (1) de la distribution de Maxwell, à la condition que $n(\xi ; x , y)$ tende alors vers ν_i.

2. Le nombre total $\nu(\xi)\, d\xi$ de molécules contenues dans la tranche considérée est la somme

$$\nu = \frac{1}{\Delta} \iint_{\Delta} n(\xi ; x , y)\, dx\, dy; \tag{3}$$

on vérifie facilement qu'on obtient la même expression par intégration de F étendue à toutes les valeurs de (u , v , w). De même, on peut calculer par l'intégration usuelle de F une vitesse moyenne $\bar{u}(\xi)$ qui s'écrit aussi

$$\bar{u} = \frac{1}{\nu\Delta} \iint_{\Delta} n(\xi ; x , y)\, x\, dx\, dy. \tag{4}$$

L'énergie cinétique moyenne de l'agitation relative à $\bar{u}$ permet de définir d'une manière purement conventionnelle une température ou du moins une grandeur h caractéristique de la temperature:

$$\frac{1}{h} = \frac{1}{\nu\Delta} \iint_{\Delta} n(\xi ; x , y) \left(\frac{y}{\pi}\right)^{3/2} \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} [(u - \bar{u})^2 + v^2 + w^2] \exp\{ -y\,[(u - x)^2 + v^2 + w^2]\}\, du\, dv\, dw\, dx\, dy$$

soit

$$\frac{1}{h} = \frac{1}{\nu\Delta} \iint_{\Delta} \left[\frac{1}{y} + \frac{2}{3}(x - \bar{u})^2\right] n(\xi ; x , y)\, dx\, dy. \tag{5}$$

Enfin, on peut encore examiner la forme que prennent dans le cas de la distribution composée les valeurs moyennes donnant habituellement les efforts p_ξ dans le fluide et le flux de chaleur q_ξ traversant l'unité de surface normale au courant; on obtient d'une part

$$p_\xi = \frac{\nu}{2h} + \frac{2}{3}\frac{m}{\Delta} \iint_{\Delta} (x - \bar{u})^2\, n(\xi ; x , y)\, dx\, dy, \tag{6}$$

expression dans laquelle on voit apparaître, à côté de la pression hydrostatique usuelle, les efforts liés au mouvement du fluide: viscosité et, éventuellement, termes supplémentaires dus à la situation particulière des molécules dans cette zone de transition; d'autre part, le flux q_ξ est donné par l'intégrale

$$q_\xi = \frac{m}{2\Delta} \iint_{\Delta} \left[\frac{5}{2y} + (x - \bar{u})^2\right] (x - \bar{u})\, n(\xi , x , y)\, dx\, dy \tag{7}$$

qui tend vers zéro, comme le second terme de p_ξ avec la différence $(\bar{u}_2 - \bar{u}_1)$ majorante de $(x - \bar{u})$. Remarquons que ces expressions ont une valeur formelle plus qu'une signification physique: elles jouent dans les équa-

tions de transfert qu'il est possible de déduire de la distribution composée, le rôle qui revient aux grandeurs physiques homologues dans les équations usuelles du mouvement.

La détermination exacte de la fonction $n(\xi ; x , y)$ relève de l'équation fonctionnelle définissant l'évolution spatiale de la distribution F, c'est-à-dire dans les domaines où sa validité peut être admise, de l'équation de Boltzmann; la fonction $n(\xi ; x , y)$ fera donc intervenir, outre les variables $(\nu , \bar{u} , h)$ définissant l'état du fluide en chaque point, les gradients caractérisant l'évolution de ces grandeurs dans l'écoulement. On constate, cependant, que la fonction est complètement définie, en première approximation, par les seules équations (3), (4), (5) et ne dépend que de $(\nu , \bar{u} , h)$ quand on remplace le domaine Δ par une suite discrète de trois états; les équations (6) et (7) donnent alors pour p_ξ et q_ξ des fonctions $p_\xi(\nu , \bar{u} ; h)$ et $q_\xi(\nu , \bar{u} , h)$ non nulles et indépendantes des gradients.

3. Nous envisageons l'application de la distribution composée à l'équation de Boltzmann en supposant de plus que les variations $(\bar{u}_2 - \bar{u}_1)$ et $(h_2 - h_1)$ sont assez faibles par rapport à l'étendue du domaine $(\xi_2 - \xi_1)$ pour que la validité de l'équation ne soit pas mise en cause.

L'équation de Boltzmann peut être écrite sous la forme condensée

$$u \frac{d\mathrm{F}}{d\xi} = \mathfrak{I} \{ \breve{\mathrm{F}} \breve{\mathrm{F}}' - \mathrm{F}\mathrm{F}' \} \tag{8}$$

dans laquelle l'opérateur $\mathfrak{I}$ désigne l'intégration d'ordre cinq usuelle effectuée, en particulier, sur les composantes (u' , v' , w') de la vitesse des molécules distribuées selon F', les fonctions $\breve{\mathrm{F}}$ et $\breve{\mathrm{F}}'$ se rapportent aux mêmes molécules que F et F' après un choc mutuel.

Le produit FF' peut être mis sous la forme

$$\mathrm{F}\mathrm{F}' = \frac{1}{\Delta^2} \int_{\Delta} \int_{\Delta} \int_{\Delta'} \int_{\Delta'} f f' \, n(\xi ; x , y) \, n(\xi ; x' , y') \, dx \, dy \, dx' dy' , \tag{9}$$

$\breve{\mathrm{F}}\breve{\mathrm{F}}'$ ayant une expression analogue. Le produit ff' peut se décomposer de la manière suivante en isolant, dans les exponentielles, les parties symétriques et antisymétriques par rapport aux variables des domaines Δ et Δ':

$$ff' = \varphi \cdot \psi , \tag{10}$$

avec, en posant $\mathrm{C}^2 = u^2 + v^2 + w^2$,

$$\varphi = \left(\frac{\nu\nu'}{\pi^2} \right)^{3/2} \exp \left\{ -\frac{\nu + \nu'}{2} (\mathrm{C}^2 + \mathrm{C}'^2) + (xy + x'y')(u + u') - (x^2 y + x'^2 y') \right\}$$

et

$$\psi = \exp \left\{ -\frac{y - y'}{2} (\mathrm{C}^2 - \mathrm{C}'^2) + (xy - x'y')(u - u') \right\} ;$$

dé même, pour $\breve{f}\breve{f}'$, en tenant compte des relations

$$\begin{cases} \breve{C}^2 + \breve{C}'^2 = C^2 + C'^2 \\ \breve{u} + \breve{u}' = u + u', \end{cases}$$

traduisant la conservation de l'énergie cinétique et de la quantité de mouvement dans le choc de deux molécules:

$$\breve{f}\breve{f}' = \varphi \cdot \breve{\psi}, \tag{11}$$

avec

$$\breve{\psi} = \exp\left\{ -\frac{y - y'}{2} (\breve{C}^2 - \breve{C}'^2) + (xy - x'y') (\breve{u} - \breve{u}') \right\}.$$

On voit sur (9) que la différence $(\breve{F}\breve{F}' - FF')$ est invariante dans l'échange de Δ et Δ', et par suite, si on développe en série des puissances de $\eta = (y - y')$ et $\zeta = (xy - x'y')$ les fonctions ψ et $\breve{\psi}$, le premier terme est le même dans chaque développement et s'élimine dans la différence tandis que les puissances impaires de η et ζ disparaissent dans l'intégration.

Lorsque le produit $(h_2 - h_1)(h_2 u_2 - h_1 u_1)$ est positif, comme cela se produit notamment dans les ondes de choc, η et ζ sont bornés supérieurement par $|h_2 - h_1|$ et $|h_2 u_2 - h_1 u_1|$ de telle sorte que les gradients contenus dans le premier membre de l'équation (8) sont en général du second ordre au moins par rapport aux différences $(h_2 - h_1)$ et $(h_2 u_2 - h_1 u_1)$.

Dans ces conditions, la distribution composée permet de conduire la résolution de l'équation de Boltzmann par les méthodes usuelles de linéarisation et d'approximations successives; les intégrales peuvent alors être explicitées pour chaque modèle moléculaire donné et la relation intégrodifférentielle définissant la fonction inconnue n'introduit que des intégrations par rapport aux variables (x, y, x', y') plus commodément utilisables que les composantes d'agitation.

Astronomia (Cronologia). — *Nuovo metodo per le ricerche cronologiche dei calendari*. Nota di Gilberto Ricci, presentata (*) dal Socio G. Abetti.

La Riforma gregoriana corresse, con le equazioni solari e lunari, gli errori riscontrati nella durata dell'anno giuliano e del mese lunare, modificando la posizione dei noviluni ecclesiastici, indicata nel Calendario Antico dai numeri aurei, al fine di stabilire la Pasqua, connessa, nel modo ben noto, alla luna XIV ed all'equinozio. Per quanto riguarda la parte lunare, venne mantenuto il ciclo metonico ($19^a = 235^l$), ma si raggrupparono i secoli, nei quali risultano costanti le correzioni apportate alle date novilunari, formando 30 serie, in ciascuna delle quali le nuove date vennero indicate dalle epatte, che rappresentano l'età della luna a capodanno. La differenza 31—

(*) Nella seduta del 13 dicembre 1952.

— epatta è la data del primo novilunio ecclesiastico, onde questa potrebbe sostituirsi a quella nell'ufficio attribuitole dal computo ecclesiastico. I primi noviluni ecclesiastici, pur aderendo agli inizi degli anni lunari con buona approssimazione [1], sono uguali per tutti quegli anni che hanno lo stesso numero aureo in ciascuna serie, ma una diversa posizione rispetto all'andamento medio delle fasi di L. N.. Come affermò Clavio, il Calendario Riformato ha più scopi religiosi che civili, onde gli errori, compresi entro certi limiti, che si possono stabilire, apparvero trascurabili rispetto alle altre questioni interessanti la Pasqua. Si osserva tuttavia che, se fossero definite e comprese in determinati campi le differenze fra i primi noviluni medi e quelli ecclesiastici, in ogni serie di epatte, il mirabile congegno dei numeri aurei e delle epatte non risulterebbe alterato, sostituendo gli uni agli altri. Le date dei primi noviluni medi degli anni giuliani e gregoriani sono ricavabili da semplici formule, nelle quali sono assunti i valori medi dell'anno solare e della lunazione. Se dividiamo per $29^d,5306$ il numero dei giorni trascorsi dal 23 gennaio dell'anno zero E. V. (1 av. Cr.), data di inizio del primo ciclo metonico, fino all'inizio di un dato anno gregoriano, si ottiene un resto (R.) che indica l'età della luna a capodanno, mentre i giorni che mancano per completare la lunazione segnano la data del primo novilunio medio (N'_m). Sostituendo a 365,2425, durata media dell'anno gregoriano, la differenza anno lunare di 13 lune – anno gregoriano medio, che è $18^d,6553$ – avremo il primo novilunio medio da:

$$(1) \qquad N'_m = \text{R.}\ \frac{\text{a. greg.} \times 18{,}6553 + 23}{29{,}5306}\ .$$

Per adattare la formula al calendario giuliano senza salto di continuità, si deve assumere la lunghezza dell'anno secondo il computo giuliano; onde avremo:

$$(2) \qquad N'_m = \text{R.}\ \frac{\text{a. giul.} \times 18{,}6478 + 24{,}865}{29{,}5306}$$

mentre per gli anni giuliani avanti Cristo la formula diviene:

$$(3) \qquad N'_m = \text{R.}\ \frac{(\text{a. giul. av. Cr.} \times 10{,}8828) + 13{,}9822}{29{,}5306}\ .$$

Trovato il primo novilunio dell'anno [2], anche gli altri sono conosciuti, aggiungendo al primo n $29^d,5306$, ove n è il numero ordinale del mese considerato, e togliendo la somma dei giorni dei mesi trascorsi; defalcando 29,5306, ove occorra. Le formule indicate possono adattarsi meglio

(1) Sull'andamento del Calendario Riformato rispetto al moto del sole vero e della luna, cfr. J. DE KORT S. J., *Astronomical appreciation of the gregorian calendar*. « Pontificia Academia Scientiarum, Acta, », vol. XIII, n. 4.

(2) Tali ricerche analitiche possono agevolarsi con un prontuario, la cui costruzione ed uso sono facilmente intuibili.

all'andamento medio delle lunazioni, usando la formula di Carlo Schoch, che dà la elongazione media della luna rispetto al sole medio:

$$(4) \quad D = 55°\,48'\,36'',16 + 1602961262\overline{7}'',53\,s + 9'',563\,s^2 + 0'',0089\,s^3$$

nella quale si esprime il tempo trascorso (s) in secoli giuliani, a partire da mezzodì, gennaio zero, dell'anno 1800. D è zero per ogni novilunio medio. Ricavando i primi noviluni degli anni 1800 e 1799, si vede che, per avere gli stessi risultati con la formula (1), occorre sostituire alla costante 23 il valore 22,61785. Inoltre, poichè il valore della lunazione media gregoriana supera quello della rivoluzione sinodica di 0^d,000012 per lunazione, e di 0^d,00015 per anno, aggiungeremo al numeratore $+ d\ 0{,}00015$, ove d è la differenza 1800 — anno dato. Per effetto di tali correzioni, le formule originarie diventano:

$$(1') \qquad N'_m = R.\ \frac{\text{a. greg.} \times 18{,}6553 + 22{,}61785 + d\,0{,}00015}{29{,}5306}$$

$$(2') \qquad N'_m = R.\ \frac{\text{a. giul.} \times 18{,}6478 + 24{,}48285 + d\,0{,}00015}{29{,}5306}$$

$$(3') \qquad N'_m = R.\ \frac{(\text{a. giul. av. Cr.} \times 10{,}8828) + 13{,}60005 + d\,0{,}00015}{29{,}5306}\ .$$

Ad una epatta corrispondono, in ogni serie di secoli, un primo novilunio ecclesiastico ed un solo numero aureo, ma a questo corrispondono, in ogni secolo, 5 o 6 parti annuali, equidistanti 19 anni [$a - b$ (mod. 19)], onde, in ogni secolo, ad un primo novilunio ecclesiastico corrispondono 5 o 6 primi noviluni medi, equidistanti 0^d,059 giuliani e 0^d,0835 gregoriani. Possiamo allora stabilire campi limitati dai primi noviluni medi delle parti annuali, max e min., aventi lo stesso numero aureo in ogni secolo, ed, estendendo i limiti, in ogni serie di secoli, e campi formati dalle differenze dei risultati conseguiti col nuovo metodo e col computo ecclesiastico per un dato secolo o per una data serie. Questi ultimi campi definiscono le relazioni aritmetiche [3] che legano i vari elementi del computo ecclesiastico. Poiché ad un primo novilunio medio corrisponde un solo anno, avente un dato posto nel ciclo solare ventottennale, risultano anche definite le relazioni che legano un primo novilunio medio al ciclo delle lettere domenicali e per conseguenza alla data pasquale.

Possiamo dunque risolvere i due problemi:

1° Dato un primo novilunio medio trovare gli elementi del computo ecclesiastico dell'anno a cui esso si riferisce.

2° Dato un primo novilunio medio, trovare l'anno a cui esso appartiene.

Nel primo caso, basta sostituire i campi, relativi ad ogni serie di secoli, alle epatte nella Tabula Epactarum Expansa di Lilio, per avere gli elementi

(3) Cfr. V. CERULLI, *Il calendario*. Tip. M. Ponzio, Pavia, 1931. A cura della S. A. I.

del computo ecclesiastico per ciascuna serie, mentre, per la parte solare, si rileva direttamente la posizione dell'anno nel ciclo solare, e si ottiene la lettera domenicale. Nel secondo caso, si considerano i secoli, anziché le serie, e si scindono i campi di ogni serie in campi limitati a ciascun secolo. Un primo novilunio medio troverà subito il campo che, contenendolo, definisce, oltre gli elementi del computo ecclesiastico, il secolo e la parte annuale dell'anno: questa sarà la minima o la massima del gruppo di 5 o 6 anni, aventi lo stesso numero aureo in quel dato secolo, qualora il primo novilunio medio coincida con uno dei limiti del campo. Se non coincidesse, e si trovassero altri campi che possono contenerlo, basta sommare, o detrarre m volte l'incremento unitario dei primi noviluni medi, già citato per gli anni giuliani e gregoriani, per trovare l'uno o l'altro numero che limita il giusto campo. Sarà perciò definita anche la parte annuale dal numero d'ordine m, cominciando a contare dalla minima, o massima, parte annuale del gruppo, a seconda del caso.

Il nomogramma, atto alle ricerche cronologiche dei calendari, è formato da più abachi ortogonali, essendo le funzioni lineari a due variabili. Nella parte centrale è riportato l'abaco che interessa il computo ecclesiastico. Quivi, ad ogni numero aureo $\left(\text{R.}\frac{\text{anno}+1}{19}\right)$ corrisponde, ad ogni serie di secoli, una epatta, la quale definisce i noviluni ecclesiastici nel Calendario perpetuo della Chiesa. In questo sono state collocate serie continue di strisce verticali lunghe $29^d,5306$, ciascuna striscia divisa in settimane e giorni numerati, e questi divisi in ore. Se si segna sulle strisce il punto in cui cade il primo novilunio medio, si conosceranno le altre date novilunari dell'anno e le differenze con i noviluni ecclesiastici, indicati a mezzodì dalla epatta corrispondente. Inoltre le lettere domenicali portano un indice che segna la settimana, per trovare subito il numero ordinale del giorno rispetto all'anno. Lateralmente sono disposti, a destra per il calendario gregoriano, e a sinistra per quello giuliano, gli abachi atti a far conoscere i primi noviluni medi. Quivi le parti annuali sono collocate in modo da servire per le ricerche delle parti solari e lunari. Le loro ascisse sono definite dai valori progressivi degli incrementi dei rispettivi primi noviluni medi, che sono i seguenti, per i primi 19 numeri ($0 = 19$), ciascuno dei quali è il numero aureo, per il secolo 1500 della Riforma, comune alle parti annuali del gruppo, o colonna, che lo contiene:

p. a.	0	8	16	5	13	2	10
giul.	0 ,	1.5294 ,	3.0588 ,	4.6472 ,	6.1766 ,	7.7650 ,	9.2944,
greg.	0 ,	1.5894 ,	3.1788 ,	4.6847 ,	6.2741 ,	7.7800 ,	9.3694,

p. a.	18	7	15	4	12	1
giul.	10.8238 ,	12.4122 ,	13.9416 ,	15,5300 ,	17.0594 ,	18.6478
greg.	10.9588 ,	12.4647 ,	14.0541 ,	15.5600 ,	17.1494 ,	18.6553

p. a.	9	17	6	14	3	11
giul.	20.1772 ,	21.7066 ,	23.2950 ,	24.8244 ,	26.4128 ,	27.9422
greg.	20.2447 ,	21.8341 ,	23.3400 ,	24.9294 ,	26.4353 ,	28.0247.

Essendo noti l'equidistanza e il numero delle parti annuali di ogni gruppo, possiamo disegnare l'ampiezza del campo, a cui corrisponde lo stesso numero aureo in ogni serie di secoli. Per usare il nomogramma, nelle cui coordinate sono state adottate scale uguali, si procede seguendo la verticale che passa per la posizione della parte annuale dell'anno dato, fino ad incontrare la retta che indica il secolo in cui è compreso l'anno. Tali rette sono equidistanti, in senso verticale, $4^d,3522$ giuliani e $5^d,1022$ gregoriani, onde è facile disegnare la posizione di un'altra, la quale dista da una nota un multiplo r di tali incrementi, ove r è la differenza delle parti secolari, detraendo $29^d,5306$, quando si superi tale valore. Sul punto di incontro della verticale con la retta a 45° si legge l'ordinata del primo novilunio medio, segnato a fianco. Tale punto è compreso nel campo collegato ad un disco nero, che indica, orizzontalmente l'epatta ed il primo novilunio ecclesiastico, onde risulta subito la differenza dei risultati conseguiti con i due metodi, misurando, in senso verticale la distanza che intercorre fra il disco ed il campo ad esso collegato. Le rette indicanti i secoli passano per i punti ricavati con le formule (1) e (2). Se si fossero usate le formule (1′) e (2′), si sarebbe trovata una minor distanza del disco dal campo, ma ciò non avrebbe influito sulle ricerche cronologiche. Sulla retta che indica il secolo giuliano 300 d. C. sono distinti i dischi che corrispondono agli stessi campi nelle serie N e P, precedente e seguente alla data del Concilio di Nicea (325 d. Cr., arrotondata a 320 nel Martirologio Romano). Proseguendo sulla orizzontale contenente il disco, oltre la epatta ed il primo novilunio ecclesiastico, si conoscerà la settimana pasquale. Se ora si segue l'orizzontale passante per la posizione della parte annuale dell'anno dato, fino ad incontrare la retta che ne indica il secolo, si entra nella colonna in cui trovansi il ciclo solare, la lettera domenicale e la data della Pasqua.

Il nuovo metodo, basato sui valori medi dell'anno e della lunazione, dà risultati più aderenti ai valori delle congiunzioni astronomiche, evita le correzioni segnalate nel Martirologio Romano per avere l'età della luna a capodanno, semplificando il complicato sistema dei numeri aurei e delle epatte, non scevro da errori, ben conosciuti dagli astronomi [4], riducendo il calcolo a semplici manipolazioni di formule lineari. Infine il nomogramma ci indica la possibilità di eseguire con esattezza le ricerche cronologiche con un nuovo metodo, segnalando, in perpetuo, la differenza che distingue i noviluni ecclesiastici da quelli medi. La ristrettezza dello spazio concesso vieta di illustrare maggiormente lo studio compilato dall'A. sul complesso argomento.

(4) Cfr. A. FRESA, *La luna*, Hoepli, Milano.

PRONTUARIO PER IL CALCOLO DEI PRIMI NOVILUNI MEDI.

Migliaia	Centinaia	Diecine	Unità
	Anni gregoriani.		
0000 = 23.0000	—	—	—
1000 = 14.9608	100 + 5.1022 / — 24.4284	10 + 9.3694 / — 20.1612	1 + 18.6553 / — 10.8753
2000 = 6.9216	200 + 10.2044 / — 19.3262	20 + 18.7388 / — 10.7918	2 + 7.7800 / — 21.7506
3000 = 28.4130	300 + 15.3066 / — 14.2240	30 + 28.1082 / — 1.4224	3 + 26.4353 / — 3.0953
4000 = 19.3738	400 + 20.4088 / — 9.1218	40 + 7.9470 / — 21.5836	4 + 15.5600 / — 13.9706
5000 = 12.3346	500 + 25.5110 / — 4.0196	50 + 17.3164 / — 12.2142	5 + 4.6847 / — 24.8459
6000 = 4.2954	600 + 1.0826 / — 28.4480	60 + 26.6858 / — 2.8448	6 + 23.3400 / — 6.1906
7000 = 25.7868	700 + 6.1848 / — 23.3458	70 + 6.5246 / — 23.0060	7 + 12.4647 / — 17.0659
8000 = 17.7476	800 + 11.2870 / — 18.2436	80 + 15.8940 / — 13.6366	8 + 1.5894 / — 27.9412
9000 = 9.7084	900 + 16.3892 / — 13.1414	90 + 25.2634 / — 4.2672	9 + 20.2447 / — 9.2859
	Anni giuliani d. Cr.		
0000 = 24.8650	—	—	—
1000 = 9.3258	100 + 4.3522 / — 25.1784	10 + 9.2944 / — 20.2362	1 + 18.6478 / — 10.8828
2000 = 23.3172	200 + 8.7044 / — 20.8262	20 + 18.5888 / — 10.9418	2 + 7.7650 / — 21.7656
3000 = 7.7780	300 + 13.0566 / — 16.4740	30 + 27.8832 / — 1.6474	3 + 26.4128 / — 3.1178
4000 = 21.7694	400 + 17.4088 / — 12.1218	40 + 7.6470 / — 21.8836	4 + 15.5300 / — 14.0006
5000 = 6.2302	500 + 21.7610 / — 7.7696	50 + 16.9414 / — 12.5892	5 + 4.6472 / — 24.8834
6000 = 20.2216	600 + 26.1132 / — 3.4174	60 + 26.2358 / — 3.2948	6 + 23.2950 / — 6.2356
7000 = 4.6824	700 + 0.9348 / — 28.5958	70 + 5.9996 / — 23.5310	7 + 12.4122 / — 17.1184
8000 = 18.6738	800 + 5.2870 / — 24.2436	80 + 15.2940 / — 14.2366	8 + 1.5294 / — 28.0012
9000 = 3.1346	900 + 9.6392 / — 19.8914	90 + 24.5884 / — 4.9422	9 + 20.1772 / — 9.3534

Segue: PRONTUARIO PER IL CALCOLO DEI PRIMI NOVILUNI MEDI.

Migliaia	Centinaia	Diecine	Unità
		Anni giuliani a. Cr.	
0000 = 13.9822	—	—	—
1000 = 29.5214	100 $\frac{+\ 25.1784}{-\ 4.3522}$	10 $\frac{+\ 20.2362}{-\ 9.2944}$	1 $\frac{+\ 10.8828}{-\ 18.6478}$
2000 = 15.5300	200 $\frac{+\ 20.8262}{-\ 8.7044}$	20 $\frac{+\ 10.9418}{-\ 18.5888}$	2 $\frac{+\ 21.7656}{-\ 7.7650}$
3000 = 1.5386	300 $\frac{+\ 16.4740}{-\ 13.0566}$	30 $\frac{+\ 1.6474}{-\ 27.8832}$	3 $\frac{+\ 3.1178}{-\ 26.4128}$
4000 = 17.0778	400 $\frac{+\ 12.1218}{-\ 17.4088}$	40 $\frac{+\ 21.8836}{-\ 7.6470}$	4 $\frac{+\ 14.0006}{-\ 15.5300}$
5000 = 3.0864	500 $\frac{+\ 7.7696}{-\ 21.7610}$	50 $\frac{+\ 12.5892}{-\ 16.9414}$	5 $\frac{+\ 24.8834}{-\ 4.6472}$
6000 = 18.6256	600 $\frac{+\ 3.4174}{-\ 26.1132}$	60 $\frac{+\ 3.2948}{-\ 26.2358}$	6 $\frac{+\ 6.2356}{-\ 23.2950}$
7000 = 4.6342	700 $\frac{+\ 28.5958}{-\ 0.9348}$	70 $\frac{+\ 23.5310}{-\ 5.9996}$	7 $\frac{+\ 17.1184}{-\ 12.4122}$
8000 = 20.1734	800 $\frac{+\ 24.2436}{-\ 5.2870}$	80 $\frac{+\ 14.2366}{-\ 15.2940}$	8 $\frac{+\ 28.0012}{-\ 1.5294}$
9000 = 6.1820	900 $\frac{+\ 19.8914}{-\ 9.6392}$	90 $\frac{+\ 4.9422}{-\ 24.5884}$	9 $\frac{+\ 9.3534}{-\ 20.1772}$

Si adotta l'uno o l'altro numero del simbolo $\frac{+\ a}{-\ b}$, dove $a - (-b) = 29{,}5306$, in modo che, aggiungendolo algebricamente alla somma precedente, il risultato non superi mai il valore della lunazione.

Questo prontuario si riferisce alle formule (1), (2), (3).

Altre pubblicazioni dell'Autore:

G. R., *Come si costruisce il calendario di un dato anno gregoriano e giuliano*. Rivista « Ingegni e Congegni », a. XI, nn. 11, 12 (1941).

G. R., *Calendario perpetuo ecclesiastico*. Bolzano 1943. (Vincitore del concorso a premi bandito dal Ministero della P. I. nell'anno 1948). Cfr. Accademia Lincei, Estratto « Rendiconto Adunanze generali a Classi riunite (9 giugno 1949) », vol. V, fasc. 4.

G. R., *Il lunario perpetuo e la riforma del calendario*, Bolzano 1952.

G. R., *Nuovo metodo per la ricerca dei noviluni*, Bolzano 1952.

G. R. *La riforma del calendario* Rivista « Coelum », Bologna, vol. XX, 1952.

NUOVO METODO PER LE RICERCHE CRONOLOGICHE DEI CALENDARI

PRIMO NOVILUNIO DELL' ANNO RICAVATO DALLA FORMULA:

Resto di $\frac{\text{anno giuliano} \times 18{,}6478 + 24{,}865}{29{,}5306}$

PASQUA DIONISIANA E PASQUA GIULIANA

COMPUTO ECCLESIASTICO

CALENDARIO PERPETUO

PRIMO NOVILUNIO DELL' ANNO RICAVATO DALLA FORMULA:

Resto di $\frac{\text{anno gregoriano} \times 18{,}6553 + 23}{29{,}5306}$

PASQUA GREGORIANA

NUMERI AUREI DEGL' ANNI APPARTENENTI AI SECOLI 1500, 3400, 5300, ...

19	8	16	5	13	2	10	18	7	15	4	12	1	9	17	6	14	3	11
5	13	2	10	18	7	15	4	12	1	9	17	6	14	3	11	19	8	16	1600
10	18	7	15	4	12	1	9	17	6	14	3	11	19	8	16	5	13	2	1700
15	4	12	1	9	17	6	14	3	11	19	8	16	5	13	2	10	18	7	1800
1	9	17	6	14	3	11	19	8	16	5	13	2	10	18	7	15	4	12	1900

Per i secoli successivi aumentare di 5 unità i Numeri d'Oro della serie precedente, togliendo 19 dal risultato, ove occorra

1600, 2000, 2400, ...

1500, 1900, 2300, ...

1800, 2200, 2600, ...

1700, 2100, 2500, ...

1800, 2200, 2600, ...

1500, 1900, 2300, 2400, ...

1600, 2300, 2400, ...

Dr Ing. GILBERTO RICCI
BOLZANO MCMLII

Geofisica. — *Caratteristiche e genesi del moto ondoso del mare nel Golfo di Genova* (*). Nota di MARIO BOSSOLASCO, presentata (**) dal Socio C. SOMIGLIANA.

I processi secondo cui determinati fattori fisici dell'atmosfera agiscono sulla superficie del mare per generarne il moto ondoso sono lungi dall'essere chiariti. In effetti, poco si conosce sulle caratteristiche del moto ondoso, perché le osservazioni sistematiche al riguardo sono molto scarse presso le coste e quelle in mare aperto sono ancora più rare e sporadiche.

I lavori teorico-empirici di H. U. Sverdrup e W. H. Munk [1] hanno portato un notevole contributo per chiarire alcuni aspetti del problema, fornendo metodi di previsione utili sopratutto nel caso di mari aperti o meglio degli oceani, sebbene non siano sempre soddisfacenti a causa delle trasformazioni che il moto ondoso può subire dopo la sua genesi per il successivo intervento di altri fattori meteorologici. I medesimi procedimenti appaiono però nettamente meno appropriati se non inadatti per l'applicazione al Mediterraneo, specie per la sua configurazione irregolare, la presenza di isole, ecc. Di conseguenza, sono stato indotto ad esaminare in modo indipendente dalle precedenti ricerche le condizioni che regolano le variazioni del moto ondoso nel Golfo di Genova, servendomi delle registrazioni raccolte a Genova-Pra, dove dall'agosto 1951 funziona, praticamente senza interruzione, un registratore del moto ondoso marino, registratore costruito secondo un nuovo semplice principio, già altrove descritto [2] (1).

L'apparecchio trovasi installato all'estremità di un molo sporgente ortogonalmente alla costa per circa 150 m, dove la profondità media del mare è di circa 6 m. Dato che il molo poggia su pilastri in cemento armato, l'acqua circola liberamente fra essi. Al largo il fondo marino manifesta un leggero declivio in guisa che l'isobata di 50 m di profondità corre soltanto a 2 km di distanza dalla costa. Pertanto, le onde registrate a Genova-Pra debbono risentire l'influenza del fondo; tuttavia, risultando in generale la profondità $h > L/25$ (L = lunghezza delle onde), dette onde sono trasformate sì, ma con caratteristiche non troppo diverse da quelle delle onde al largo, cosicché i vari stati di agitazione del mare verificantisi nel Golfo vengono di solito conservati, sopratutto nella loro differenzazione reciproca.

Caratteristiche generali. - Poiché da un esame statistico dei dati empirici precedenti risulta che la frequenza dei casi di mare agitato è più

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto Geofisico e Geodetico dell'Università di Genova.

(**) Nella seduta del 13 dicembre 1952.

(1) Il principio consiste sostanzialmente nel trasformare l'escursione verticale che subisce la superficie del mare, per effetto del suo moto ondoso, nella compressione o dilatazione di una massa d'aria sovrastante racchiusa in un tubo chiuso superiormente da una membrana di gomma al centro della quale è vincolato il sistema mobile di registrazione.

elevata nei mesi da novembre a maggio, con massimi in novembre [2], in relazione alla maggior frequenza delle situazioni meteorologiche determinanti il moto ondoso, ho esaminato dapprima le registrazioni raccolte dal 1° novembre 1951 al 31 maggio 1952. Prescindendo da qualche giorno in cui la registrazione è mancata per ragioni di forza maggiore, si tratta di un complesso di 200 giorni completi nei quali per ogni ora venne dedotto sia il periodo medio come l'amplitudine media massima (nel senso delle onde significative).

Per il *periodo* delle onde, i valori trovati rientrano in generale in uno dei valori seguenti: 3,3; 4,0; 4,4; 5,0; 5,5; 6,0; 8,0; 10,0 sec. Le frequenze, in percento, relative ai sette mesi predetti sono distribuite come indica la Tabella I, nella quale venne pure riportata l'analoga distribuzione statistica corrispondente all'estate 1952 (trimestre: giugno–agosto).

TABELLA I.

Frequenze percentuali dei periodi.

	3,3 sec	4,0 sec	4,4 sec	5,0 sec	5,5 sec	6,0 sec	6,6 sec	8,0 sec	10,0 sec
Novembre 51–Maggio 52	0,8	2,5	4,8	25,0	5,7	2,7	28,9	13,9	15,7
Giugno–Agosto 1952 . .	1,6	14,2	9,5	31,5	22,8	—	15,2	5,2	—

Il confronto delle due serie di valori conferma il fatto ben noto secondo cui nei mesi durante i quali la superficie del mare è meno perturbata, ossia nell'estate, prevalgono i periodi brevi, mentre quando il mare è agitato (grosso o tempestoso) si hanno di solito, seppure non sempre, periodi lunghi. Nella mareggiata dell'11–12 novembre 1951 – la cui registrazione è andata persa, perchè i frangenti hanno rotto i vetri del casotto dove lo strumento trovasi installato con conseguente « lavatura » del diagramma – è da ritenere come quasi certo che il periodo delle onde superava i 10 sec.

L'*amplitudine* verticale (H) del moto ondoso, esaminata raggruppando i valori ad intervalli successivi con progressione di 8 cm, manifesta una distribuzione statistica del tipo di Poisson: così, per i sette mesi dal novembre al maggio, i valori molto piccoli sono rari, ma appena l'amplitudine cresce la frequenza aumenta fortemente, cosicchè i valori attorno a 40–50 cm sono i più frequenti; nel seguito si ha una diminuzione relativamente dolce fino a raggiungere valori molto piccoli per amplitudini maggiori di m 2,40. Da notare che tale distribuzione statistica dell'amplitudine appare relativamente regolare, in particolare assai più di quella della « ripidità » delle onde,

(2) Tale massimo assoluto in novembre è spiegabile facilmente con la massima vitalità o durata che il « ciclone di Genova » manifesta di regola proprio in questo mese [3].

che illustrerò fra breve: la spiegazione deriva dal fatto che, mentre l'amplitudine può variare assumendo tutta una serie progressiva di valori, il periodo assume valori determinati in numero assai ristretto, ciò che provoca una distribuzione più irregolare per la frequenza della ripidità.

Per non riprodurre in dettaglio i risultati esposti, ho riunito nella Tabella II le frequenze relative a gruppi progressivi delle amplitudini di 40 cm caduno, ottenendo una rappresentazione la quale, per quanto più grossolana, conferma il comportamento accennato.

TABELLA II.

Frequenze percentuali delle amplitudini (H).

	$0 < H \leq 40$ cm	$40 < H \leq 80$ cm	$80 < H \leq 120$ cm	$120 < H \leq 160$ cm	$160 < H \leq 200$ cm	$200 < H \leq 240$ cm	$240 < H \leq 270$ cm
Novembre 51–Maggio 52	32,2	32,3	19,2	8,4	5,2	3,2	0,5
Giugno–Agosto 1952 . . .	73,0	17,2	6,0	2,6	—	0,6	0,6

Nella stessa tabella figura pure l'analoga distribuzione delle amplitudini per il trimestre estivo 1952: come i dati originali mettono meglio in evidenza, essa dimostra che si ha pure una distribuzione del tipo di Poisson, però molto più addensata verso i bassi valori, nei confronti di quella relativa ai 7 mesi precedenti.

Mancando le registrazioni, per le ragioni già accennate, nella statistica precedente non è stato tenuto conto dei massimi assoluti di H verificatisi con la mareggiata dell'11–12 novembre 1951. In tale occasione, i valori di H hanno superato nettamente i massimi ottenuti nei 10 mesi esaminati (e che sono sempre inferiori ai 3 m, come indica la Tabella II): dati precisi non si dispongono, poichè la mareggiata è stata accompagnata da una « marea meteorologica » (non calcolabile nè precisabile, perchè anche il mareografo di Genova venne messo fuori funzione), cosicchè appare impossibile trarre deduzioni attendibili per l'effettiva amplitudine raggiunta dal moto ondoso, in base soltanto al livello raggiunto dai marosi sulla costa.

È noto che le onde, avvicinandosi alla costa, aumentano la loro *ripidità* [4]; nel caso presente, a seguito della debole e regolare pendenza del fondo e della circostanza che alla stazione di registrazione l'altezza dell'acqua raggiunge i sei metri, le onde non molto lunghe che ivi pervengono subiscono una variazione poco sensibile delle loro caratteristiche. Pertanto, mancando la misura della lunghezza delle onde, un'indicazione approssimata della loro ripidità si può avere calcolandola con la formola valida per acque profonde: $r = H/1{,}56\,T^2$, dove H è l'amplitudine in metri e T il periodo in secondi. I valori orari di questa grandezza (ripidità apparente) vennero calcolati per tutti i dieci mesi in esame; la corrispondente distribuzione stati-

stica è del tipo di Poisson, però, come già detto, con scostamenti nettamente più marcati della corrispondente distribuzione dell'amplitudine. I risultati ottenuti trovansi riassunti nella Tabella III, per la quale sono stati presi a base gruppi progressivi aventi ampiezza di 0.005.

TABELLA III.

Frequenze percentuali della ripidità apparente.

$r \cdot 10^{-2}$	0,0–0.5	0,051–0,10	0,101–0,15	0,151–0,20	0,201–0.25	0,251–0,30	0,301–0,35	0,351–0,40	> 0,401
Novembre 51–Maggio 52	18,2	37,1	19,3	10,9	9,1	3,7	0,5	0,4	0,9 (0,41–0,51)
Giugno–Agosto 1952 . . .	36,2	30,2	12,6	7,2	5,4	2,2	2,9	0,5	2,8 (0,41–0,66)

All'ovvia maggior frequenza delle basse ripidità nell'estate rispetto quelle medie degli altri sette mesi, fa contrasto l'incidenza di casi con ripidità molto elevata nell'estate. Questi ultimi corrispondono però alle particolari situazioni meteorologiche occorse il 10 ed il 19–20 agosto 1952, ambedue caratterizzate da una debole depressione allungata secondo NE–SW, passante per il Golfo di Genova, insieme al fronte freddo relativo. Infatti, la forma allungata delle depressioni (che non si presenta di solito nelle altre stagioni) ha generato venti orientali forti quasi paralleli alla costa con conseguente formazione di onde brevi, perché dovute all'azione diretta del vento in sito od a breve distanza, mentre le altre onde sono di solito generate al largo, a grande distanza, pervenendo poi sulle nostre coste grazie sopratutto ai venti del settore da SW a ESE.

Allo scopo di rendere più completo il quadro delle caratteristiche generali del moto ondoso, ho altresì esaminato le variazioni dell'amplitudine maggiori di 40 cm intervenute da un'ora alla successiva. Senza riprodurre la corrispondente tabella numerica, risulta che tali variazioni (sia di aumento che di diminuzione) sono state più frequenti nel trimestre novembre–gennaio. In media, nei sette mesi novembre–maggio le variazioni forti di aumento prevalgono sulle diminuzioni, sebbene la massima variazione assoluta sia stata registrata in novembre con una diminuzione di 2.24 m/h. Durante l'estate le variazioni orarie in oggetto non hanno mai superato il metro.

Cause meteorologiche delle variazioni del moto ondoso. – Data la complessità del fenomeno del moto ondoso, anziché procedere all'esame delle condizioni medie, appare più consigliabile analizzare lo sviluppo dei casi particolarmente marcati di trasformazione del moto ondoso per individuare con sicurezza le cause meteorologiche determinanti e trarre poi, se possibile, deduzioni generali in base al ripetersi delle medesime relazioni fra causa ed effetto.

Già nella nota [2] citata, in base all'analisi di qualche esempio tratto dai primi mesi di registrazione, venne messo in evidenza come gli aumenti più marcati del moto ondoso siano legati al passaggio di fronti freddi sul Golfo di Genova o, più generalmente, sul Mar Ligure.

Senza entrare in merito al meccanismo secondo cui un fronte freddo transitante sul mare interviene per provocare un aumento del moto ondoso, va notato che sempre i fronti freddi sono associati a variazioni rapide del campo barico in aree adiacenti, come si verifica di regola al lato sinistro del settore caldo di un ciclone delle latitudini medie. Sono così stato indotto a cercare se esistono eventuali rapporti di natura generale fra le variazioni rapide della pressione atmosferica e quelle del moto ondoso. Poiché le variazioni nel tempo della pressione atmosferica sono documentate dalle isallobare, le massime variazioni dello stesso fattore risultano individuate dalle aree di massima tendenza barometrica (in valore assoluto).

Fra le carte sinottiche a mia disposizione quelle contenenti le situazioni isallobariche e che pertanto poterono venir utilizzate furono: le « Wetterkarten » giornaliere del Deutscher Wetterdienst in der US–Zone, con una cartina delle isallobare alle ore 7 (tendenze calcolate alle 7 h, rispetto alle tre ore precedenti), nonché i « Bulletins d'Etudes de la Météorologie Nationale (Paris) », che riportano le cartine delle isallobare alle 6 h (tendenze dalle 3 h alle 6 h) ed alle 18 h (tend. 15 h–18 h).

L'esame di tutte le variazioni nette dell'amplitudine del moto ondoso nelle ore relative alle cartine isallobariche citate ha dapprima dimostrato che nessuna relazione diretta intercorre fra le medesime variazioni dell'amplitudine e le caratteristiche delle aree isallobariche ubicate sul mare quando la loro distanza da Genova supera i 250 km. Però, in simili casi, le variazioni dell'amplitudine a Genova–Pra sono quasi sempre di piccola entità.

Invece, tutte le variazioni *forti* dell'amplitudine del moto ondoso a Genova–Pra sono correlate con la presenza di aree isallobariche sul mare ad una distanza minore di 250 km da Genova, ossia col passaggio di un'area isallobarica o di una sua parte sul Mar Ligure.

L'esame ha potuto venir approfondito in 14 casi del tipo ora accennato, relativi al periodo novembre 51–aprile 1952, di cui 11 corrispondono ad un aumento dell'amplitudine ed i rimanenti 3 ad una diminuzione. Per ciascuno di essi la variazione dell'amplitudine venne posta in relazione con la massima tendenza barometrica esistente al centro dell'area isallobarica (nella sua parte situata sul mare), ottenendo i risultati riprodotti nella fig. 1.

Sebbene i casi presi in esame non sono numerosi, la fig. 1 permette di asserire che:

il passaggio di un'area isallobarica negativa o positiva sul Mar Ligure determina a Genova una variazione rispettivamente positiva o negativa dell'amplitudine, ossia un aumento od una diminuzione del moto ondoso;

approssimando con una retta di compenso i 14 punti della fig. 1, *la dipendenza della variazione dell'amplitudine dalla massima tendenza*

barometrica che la determina può venir rappresentata dalla relazione lineare:

$$\Delta H = -0{,}38\left(\frac{\Delta p}{3h}\right)_{max}.$$

Questi risultati – la cui validità non può ovviamente venir estesa senz'altro ad altri mari – sono giustificabili brevemente nel modo seguente.

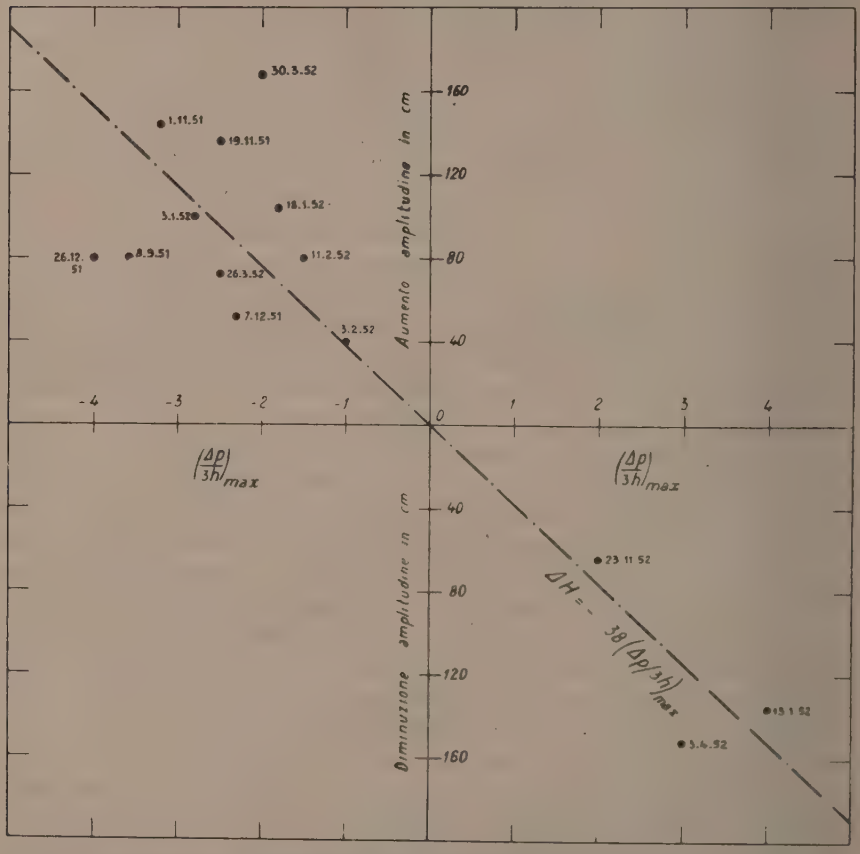


Fig. 1. – *Relazione fra la variazione* (ΔH) *dell'amplitudine del moto ondoso e la tendenza barometrica massima* $\left(\frac{\Delta p}{3h}\right)_{max}$ *in mb.*

Nelle nostre regioni, per il contrasto che deriva dalla presenza di mari, catene di monti ed isole, a non grandi distanze fra loro, le aree isallobariche hanno in generale uno sviluppo limitato e le rispettive dimensioni trasversali risultano piccole. Pertanto, di solito con una sezione trasversale si può definire il corrispondente punto di massima tendenza barometrica – punto d'incontro delle due falde del campo isallobarico – ed il luogo di questi punti costituisce l'*asse isallobarico* dell'area considerata: asse che è in realtà una

striscia o banda. Orbene, per un'area negativa, nei punti di detto asse si ha una convergenza del vento dalle due parti dell'asse medesimo, con la conseguenza che lungo quest'ultimo il contrasto orizzontale del vento determina un'azione risultante verso l'alto, che coinvolge l'acqua del mare, aumentandone, il moto ondoso. Nel caso opposto, allorchè il campo isallobarico è positivo, ai due lati adiacenti dell'asse il vento risulta divergente, il che provoca sull'asse stesso un richiamo di correnti d'aria discendenti, le quali determinano sull'acqua del mare un'azione equilibratrice che riduce l'amplitudine del suo moto ondoso.

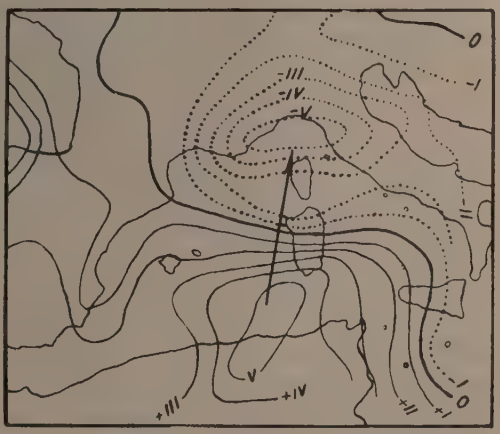


Fig. 2 – *Situazione isallobarica alle 18 h del'11 novembre 1951* (secondo il « Bulletin d'Etudes de la Météorologie Nationale », Paris).

Va notato che, sia nell'un caso come nell'altro, non solo l'asse isallobarico è soggetto in generale ad uno spostamento orizzontale, interessando quindi porzioni diverse della superficie del mare, ma anche che da ogni posizione dell'asse isallobarico le onde alterate trasmettono al largo le loro nuove caratteristiche con le velocità proprie del moto ondoso che, nel caso presente, implica il raggiungimento della costa entro qualche ora, al massimo. Naturalmente, intervengono altresì fenomeni di interferenza, diffrazione, ecc. delle onde, in funzione della configurazione isallobarica, della sua posizione e del suo spostamento rispetto alla costa, della configurazione di quest'ultima, ecc. La scarsità dei dati meteorologici sul mare e di quelli sul moto ondoso al largo rende per ora difficile se non impossibile precisare come tali fattori intervengano: tuttavia, approfondendo l'analisi del materiale d'osservazione, che sarà certamente più numeroso nei prossimi anni, si potrà giungere a risultati di maggior portata e precisione.

La mareggiata dell'11–12 novembre 1951. – Nel periodo considerato la più forte mareggiata che ha colpito il Golfo di Genova è stata quella dell'11–12 novembre 1951, le cui registrazioni sono andate distrutte per le ragioni già addotte.

La situazione meteorologica che ha determinato tale mareggiata può così riassumersi: Alle 18 h del g. 11 un ciclone secondario si presentava centrato poco ad W della Corsica, col relativo fronte freddo sviluppantesi verso SE e SSE. Il ciclone stava spostandosi rapidamente verso nord (NNE), con velocità di circa 40 km/h, poichè alle 6 h del giorno seguente già veniva a trovarsi centrato sul Parmense. A seguito di ciò, alle 18 h del giorno 11 si

aveva la configurazione isallobarica assai accentuata riprodotta nella fig. 2, indicante un massimo negativo della tendenza di oltre 5 mb/3 h centrato sul Golfo Ligure, con un andamento trasversale al Golfo stesso e quindi di massima attività sulle coste, in forza dello spostamento del ciclone verso nord. L'analisi di questa situazione isallobarica alla sera del giorno 11 novembre – secondo quanto ho dianzi esposto – avrebbe quindi consentito facilmente la previsione della forte mareggiata che ha colpito nella notte e nel mattino seguente le coste del Golfo di Genova (ciò che avrebbe altresì dato modo di ridurre sensibilmente i danni da essa causati).

Nell'esempio ora ricordato, oltre all'azione del campo isallobarico – che costituisce la causa principale della mareggiata – vi è stato altresì l'intervento del fronte freddo associato al ciclone, ma esso ha avuto soltanto un ruolo secondario, connesso al suo spostamento. Infatti, anche il 31 ottobre 1° novembre 1951 si è presentata sul Mar Ligure una situazione meteorologica analoga a quella dell'11–12 novembre 1951, a seguito della quale il fronte freddo associato alla depressione secondaria – spostatasi dall'Alto Tirreno (fra Nizza e la Corsica), ove si trovava centrata alle 18 h del 31 ottobre, al Modenese, ove risultava ubicata alle 6 h del 1° novembre – ha subìto uno spostamento non molto diverso da quello osservato per il fronte freddo di cui la mareggiata descritta, seppure con velocità minore (30 km/h); e ciò generando soltanto un mare leggermente agitato nel Golfo di Genova. Ed invero la differenza sostanziale dei due casi risulta costituita dalla diversità delle due configurazioni isallobariche, poichè al mattino (6 h-7 h) del 1° novembre la tendenza depressionaria massima sul Mar Ligure era di soli 3,2 mb/3 h, mentre, anzichè aversi una configurazione chiusa centrata sul Golfo di Genova come alla sera dell'11 novembre, la tendenza depressionaria si accentuava ad Oriente sul continente, il che ha determinato quindi lo spostamento del ciclone verso NE, con suo maggior approfondimento (oltre 10 mb), rispetto a quanto è avvenuto per il ciclone dell'11-12 novembre (approfondimento di soli 5 mb), la cui rotta è risultata diretta verso NNE, il che ha reso più marcata l'azione di sbarramento operata dalla configurazione del Golfo.

Note bibliografiche.

[1] H. U. Sverdrup & W. H. Munk, *Wind, Sea and Swell: Theory of relations for Forecasting;* Hydrographic Office, Publ. No. 601, Washington, March (1947).

[2] C. Bernasconi, M. Bossolasco & I. Dagnino, *Nuovo metodo di registrazione dello stato del mare e primi risultati ottenuti a Genova.* « Geofisica pura e applicata », vol. 21, p. 159-168 (1952).

[3] M. Bossolasco, *Il ciclone di Genova nel quadro del tempo in grande.* « Geofisica pura e applicata », vol. 11, pp. 122–126 (1948).

[4] H. B. Bigelow & W. T. Edmondson, *Wind Waves at Sea; Breakers and Surf,* Hydrographic Office, Publ. No. 602, Washington (1947).

Microcoulombometria. — *Sulla determinazione di n nell'elettrolisi polarografica accompagnata da processi secondari. Applicazione alla coulombometria del nitroprussiato*(*). Nota II di Pietro Lanza e Antonio Corbellini, presentata(**) dal Corrisp. G. Semerano.

L'applicazione alla microcoulombometria dei principî esposti nella Nota I (1) richiede un'adeguata apparecchiatura, in grado di garantire le condizioni che rendono valida l'equazione:

$$(1) \qquad n = -\frac{i_d}{2{,}203\ \mathrm{F}\ cv} \cdot \frac{dt}{d \log i_d} = -\frac{k}{222\ cv} \frac{dt}{d \log i_d}.$$

Per la validità della (1) si esige che la i_d sia corrente limite di diffusione e che la soluzione durante l'elettrolisi resti a concentrazione omogenea. Il volume deve essere sufficientemente piccolo per rendere sensibile l'effetto dell'elettrolisi sulla concentrazione e deve essere misurabile con notevole precisione. La soluzione sottoposta all'elettrolisi deve essere perfettamente disareata e mantenuta per tutta la durata dell'operazione in atmosfera di gas inerte.

Il metodo e l'apparecchiatura sono stati controllati misurando la n del processo di riduzione dello ione Cd^{++}, che notoriamente presenta un comportamento regolare, ed è stato poi applicato nella coulombometria del nitroprussiato che presentava difficoltà insormontabili con gli usuali procedimenti coulombometrici.

Apparecchiatura.

Cella. – La cella proposta, illustrata in fig. 1 permette la disareazione e l'elettrolisi sotto agitazione di piccoli volumi di soluzione (0,35–0,45 cc). Attraverso il tappo di gomma passano il capillare a 3 goccie, l'anodo, l'imbuto a rubinetto contenente la soluzione da disareare e un tubo per l'entrata dell'idrogeno.

La cella termina inferiormente in un capillare di ca. 2 mm di diametro, interno, collegato mediante un tubo di vipla ad una riserva atta a raccogliere il mercurio fluente in notevole quantità dal capillare.

Conferendo, mediante un semplice dispositivo a biella, un moto di saliscendi alla riserva di raccolta si impartisce al mercurio contenuto nella cella un movimento sufficiente a mantenere uniforme la concentrazione della soluzione durante l'elettrolisi.

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica-Fisica e Centro di Polarografia del C. N. R. di Padova.

(**) Nella seduta dell'8 novembre 1952.

(1) Questi «Rendiconti», vol. XIII, fasc. 6. pp. 406–411 (1952).

Elettrodi [2]. – Il catodo è costituito da un capillare a 3 goccie di mercurio; esso, permettendo un passaggio di corrente ca. 3-4 volte più intense che per i comuni capillari, riduce notevolmente il tempo richiesto dall'esperienza pur consentendo la registrazione, con la normale apparecchiatura polarografica, di ottimi diagrammi corrente–tempo. Con questi capillari, impiegando un volume di ca. 0,4 cc di soluzione, la registrazione coulombometrica può essere limitata a qualche minuto.

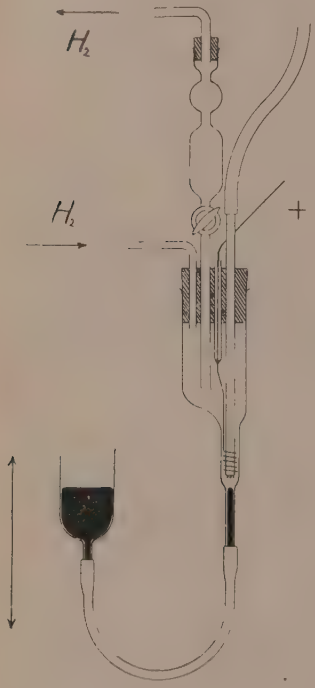


Fig. 1.

L'anodo è un filo di argento da 0,6 mm avvolto a spirale attorno al catodo e fissato con balsamo del Canadà ad un tubetto di vetro che attraversa il tappo. Data l'intensità della corrente usata e la necessità di mantenere piccolo il volume della soluzione, un anodo interno di mercurio necessariamente di superficie assai ridotta, sarebbe sottoposto a eccessive polarizzazioni.

Misura del tempo. – Sul diagramma della corrente registrato dal polarografo vengono battuti dei tratti verticali comandando mediante un orologio elettrico, ogni 50–100 secondi, l'accensione della lampada normalmente usata nella disposizione polarografica per segnare le ascisse dei diagrammi.

Si ottiene così direttamente il diagramma corrente–tempo.

Misura del volume. – Il volume della soluzione elettrolizzata si determina per pesata dell'imbutino all'inizio e alla fine dell'operazione.

COULOMBOMETRIA DEL CADMIO. – Il metodo e l'apparecchiatura sono stati sperimentati inizialmente nella coulombometria del Cd^{++}. È stata fatta passare corrente attraverso 0,45 cc di soluzione di concentrazione $2{,}84 \cdot 10^{-3}$ M avendo conferito al catodo di Hg un potenziale di −1,2 V (potenziale riferito all'anodo Ag AgCl). I dati ottenuti sono raccolti in tabella I e nel diagramma di fig. 2.

La corrente è corretta per il valore della corrente residua. Applicando l'equazione generale:

$$n = \frac{i_d}{2{,}303\, cv\, F} \cdot \frac{dt}{d \log i}$$

si ottiene per n il valore di 2,03.

In una seconda esperienza si è ottenuto il valore di 1,99.

(2) I capillari di vetro a tre o quattro fori ci sono stati gentilmente forniti dalla ditta Moretti Ulderico e C. di Murano (Venezia), che qui vivamente ringraziamo.

Tabella I.

t (sec)	i_d (Amp)	log i_d
0	$6{,}55 \cdot 10^{-5}$	$\bar{5}{,}816$
500	5,67·	,754
1000	4,96·	,695
1500	4,37·	,640
2000	3,87·	,588

Come si può osservare chiaramente dai diagrammi, il valore sperimentale di log i_d per $t = 0$ è sempre più alto di quello ottenuto per estrapolazione della retta tracciata sul diagramma con i valori di i_d per i tempi successivi. Tale comportamento è dovuto a una corrente iniziale di polarizzazione l'effetto è annullato però già dopo 30÷40 secondi. Tuttavia come valore di i_d per $t = 0$ si è preso quello ottenuto per estrapolazione dei diagrammi.

Coulombometria del nitroprussiato. – Il procedimento è stato successivamente impiegato nella determinazione della valenza dei processi che avvengono nella riduzione polarografica di soluzioni di nitroprussiato sodico. È noto che tale sostanza presenta all'esame polarografico in ambiente tamponato una curva con tre gradini i cui potenziali di semigradino per un pH intorno a 8 assumono i valori di $-0{,}39$; $-0{,}67$; $-1{,}58$ V (E.C.S.) e le cui correnti di diffusione stanno tra loro secondo la relazione $I'_d \approx I''_d \approx {}^1/_2\, I'''_d$ [3].

La coulombometria tentata con i metodi soliti ai potenziali di diffusione dei vari gradini aveva dato valori molto elevati e variabili con la durata dell'elettrolisi. L'analisi polarografica delle soluzioni elettrolizzate aveva rivelato, oltre ai gradini ordinari, una curva anodica al potenziale zero e un nuovo processo di riduzione a ca. $-0{,}2$ V. Lo studio particolareggiato della sostanza aveva poi indicato una possibilità di rigenerazione della sostanza di partenza, cioè del nitroprussiato, da parte delle sostanze ottenibili per riduzione.

La microcoulombometria eseguita al potenziale della corrente di diffusione, utilizzando il metodo precedentemente descritto, ha dato per il primo gradino valori di n troppo elevati.

[3] P. Lanza e A. Corbellini, *Studi sul nitroprussiato e complessi di struttura affine*. « Suppl. Ricerca sci. », 127-32 (1952).

Osservando i diagrammi dell'elettrolisi a potenziale costante, si nota che l'intensità di corrente, pur diminuendo inizialmente, dopo circa 200 secondi riprende a salire. Bisogna attribuire questo comportamento alle caratteristiche delle sostanze che si formano nel corso dell'elettrolisi e che dànno origine tra l'altro al gradino a potenziale — 0,2 V.

Le prestazioni del metodo si sono dimostrate in questo caso insufficienti a eliminare le influenze nocive delle reazioni secondarie.

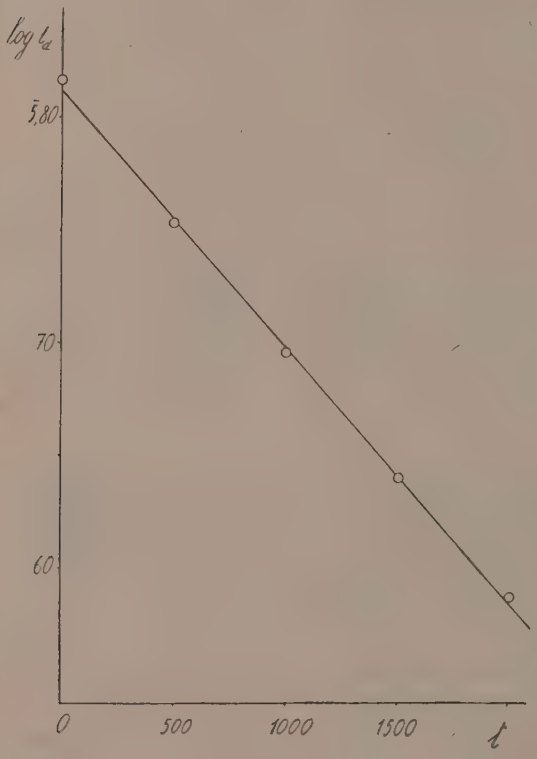


Fig. 2.

La coulombometria eseguita a — 0,9 V, potenziale della corrente di diffusione del secondo gradino del nitroprussiato, dà luogo a un diagramma lg i_d/t che, pur rivelando una iniziale diminuzione, raggiunge dopo ca. 500 secondi un valore costante che non accenna a variare ulteriormente pur continuando a lungo l'elettrolisi. Tale comportamento è spiegabile sia per analogia col processo al primo gradino, sia per la già accennata capacità delle sostanze ridotte a ricostituire il prodotto di partenza.

Tuttavia riportando in diagramma i valori di log i_d in funzione del tempo, si ottiene una curva anziché una retta: dal diagramma però si può facilmente dedurre il valore della derivata dt/d log i_d al tempo zero. Tale valore, introdotto nell'equazione risolutiva, dà valori di n molto prossimi a 2. In quattro successive esperienze si sono ottenuti i valori 2,06; 1,80; 2,18.

I dati relativi alla prima esperienza sono raccolti nella tabella II e illustrati dalla figura 3. Sono stati impiegati 0,35 cc di soluzione $1 \cdot 10^{-3}$ M.

La coulombometria eseguita in corrispondenza dei potenziali di diffusione del terzo gradino a – 1,7 V, dà valori della corrente che, riportati nel diagramma log i_d t, presentano fino a ca. 500 secondi il comportamento regolare: in seguito si fanno sentire però evidentemente effetti di reazioni secondarie. Tuttavia, da quattro successive esperienze, si sono ottenuti per n

i valori: 3,99; 3,68; 3,88; 4,03. I dati relativi alla prima esperienza sono raccolti nella tabella III e illustrati nella fig. 3. Sono stati impiegati 0,35 cc di soluzione $1 \cdot 10^{-3}$ M.

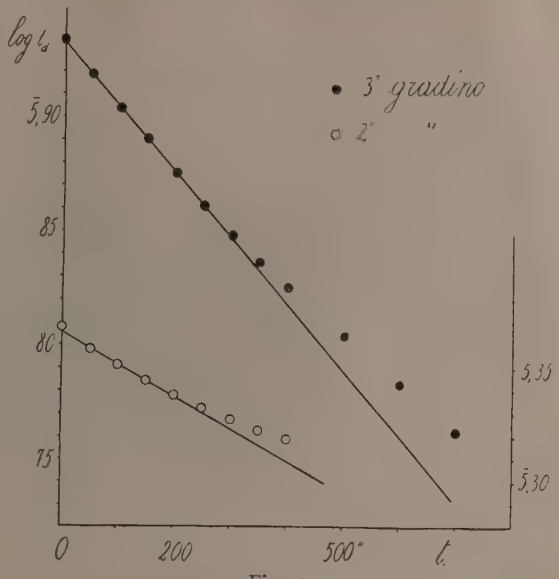


Fig. 3.

Per quanto riguarda il significato dei risultati coulombometrici ottenuti e l'interpretazione del meccanismo di riduzione del nitroprussiato si rimanda alla Nota citata [3]. Riteniamo sufficiente qui segnalare il comportamento coulombometrico di queste sostanze, costituendo esso un esempio molto interessante di elettrolisi o progressivamente complicata nel suo decorso dal subentrare di processi secondari.

Tabella II.

t (sec)	i_d (Amp)	lg i_d
0	2,335·10−5	$\bar{5}$,368
50	2,286·	,358
100	2,244·	,351
150	2,208·	,344
200	2,178·	,338
250	2,149·	,332
300	2,128·	,327
350	2,108·	,323
400	2.089·	,318

Tabella III.

t (sec)	i_d (Amp)	log i_d
0	8,576·10−5	$\bar{5}$,393
50	8,272·	,918
100	7,991·	,903
150	7,757·	,890
200	7,500·	,875
250	7,266·	,861
300	7,055·	,848
350	6,854·	,836
400	6,692·	,825
500	6.370·	,804
600	6.070·	,783
700	5.800·	,763

Il procedimento descritto ci ha permesso di superare questa difficoltà ed anche in altri casi ha potuto dare soddisfacenti risultati. Sono in corso ricerche per definire più esattamente le possibilità ed i limiti di impiego del metodo ed in particolare si sta indagando sulle possibili complicazioni dovute all'uso dell'anodo interno.

Chimica. — *Sul comportamento polarografico di alcuni derivati dello iodio positivo.* Nota I di ELENA FORNASARI, MARIA SCARPA e PIETRO LANZA, presentata(*) dal Corrisp. G. SEMERANO.

La presenza di alogeni nelle sostanze organiche può conferire ad esse attività polarografica (1); qualche volta essa si limita allo spostamento verso potenziali meno negativi del gomito della curva dell'elettrolita base, molto spesso però si manifesta con la comparsa di gradini in particolari zone di tutto l'intervallo di potenziali accessibile alle misure polarografiche.

Mentre il fenomeno fu messo per la prima volta in evidenza da Brdička (2), uno studio dettagliato sull'argomento è stato eseguito appena nel 1949 da v. Stackelberg e Stracke (3), che presero in esame una serie di numerosi composti organici alogenati accertando la reale esistenza di un'attività del raggruppamento atomico C– alogeno.

I fatti osservati da Pasternak e v. Halban (4) per l'acetofenone ed il suo ω–bromoderivato e i risultati dell'elettrolisi preparativa di v. Stackelberg e Stracke (3) dimostrano che il processo totale, che si compie all'elettrodo, è rappresentabile con l'equazione bruta:

$$RX+H^{+}+2e \longrightarrow RH+X \ .$$

Essa può essere scissa nella reazione elettrodica primaria:

$$RX+e \longrightarrow R+X^{-}$$

e in quelle secondarie:

$$R+e \longrightarrow R$$

$$R^{-}+H_2O \longrightarrow RH+OH \ .$$

Tale meccanismo tiene conto della irreversibilità del processo elettrodico degli alogenoderivati e interpreta l'indipendenza dal pH del potenziale di semigradino riscontrato nei casi in cui non si sovrappongono processi di dissociazione protonica.

Da questo schema risulta che, in definitiva, l'alogeno si trasforma in ione alogenidrico. Nessuna considerazione è stata fatta però sullo stato elettronico in cui l'alogeno si trova nel composto organico di partenza e quindi sulle differenze che possono esistere, caso per caso, nel meccanismo del pro-

(*) Nella seduta del 13 dicembre 1952.

(1) I. M. KOLTHOFF, e J. J. LINGANE, *Polarography*. Seconda edizione. New York, Interscience Publishers, 647–51 (1952).

(2) R. BRDIČKA, « J. Gen. Physiol. », *19*, 899–906 (1936).

(3) M. v. STACKELBERG e W. STRACKE, « Z. Elektrochem. », *53*, 118–25 (1949).

(4) R. PASTERNAK e H. v. HALBAN, « Helv. Chim. Acta », *29*, 190–9 (1946).

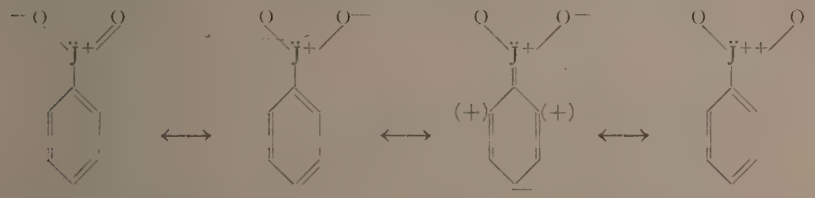
cesso elettrodico. Infatti, se si considera la serie di elettronegatività dei vari elementi componenti le sostanze organiche [5]

H	C	N	O	F	Cl	Br	J
2,1	2,5	3,0	3,5	4,0	3,0	2,8	2,5,

si deduce che, in generale, si può parlare di una elettronegatività dell'atomo di alogeno rispetto all'atomo di carbonio; soltanto l'atomo di iodio può fare forse eccezione a questa regola generale data la sua posizione nella serie su riportata. Numerosi sono però i casi in cui nella molecola organica sono presenti altri gruppi più negativi che provocano sull'atomo di alogeno una rarefazione della nuvola elettronica. Si deve allora parlare con una buona attendibilità di positività dell'alogeno presente [6]; naturalmente il fenomeno è più facile ad essere osservato con i composti organici iodurati.

Lo studio polarografico di queste sostanze presenta perciò un notevole interesse ed è per questa ragione che da qualche tempo questo laboratorio ha iniziato lo studio di una serie di composti organici iodurati piuttosto semplici.

Le ricerche cui si riferisce il presente lavoro riguardano una coppia di sostanze la cui costituzione e il cui comportamento chimico indicano la sicura positività dello iodio in esse contenuto. Esse sono i derivati ossigenati dello iodobenzene, iodoso- (C_6H_5JO) e iodil-benzene ($C_6H_5JO_2$); per l'ultimo di questi Bothner–By e Wheaton Vaughan, Jr. [7] hanno proposto recentemente le seguenti strutture elettroniche:



Lo iodosobenzene e lo iodilbenzene furono preparati per la prima volta nel 1892 da Willgerodt [8] e, quasi contemporaneamente, da Meyer [9]. Mentre lo studio delle loro proprietà chimiche è stato effettuato dagli stessi Autori, quello di alcune proprietà elettrochimiche delle soluzioni di queste sostanze è stato eseguito più tardi. Nel 1928 Grossmann [10] propose l'uso di un elettrodo reversibile di ossido riduzione a iodoso iodilbenzene per la misura del pH; esso non ha trovato però applicazioni. Nel 1935 Masson e Collabora-

(5) S. Glasstone, *Textbook of Physical Chemistry*. Seconda edizione. London, Mac Millan, 591 (1948).

(6) Ph. Fresenius « Angew. Chem. », *64*, 470-8 (1952).

(7) A. A. Bothner-By e C. Wheaton Vaughan, Jr. « J. Am. Chem. Soc. », *74*, 4400-1 (1952).

(8) C. Willgerodt, « Ber. », *25*, 3494 (1892).

(9) V. Meyer. « Ber. », *26*, 1356 (1893).

(10) F. Grossmann, « Bull. Soc. Chim. France », *43*, 1063 (1928).

tori [11] tentarono, con diverse tecniche, un'indagine strutturistica di queste sostanze, specialmente di $C_6H_5JO_2$. Scarsi sono stati in seguito gli studi su questi composti sebbene essi abbiano trovato qualche applicazione pratica come agenti ossidanti, sviluppatori fotografici, insetticidi.

La particolare struttura chimica di questi derivati dello iodobenzene e la stretta analogia formale con quella del sistema nitrosobenzene–nitrobenzene lasciavano prevedere aspetti interessanti per il comportamento all'elettrodo a goccia di mercurio del sistema iodosobenzene–iodilbenzene.

Nulla era noto finora a questo riguardo, nonostante le numerosissime ricerche polarografiche compiute ormai sulle sostanze organiche [12].

Lo studio sul quale si riferisce ha confermato in modo soddisfacente le previsioni teoriche, poiché, pur tenendo conto delle differenze tra i sistemi elettronici presenti negli atomi di azoto e di iodio, l'analogia di comportamento ossido–riduttivo delle due coppie di composti prima nominati si è dimostrata realmente esistente.

In questa prima Nota si riportano i risultati conseguiti nello studio polarografico dello iodilbenzene. In una Nota successiva sarà preso in considerazione il comportamento dello iodosobenzene e se ne trarranno le possibili conclusioni.

Parte sperimentale. – Le misure sono state eseguite con un polarografo campione costruito nel 1943 dalla Società Allocchio-Bacchini di Milano su indicazioni del prof. G. Semerano. Le celle elettrolitiche erano a setto poroso con elettrodo di riferimento a calomelano saturo. Le soluzioni sono state disareate con idrogeno elettrolitico ulteriormente purificato in modo opportuno.

La temperatura d'esperienza è stata di $25 \pm 0{,}1°$ C. La costante del capillare $m^{2/3} t^{1/6}$ era 1,839 $mg^{2/3} \cdot sec^{-1/2}$ (misurata a circuito aperto).

Lo iodilbenzene è stato preparato, una prima volta, col metodo di Ortoleva [13] ossidando con cloro gassoso lo iodobenzene sciolto in piridina satura d'acqua. Per avere una resa migliore, si è ripetuta la preparazione con il metodo di Bamberger e Hill [14], sbattendo lo iodobenzene con persolfato potassico in soluzione solforica. I prodotti ottenuti con i due metodi presentavano identico comportamento polarografico.

A causa della decomposizione termica esplosiva ad alta temperatura delle sostanze in istudio, il controllo della purezza dei vari prodotti cristallizzati o non cristallizzati, da acqua o da acido acetico, non si è potuto effettuare mediante determinazione del punto di fusione, ma è stato eseguito per via spettrografica.

Lo iodosobenzene è stato preparato col metodo di Willgerodt [13] idrolizzando con una soluzione di idrato sodico al 4–5 % il cloruro di iodobenzene

(11) J. Masson, E. Race e F. E. Pounder, « J. Chem. Soc. », 1669 (1935).
(12) J. E. Page, « Quart. Revs. », *6*, 262–301 (1952).
(13) G. Ortoleva, « Gazz. Chim. Ital. », *30*, II, 4 (1900).
(14) B. Bamberger e A. Hill, « Ber. », *33*, 534 (1900).

($C_6H_5JCl_2$) ottenuto trattando con cloro gassoso lo iodobenzene in soluzione cloroformica. Poiché lo iodosobenzene è pochissimo solubile nella maggior parte dei solventi organici più comuni, e subisce dismutazione in acqua, non è stato possibile purificarlo per ricristallizzazione ma ci si è dovuti accontentare di usare per la preparazione reagenti purificati.

Comportamento polarografico dello iodilbenzene. – I polarogrammi ottenuti per lo iodilbenzene hanno un aspetto differente a seconda della concentrazione delle soluzioni impiegate. Per concentrazioni inferiori a $2 \cdot 10^{-4}$ M, in ambiente neutro o alcalino, si ottengono due gradini, il secondo dei quali ha altezza un po' inferiore alla metà di quella del primo.

L'altezza di entrambi i gradini è proporzionale alla concentrazione dello iodilbenzene nella soluzione. I valori medi delle costanti i_d/C sono per i due gradini, rispettivamente, 12,15 e 4,49 μA/mM, nelle condizioni sperimentali suddette. In base a questi valori è stato poi possibile determinare la solubilità in acqua dello iodilbenzene a 25° C. Il valore ottenuto ($1{,}44 \cdot 10^{-2}$ M/l) si inserisce bene tra quelli di una serie di determinazioni di solubilità eseguite da Masson e Collaboratori con altra tecnica [11].

Impiegando una soluzione base costituita dal tampone di Britton (acido acetico, acido borico e acido fosforico 0,04M + NaOH 0,2 N), si è quindi stabilita la dipendenza dei processi di riduzione relativi ai due gradini dal pH del mezzo. Per quanto si riferisce al potenziale di semionda del primo gradino vale la dipendenza risultante dalla tabella I.

Tabella I.

pH	$\pi_{1/2}$
1,81	0,00
4,6	0,04
7,2	0,22
8,7	0,25
11,7	0,28

Tabella II.

pH	$\pi_{1/2}$
1,81	—
4,6	—
7,2	1,72
8,84	1,74
9,7	1,74
11,2	1,74

Dai dati riportati si deduce che, la dipendenza si avvicina al valore teorico di 58 mV per unità di pH solo nell'intervallo di pH 5–7, mentre nei campi acido ed alcalino se ne discosta fortemente, come se si trattasse della riduzione di una base, rispettivamente di un acido, dissociati. Ciò verrebbe a confermare le ipotesi di Masson e Collaboratori [11] per cui lo iodilbenzene ha un comportamento anfotero e si può legare in modo reversibile sia con H^+ che con OH^-.

Il potenziale di mezzo del secondo gradino è invece indipendente dal pH, almeno nell'intervallo in cui si può sperimentare (tabella II ; in ambiente fortemente acido, il secondo gradino risulta coperto dalla curva di deposizione dello ione idrogenico.

Al variare dell'altezza della riserva di mercurio, l'altezza del primo gradino si modifica nel modo indicato dalla tabella III. La costanza del rapporto $i_d/\sqrt{h_{Hg}}$ è buona ma non rigorosa; dalla considerazione del leggero aumento dei valori al crescere di h, si può quindi trarre la conclusione che il gradino sia dovuto sostanzialmente a fenomeni di diffusione, pur non escludendo un piccolo contributo di processi di adsorbimento.

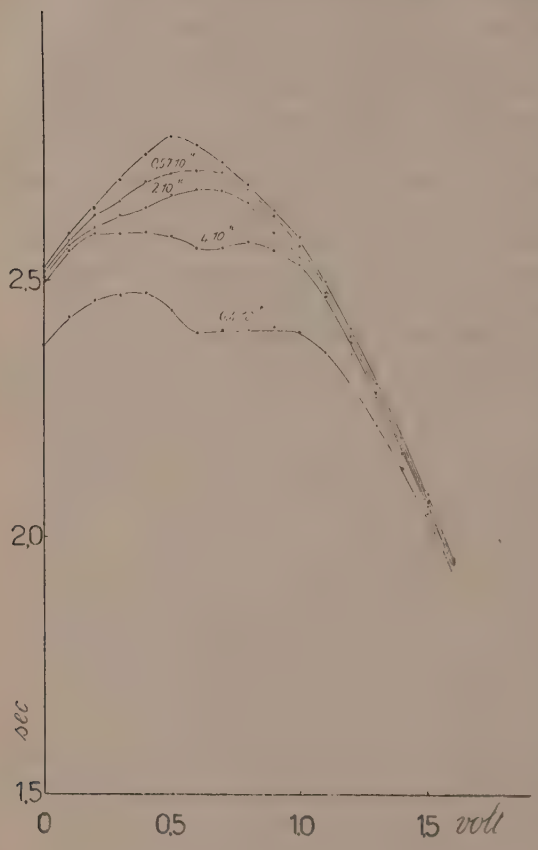


Fig. 1.

Per concentrazioni superiori a $2 \cdot 10^{-4}$ M, la curva polarografica si deforma fino a potenziali di ca. —1 V; la deformazione diventa sempre più notevole man mano che la concentrazione aumenta ed è infine accompagnata dalla scissione del primo gradino in un numero variabile di gradini più bassi non definiti e poco riproducibili. L'aggiunta di gelatina alla soluzione fonde questi piccoli gradini dando una curva continua a pendenza man mano crescente che verso —1 V riassume l'andamento normale; il risultato finale è che il primo gradino appare spostato verso potenziali più negativi (fino a ca. —0,6 V per le concentrazioni più elevate ; altezza globale della serie di gradini rimane però sempre proporzionale alla concentrazione dello iodilbenzene nella soluzione.

Alla deformazione dei gradini fa riscontro una deformazione delle curve elettrocapillari del mercurio; queste ultime furono rilevate nelle stesse condizioni sperimentali, allo scopo di svelare eventuali concomitanti fenomeni di adsorbimento, e sono state tracciate riportando in un diagramma, in funzione del potenziale i tempi di gocciolamento del mercurio dal capillare in

soluzioni ottenute per successive diluizioni di una soluzione di concentrazione iniziale $6{,}4 \cdot 10^{-4}$ M (ved. fig. 1).

L'andamento delle curve polarografiche ed elettrocapillari dimostra l'esistenza di cospicui fenomeni di adsorbimento all'interfase elettrodo–soluzione. Non si tratta però della comune deformazione delle curve polarografiche ad opera di sostanze estranee, impurezze o comuni soppressori di

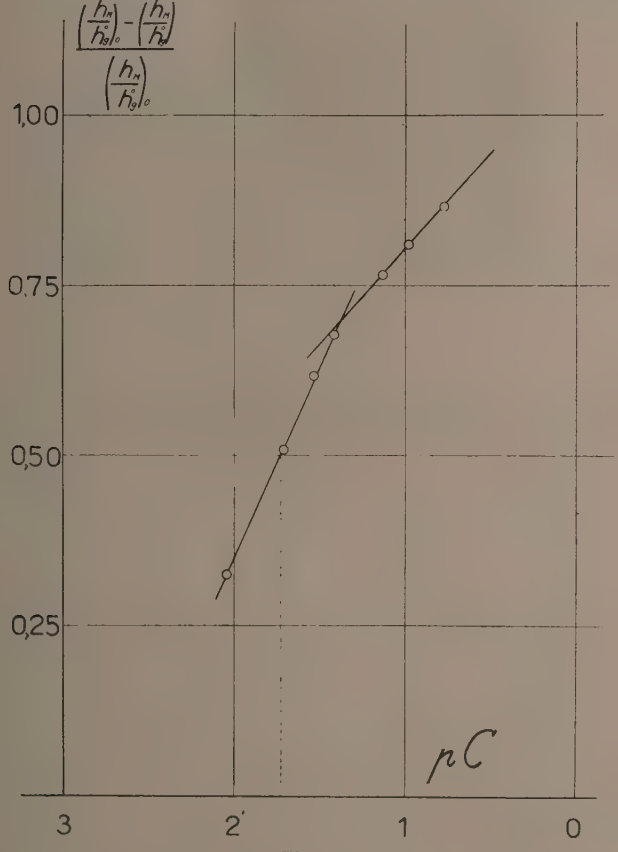


Fig. 2.

massimo [15]. Dato il progressivo aumento della deformazione al crescere della concentrazione della sostanza interessata al processo elettrodico, si è portati piuttosto a pensare che la sostanza riducibile stessa oppure il suo prodotto di riduzione parziale (ved. oltre) provochi in qualche modo un ostacolo alla riduzione. L'azione dello iodilbenzene risulterebbe confermata dal fatto che esso è una sostanza superficialmente attiva; le sue soluzioni

(15) M. A. Loshkarev e A. A. Kryukova, «Doklady Akad. Nauk S.S.S.R.», *72*, 1919–22 (1950).

formano schiume persistenti se sbattute energicamente e sopprimono gradualmente il massimo polarografico dell'ossigeno. La misura quantitativa di questa attività è stata effettuata osservando la diminuzione del massimo dell'ossigeno in soluzione di LiCl $2{,}6 \cdot 10^{-3}$ M, per progressive aggiunte di piccole quantità di una soluzione di $C_6H_5JO_2$ in LiCl della stessa concentrazione. I risultati di queste misure sono raccolti nella tabella IV e illustrati dal grafico di fig. 2.

TABELLA III.

h_{Hg}	i_d	$i_d/\sqrt{h_{Hg}}$
40 cm.	1,36 A	0,215
57 cm.	1,70 A	0,225
77 cm.	2,05 A	0,231

TABELLA IV.

$C_{C_6H_5JO_2}$ (mM/l)	pC	h_M	h_g	h_{M,h_g°	$\frac{(h_{M/h_g^\circ})_0 - (h_{M/h_g^\circ})}{(h_{M,h_g^\circ})_0}$
0,00	—	129,9	19,3	6,725	—
$0{,}99 \cdot 10^{-2}$	2,046	86,9	22,3	4,51	0,325
$1{,}96 \cdot$	1,708	63,6	23,4	3,3	0,509
$2{,}91 \cdot$	1,536	49,5	23,8	2,56	0,618
$3{,}85 \cdot$	1,415	42,5	24,8	2,2	0,673
$7{,}4 \cdot$	1,131	30,3	26,8	1,57	0,766
$10{,}8 \cdot$	0,971	24,5	28,9	1,27	0,81
$16{,}8 \cdot$	0,775	17,4	33,4	0,9	0,866

Dal grafico si ricava che il colog. della concentrazione di iodilbenzene necessaria affinché l'altezza del massimo si riduca a metà essa si assume di solito come misura dell'attività superficiale di una sostanza, è 1,725. Poiché i gradini di riduzione dell'ossigeno e dello iodilbenzene cadono vicinissimi, le piccole aggiunte di iodilbenzene provocano sui polarogrammi un aumento nella corrente di diffusione. Per questa ragione si sono calcolati i rapporti tra l'altezza del massimo e l'altezza del gradino dell'ossigeno

h_{M/h_g°, assumendo sempre per h_g° il valore dell'altezza del gradino del solo ossigeno, cioè del gradino che si ottiene prima dell'aggiunta di $C_6H_5JO_2$. Per ogni aggiunta di $C_6H_5JO_2$ si è sempre controllato se la differenza di altezza tra il gradino ottenuto e quello del solo ossigeno corrispondeva esattamente a quella che era da attendersi per il $C_6H_5JO_2$ aggiunto (costante i_d/C relativa, già nota). La coincidenza non è stata molto buona, soprattutto per le basse concentrazioni: le correnti misurate sono risultate maggiori di quelle previste. Si deve quindi pensare ad un'influenza reciproca tra il gradino dell'ossigeno e quello dello iodilbenzene, che si attenua naturalmente man mano che il primo diminuisce di fronte al secondo.

Quanto sopra espone le caratteristiche del quadro polarografico presentato dallo iodilbenzene. Lo schema del meccanismo di riduzione suggerito dall'insieme dei fenomeni osservati viene rimandato ad un'altra Nota, quando sia stato preso in esame anche il comportamento elettrochimico dello iodosobenzene.

Chimica. — *Titolazione amperometrica del rame con etilxantato di potassio* (*). Nota di ELENA GAGLIARDO e MAGDA KÖRNER, presentata (**) dal Corrisp. G. SEMERANO.

Il tentativo di sostituire nell'analisi sistematica dei cationi metallici pesanti l'idrogeno solforato, reattivo gassoso e quindi difficilmente dosabile, ha portato molti ricercatori a studiare altre sostanze che si comportano come l'idrogeno solforato, ma non presentano l'inconveniente di essere gassose.

Dalla letteratura risulta che notevole importanza in questo senso ha assunto l'etilxantato di potassio, il quale permette l'identificazione e la separazione di un certo numero di elementi del gruppo dell'idrogeno solforato.

Un esame dettagliato di varie applicazioni analitiche dell'etilxantato di potassio è stato compiuto da Wenger e Collaboratori [1, 2, 3].

L'impiego di questo reattivo è stato finora limitato al campo della analisi ponderale e volumetrica ordinaria, ma non è stato ancora, a quanto ci risulta, esteso all'analisi amperometrica.

Nel presente lavoro abbiamo curato la messa a punto della titolazione amperometrica del rame, che è il metallo che più di frequente viene dosato con l'etilxantato di potassio. Questo elemento precipita infatti, in opportune condizioni, in forma quantitativa come etilxantato di rame giallo.

(*) Lavoro eseguito nel Centro di Polarografia del Consiglio Nazionale delle Ricerche, Padova.

(**) Nella seduta del 13 dicembre 1952.

(1) P. WENGER, Z. BESSO e R. DUCKERT, «Mikrochemie», *31*, 145 (1943).

(2) P. WENGER, Z. BESSO e R. DUCKERT, «Helv. chim. acta», *27*, 291 (1944).

(3) P. WENGER, R. DUCKERT e E. ANKADJI, «Helv. chim. acta», *28*, 1316 (1945).

Un dosaggio volumetrico molto sensibile del rame con lo xantogenato di potassio, usando come indicatore la difenilcarbazide simmetrica, fu messo a punto da Oddo [4]: la titolazione è basata sul fatto che il rame forma con la difenilcarbazide il difenilcarbazone rameoso violetto; questo colore permane finché non si sia aggiunta la quantità teorica del reattivo, e sparisce non appena se n'è aggiunto un piccolo eccesso. Un viraggio anche più netto si ottiene se alla soluzione dello xantogenato, contenente la difenilcarbazide viene aggiunta la soluzione di rame: al punto equivalente compare

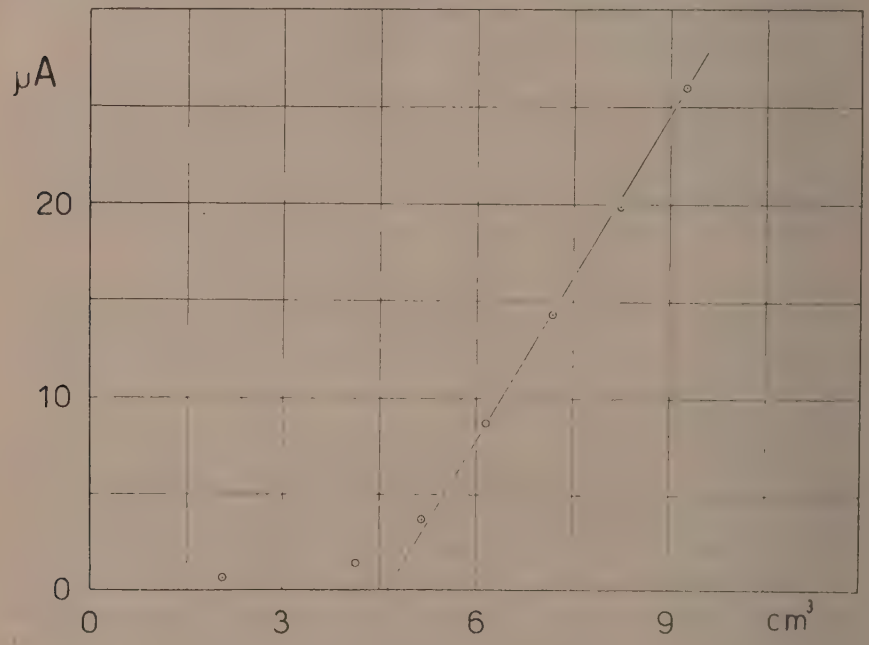


Fig. 1.

un colore rosso mattone complementare del violetto del carbazone rameoso e del giallo dello xantogenato di rame.

Poiché questo cambiamento di colore della soluzione, pur essendo netto, è poco persistente, si è pensato di ricorrere alla indicazione galvanometrica per il rilevamento del punto di equivalenza. Il caso si è presentato particolarmente favorevole, perchè il rame è facilmente dosabile per via polarografica.

Un esame preliminare del comportamento polarografico dello xantogenato di potassio [5] ha messo in evidenza che questa sostanza non

(4) B. Oddo, « R. Accad. Naz. Lincei, Rendiconti », [5], *12*, II, 435 (1903); « Gazz. chim. ital. », *33*, 134 (1903).

(5) Un esame dettagliato del comportamento polarografico dello xantogenato di potassio è allo studio in questo Laboratorio.

presenta gradini di riduzione che interferiscano con quelli del rame; quindi, ponendosi a un potenziale sufficientemente negativo, tale da permettere lo stabilirsi del regime di diffusione del secondo gradino del metallo, si può seguire la variazione dell'intensità della corrente del rame durante la titolazione.

PARTE SPERIMENTALE. – Allo scopo di poter confrontare direttamente i risultati amperometrici con quelli ottenuti per via volumetrica, si è curato che le condizioni sperimentali fossero identiche in entrambi i casi.

Quindi, dovendo nella titolazione volumetrica aggiungere la soluzione di rame alla soluzione di xantogenato (secondo il suggerimento di Oddo, per ottenere un viraggio più netto dell'indicatore), anche nella titolazione amperometrica si è seguìto lo stesso procedimento; è così pure, nella titolazione volumetrica, il rame e lo xantogenato erano sciolti nella soluzione base adottata per il metodo elettrometrico.

La misura è stata eseguita con Voltamoscopio Cambridge.

Tutte le esperienze sono state condotte in ambiente di idrogeno.

Si è preparata una soluzione di solfato di rame $2 \cdot 10^{-2}$ M titolata per via elettrolitica.

Le soluzioni di xantogenato (Merk, puro per analisi) dovevano essere preparate di volta in volta, dato che si alteravano rapidamente intorbidandosi e venivano tarate per via volumetrica.

Come elettrolita base si è usata una soluzione di NaCl N/2, contenente 0,05 % di gelatina.

La verifica della proporzionalità fra i_d e C per il rame nella soluzione base adottata è riportata in tabella I.

TABELLA I.

Verifica della proporzionalità fra i_d *e* C *per il rame in* NaCl N/2; V = — 0,4 V (E. C. S.); T = 25° ± 0,1° C.

C in mmole/l	i_d/C in μA/mmole
1,50	8,52
1,84	8,61
2,18	8,60
2,48	8,55
3,08	8,56
3,36	8,58
	media . . . 8,57 ± 0,6 %

Si sono quindi titolate soluzioni ca. $6{,}6 \cdot 10^{-3}$ M di etilxantato di potassio con la soluzione di rame al potenziale costante di — 0,4 V (E.C.S.). Le soluzioni di etilxantato venivano inoltre titolate ogni volta volumetricamente secondo il metodo di Oddo.

Le misure erano fatte a temperatura ambiente; la costanza della temperatura era verificata durante tutto il tempo della titolazione.

Il grafico riportato in fig. 1 rappresenta una tipica curva di titolazione ottenuta col metodo amperometrico proposto. Come si vede da esso, le due rette hanno un raccordo piuttosto pronunciato e questo viene attribuito generalmente a una certa solubilità del precipitato: difatti, il tentativo di eseguire la titolazione, operando con soluzioni dieci volte più diluite, non ha dato buoni risultati. Il limite inferiore di concentrazione, al quale la titolazione amperometrica proposta può essere utilizzata è quindi circa 10^{-3} M.

In tabella II sono riportati alcuni dei risultati ottenuti col metodo amperometrico e volumetrico.

TABELLA II.

Confronto dei risultati ottenuti col metodo amperometrico e volumetrico per alcune titolazioni di rame con etilxantogenato di potassio.

mmole di rame $\cdot 10^2$ trovate col metodo amp.co	mmole di rame $\cdot 10^2$ trovate col metodo volumetrico
9,21	9,33
9,45	9,53
4,63	4,53
5,12	5,12

Il metodo proposto può essere usato vantaggiosamente per analisi in serie: la soluzione di xantogenato, preparata di fresco, e tarata con una soluzione titolata di rame può essere successivamente usata per la determinazione del contenuto in rame di una serie di soluzioni incognite.

Si è tentato di estendere il metodo di titolazione proposto alla determinazione del nichel e del cobalto, ma si sono avuti risultati negativi perché questi elementi, alle solite concentrazioni usate nell'analisi polarografica, precipitano troppo lentamente.

Chimica. (Chimica fisica). — *Velocità ultrasonora e proprietà termodinamiche adiabatiche di composti organici liquidi* (*). Nota di FERDINANDO DANUSSO e ELISA FADIGATI, presentata (**) dal Corrisp. G. NATTA.

Nel corso di varie esperienze che comportavano misure di velocità ultrasonora e densità di liquidi organici e loro miscele, abbiamo avuto occasione di raccogliere un complesso di dati su liquidi puri, che solo in piccola parte sono stati resi noti in precedenti pubblicazioni da uno di noi.

Poiché attualmente nella letteratura sull'argomento pochi sono ancora i dati di velocità ultrasonora di precisione sufficiente a garantire considerazioni di carattere teorico, sopratutto sulle relazioni con la struttura dei liquidi esaminati, riteniamo utile rendere noti i risultati delle nostre misure al fine di contribuire ad estendere il più possibile l'attuale patrimonio sperimentale ed offrire maggiori possibilità di critica ai dati esistenti.

Accanto ai dati di misura diretta, indicheremo spesso i valori di due grandezze di natura termodinamica: la compressibilità adiabatica β e l'energia Φ assorbita da una mole di liquido nella compressione adiabatica unitaria (1), rispettivamente definite ed espresse dalle seguenti relazioni:

$$\beta \equiv -\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_S = \frac{1}{\rho u^2} \tag{1}$$

$$\Phi \equiv \left(\frac{\partial U}{\partial p}\right)_S = \frac{pM}{\rho^2 u^2} \tag{2}$$

in cui V è il volume del sistema, p la pressione, ρ la densità, u la velocità ultrasonora, U l'energia interna di una mole di liquido, M la massa molecolare ed S un indice che contrassegna l'adiabaticità della trasformazione (entropia S costante).

Utilizzando, poi, i dati sperimentali di vari Autori (2), che al vaglio della critica risultarono di miglior precisione, e quelli qui presentati, abbiamo calcolato per diverse serie di composti i valori della funzione empirica:

$$D_a = u^{\frac{1}{2}} \frac{M}{\rho} \tag{3}$$

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica Industriale del Politecnico di Milano.

(**) Nella seduta del 13 dicembre 1952.

(1) F. DANUSSO, « Rend. Accad. Naz. Lincei », IX, 351 (1950).

(2) FREYER, HUBBARD, ANDREWS, « J. A. C. S. », *51*, 759 (1929); LAGEMANN, MC MILLAN, WOOLSEY, « J. Chem. Phys. », *16*, 247 (1948); A. WEISSLER, « J. A. C. S. », *70*, 1634 (1948); « J. A. C. S. », *71*, 421 (1949); LAGEMANN, MC MILLAN, WOOLF, « J. Chem. Phys. », *17*, 369 (1949); WEISSLER, DEL GROSSO, « J. A. C. S. », *72*, 4209 (1950); LAGEMANN, GWIN, ecc., « J. A. C. S. », *73*, 3213 (1951).

messa in evidenza da uno di noi [3], che, in una classe di funzioni simili, tra cui figurano quella di Rao [4] e quella di Schaaffs [5], si è dimostrata dotata della maggiore additività molecolare (intesa, questa, come possibilità di calcolare la funzione per una data molecola come somma di valori attribuibili a ciascuno dei gruppi atomici componenti). Da tutti i valori della D_2 calcolati, si è ricavata una tabella di « valori di gruppo » più probabili per tutti i gruppi atomici significativi per cui è stata possibile la determinazione. Si è infine brevemente discussa la possibilità di impiego di tali valori nella previsione delle velocità ultrasonore di liquidi a densità e struttura molecolare nota.

Le misure di densità sono state eseguite in picnometro, mentre le velocità ultrasonore sono state determinate con un apparecchio a frequenza costante di 4 MHz, la cui parte elettrica è stata messa a punto all'Istituto di Ultracustica del C. N. R. a Roma. Con tale apparecchio le misure sono state effettuate per via ottica, in una cella a doppio quarzo del tipo descritto da Giacomini [6] e termostatata.

TABELLA I.

Velocità ultrasonora e proprietà meccaniche adiabatiche dell'acqua a varie temperature.

t °C	u m/sec	β $\frac{cm^2 \cdot 10^{-12}}{dine}$	Φ $\frac{cal \cdot 10^{-6}}{mole\ at}$
10	1450	47,58	19,71
20	1485	45,43	18,85
30	1512	43,93	18,27
40	1531,5	42,97	17,94
50	1544	42,45	17,79
60	1552,5	42,20	17,78
70	1556	42,24	17,89
80	1555,5	42,53	18,13

In base alle caratteristiche degli apparati sperimentali e al metodo di misura usato, i dati qui presentati possono essere considerati affetti da un errore accidentale medio del 0,02 % per le densità e del 0,1 % circa per le

(3) F. DANUSSO, « Ricerca Scientifica », *20*, 1481 (1950).
(4) M. RAMA RAO, « Ind. J. Phys. », *14*, 109 (1940).
(5) W. SCHAAFFS, « Z. Physik. Chem. », *194*, 39 (1944); *194*, 66 (1944).
(6) A. GIACOMINI, « Rend. Accad. Naz. Lincei », *11*, 791 (1947).

velocità ultrasonore. Benché l'approssimazione di tali misure possa apparire soddisfacente (l'approssimazione del 0,1 % per le velocità è oggi tra le migliori), è d'altra parte ovvio che le più importanti cause d'errore possono risiedere nella purezza delle sostanze usate e nella taratura o negli errori sistematici degli apparati sperimentali.

Per quanto riguarda gli eventuali errori sistematici dell'apparecchio usato per le velocità ultrasonore, diamo in tabella I le velocità dell'acqua a varie temperature, ottenute da una curva media risultante da 32 determinazioni indipendenti. Non si sono notate differenze sostanziali tra acqua distillata e degasata e acqua non distillata (della rete di distribuzione cittadina).

L'equazione della curva velocità-temperatura può essere, per l'acqua, espressa nella semplice forma analitica:

$$u = 1413 + 4{,}14\,t - 0{,}03\,t^2 \qquad \begin{matrix} u \text{ in m/sec} \\ 5° \leq t \leq 80°\,\text{C} \end{matrix} \tag{4}$$

qualora ci si accontenti di uno scarto massimo dai valori reali di 2 m/sec. Volendo limitare lo scarto massimo a meno di 0,5 m/sec, si può utilizzare una delle seguenti relazioni:

$$u = 1408 + 4{,}584\,t - 0{,}0373\,t^2 \qquad 5° \leq t \leq 50°\,\text{C} \tag{5}$$

$$u = 1428{,}5 + 3{,}524\,t - 0{,}0243\,t^2 \qquad 50° \leq t \leq 80°\,\text{C} \tag{6}$$

valide in due intervalli diversi di temperatura.

Circa i valori massimi o minimi della velocità e delle altre due grandezze riportate in tabella I, dalle nostre osservazioni si ottengono i seguenti dati:

$$u\ \text{max} = 1556{,}5 \quad \text{a} \quad t = 72°{,}5$$

$$\beta\ \text{min} = 41{,}17 \quad » \quad t = 64°$$

$$\Phi\ \text{min} = 17{,}77 \quad » \quad t = 56°$$

da cui si deduce che una data massa d'acqua assorbe, nella compressione adiabatica, la minima energia meccanica a 56°, subisce la minima deformazione geometrica a 64°, mentre presenta la massima trasmissione acustica a 72°,5.

Nella tabella II sono raccolti i dati su 40 liquidi organici, misurati tutti a 30° C. Come già altre volte si è messo in evidenza, si nota diminuzione della compressibilità con l'aumentare del peso molecolare in serie omologhe, accompagnata dall'aumento dell'energia assorbita dalla molecola, dovuto al crescere delle possibilità nella configurazione delle molecole più grandi; diminuzione di compressibilità e di energia assorbita per introduzione in una data molecola di gruppi atomici fortemente polari; aumento sia di compressibilità, sia di energia assorbita nel caso di isomerizzazione ramificata; forti diminuzioni di compressibilità ed ancor più forti diminuzioni di energia assorbita nella ciclizzazione alifatica o aromatica e così via.

Tabella II.

Densità, velocità ultrasonora, compressibilità ed energia assorbita da una mole nella compressione adiabatica unitaria di vari liquidi organici a 30° C.

Composto	ρ gr/cm³	u m/s	β $\frac{cm^2 \cdot 10^{-12}}{dine}$	Φ $\frac{cal \cdot 10^{-6}}{mole\ at}$	Composto	ρ gr/cm³	u m/s	β $\frac{cm^2 \cdot 10^{-12}}{dine}$	Φ $\frac{cal \cdot 10^{-6}}{mole\ at}$
n eptano	0,6751	1111	120	409	cicloesanolo	0,9411	1449	50,6	124
n ottano	0,6947	1155	108	408	alc. benzilico	1,0378	1510	42,3	101
isottano	0,6833	1063	129	498	fenolo (*b*)	1,0659	1484	42,6	86,5
cetano	0,7672	1323	74,5	505	glicol etilenico	1,1062	1641	33,6	43,3
cicloesano	0,7690	1227	86,4	217	glicerina	1,2550	1912	21,8	36,8
decalina (*a*)	0,8768	1363	61,4	222					
benzolo	0,8683	1277	70,6	146	acetone	0,7789	1144	98,1	168
toluolo	0,8560	1287	70,5	174	metiletilchetone	0,7948	1180	90,4	188
m xilolo	0,8555	1302	69,0	197	cicloesanone	0,9382	1415	53,2	128
alcol metilico	0,7818	1088	108	102	cloroformio	1,4690	966	72,9	136
» etilico	0,7810	1129	100	136	tetracloruro C	1,5748	910	76,7	172
» n propilico	0,7962	1192	88,4	153	clorobenzolo	1,0961	1252	58,2	137
» isopropilico	0,7772	1125	102	181	p-clorotoluolo	1,0544	1275	58,3	161
» n butilico	0,8022	1225	83,1	176					
» isobutilico	0,7949	1178	90,7	194	benzoato metile	1,0784	1392	47,9	139
» sec butilico	0,7985	1197	87,4	187	metacrilato metile	0,9292	1174	78,1	193
» ter-butilico	0,7761	1103	106	233					
» n amilico	0,8080	1251	79,1	198	solfuro C	1,2491	1133	62,4	87,4
» isoamilico	0,8016	1222	83,5	211	1-4-diossano	1,0234	1328	55,4	110
» ter amilico	0,8055	1180	89,2	224	nitrobenzolo	1,1940	1440	40,4	95,7
» n-ottilico	0,8199	1336	68,3	249					
» n dodecilico	0,8268	1391	62,5	324	acqua	0,9757	1512	43,9	18,3

(*a*) miscela di isomeri. (*b*) allo stato liquido sottoraffreddato.

TABELLA III.

Densità e velocità ultrasonora di alcuni liquidi organici a varie temperature.

COMPOSTO	t °C	ρ gr/cm³	u m/s	COMPOSTO	t °C	ρ gr/cm³	u m/s
Benzolo	30	0,8683	1277	Glicol etilenico	20	1,1131	1666
	40	0,8574	1233		30	1,1062	1642
	50	0,8464	1188		40	1,0993	1617
					50	1,0922	1592
Xilolo (miscela isomeri)	30	0,8566	1299		60	1,0851	1567
	40	0,8480	1259	Glicerina	30	1,2550	1912
	50	0,8393	1219		40	—	1883
	60	0,8304	1179		50	—	1857
					60	—	1832
Metanolo	20	0,7914	1120		70	—	1806
	30	0,7818	1088	Acetone	20	0,7905	1188
	40	0,7722	1055		30	0,7789	1144
	50	0,7625	1023				
Fenolo	30	(1,0659)	(1484)	Metiletilchetone	25	0,8001	1200
	40	(1,0579)	(1453)		30	0,7948	1180
	50	1,0499	1423				
	60	1,0412	1392	1–4–Diossano	30	1,0234	1328
	70	1,0322	1360		40	1,0117	1283
	80	1,023	1326		50	1,0003	1238
	120	0,983	1197				
	160	0,945	1067	Nitrobenzolo	30	1,1940	1440
					40	1,1840	1404
					50	1,1741	1369

Nella tabella III sono invece riportati i risultati di determinazioni a varie temperature su 10 composti di varia natura chimica. Particolare attenzione meritano i dati su alcoli e polialcoli, i cui bassi coefficienti di temperatura rivelano la natura fortemente associata delle relative molecole allo stato liquido, natura che si accentua nei polialcoli, in corrispondenza

dei quali si trovano i più bassi valori dei coefficienti osservati (escludendo naturalmente l'acqua, il cui comportamento al variare della temperatura è eccezionale).

TABELLA IV.

Valori della funzione molecolare additiva $D_2 = u^{1\,2}\frac{M}{\rho}$ *attribuibili ad alcuni gruppi atomici* (*a* 30° C).

$-CH_3$	865		2750 (*c*)
$-CH_2-$	643	$-CH_2OH$	1090 (*a*) 1060 (arom) (*a*)
	382		800 (*a*)
	100		555 (*c*)
$CH_2=CH-$	1265 (*a*)		720–790
$CH\equiv C-$	1175 (*a*) 1080 (arom) (*b*)	$-CH_2OCH_2-$	1550 (*b*)
$-C\equiv C-$	800 (*c*)	$-Cl$	718 655 (arom)
	2945 (*b*)	$-NH_2$	700 (arom) (*b*)
	3570 (*b*)	$-NO_2$	920 (arom) (*b*)
	2995		

(*a*) Ved. in tabella V l'andamento in serie omologhe.
(*b*) Valore determinato da un solo composto.
(*c*) Valore determinato da due soli composti.

È interessante notare che nel caso del fenolo le osservazioni sono state condotte, oltrechè fino alla temperatura di 160°, al disotto della temperatura di fusione, direttamente sul liquido sottoraffreddato (valori indicati tra parentesi). Da questi ultimi dati si ha una volta di più la conferma sperimentale dell'assenza di soluzioni di continuità nelle variazioni della struttura liquida al passaggio graduale della temperatura al disotto del punto

di fusione: in altre parole si può concludere che, dal punto di vista acustico o picnometrico, lo stato metastabile di aggregazione di un liquido in sottoraffreddamento resta uno stato tipicamente liquido.

Nella tabella IV troviamo infine riportati i valori della funzione additiva D_2 attribuibili ad alcuni tra i gruppi atomici più importanti. Poiché l'additività non è ovviamente rigorosa, volendo prevedere dalla (3) la velocità ultrasonora di un composto nota la struttura molecolare e la densità, è bene che siano tenute presenti alcune considerazioni:

a) mentre negli idrocarburi saturi i valori di gruppo dei gruppi costitutivi dipendono scarsamente dalla grandezza molecolare, in altri tipi di composti tale dipendenza è più sentita ed è chiaramente dimostrata dalla tabella VI: sarà quindi più conveniente scegliere valori di gruppo ricavati da composti simili, per grandezza molecolare, a quello in esame;

b) i valori di gruppo tendono in generale a valori più bassi quando il gruppo appartiene ad un composto aromatico, anziché alifatico, o ad un composto contenente cicli a forte tensione di valenza;

c) quando due o più gruppi, contenenti doppi o tripli legami o atomi diversi da carbonio e idrogeno, sono vicini nella molecola, si possono avere perturbazioni anche importanti nell'additività; la stessa cosa può verificarsi quando tali gruppi appartengono a molecole relativamente piccole.

Tali considerazioni non sono che la conseguenza della complessità delle interazioni tra tutti i legami che intervengono nell'edificio molecolare. È d'altra parte noto che l'ipotesi dell'additività molecolare, in tutti i campi a cui è stata applicata, corrisponde a un concetto troppo semplice per la rappresentazione di una realtà complessa come quella della struttura di sostanze allo stato liquido. Ciò nonostante in qualche caso anche questo criterio di previsione può essere di notevole ausilio al ricercatore, specie quando non sia richiesta una particolare precisione nella determinazione dei valori.

CONCLUSIONI. – Nella presente Nota sono esposti i risultati di misure di densità e di velocità ultrasonora su composti organici liquidi. In base ai dati ottenuti, si è spesso calcolata la compressibilità β e l'energia Φ assorbita da una mole di liquido nella compressione adiabatica unitaria. Si sono così resi noti dati che maggiormente chiariscono e confermano il comportamento dell'acqua alla compressione adiabatica a varie temperature (tabella I), il comportamento di 40 liquidi diversi alla temperatura di 30° C (tabella II) e quello di 10 liquidi organici a varie temperature (tabella III). Tra questi ultimi dati, interessanti sono quelli relativi a polialcoli, la cui struttura fortemente associata si riflette in bassi valori dei coefficienti di temperatura, e quelli ottenuti su fenolo allo stato di liquido sottoraffreddato che confermano l'assenza di soluzioni di continuità delle variazioni della struttura liquida nel passaggio allo stato sottoraffreddato.

TABELLA V.

Valori di gruppo della funzione molecolare additiva D_2 *per gruppi atomici particolari in serie di n-olefine, n-acetileni ed alcoli di varia natura* (*a* 30°C).

Atomi carbonio	$CH_2=CH-$
7	1236
8	1269
9	1253
10	1274
11	1271
15	1280

Atomi carbonio	$CH\equiv C-$
5	1208
6	1183
7	1184
8	1168
10	1165

Atomi carbonio	$-CH_2OH$
1	1130
2	1117
	1136 (a)
3	1098
4	1083
	1088
5	1064
	1085
	1072
6	1076
7	1054 (arom)
8	1082
	1057 (arom)

Atomi carbonio	$-CH_2OH$
9	1067 (arom)
10	1090
12	1109

Atomi carbonio	$>CHOH$
3	862
	948 (a)
4	839
5	791
6	805
	836 (cicl.)
7	804
	773
11	754

(a) Valore determinato da polialcol.

Dai dati esposti e da quelli scelti di altri Autori, si sono infine calcolati i valori attribuibili a vari gruppi atomici di una funzione additiva D_2, messa in evidenza in precedenti lavori (tabella IV). Poiché l'additività non è rigorosa (tabella V), si è brevemente discussa l'applicazione di tali valori alla previsione della velocità ultrasonora di liquidi a densità e struttura molecolare nota.

Chimica inorganica. — *Sulle leghe dell'Uranio col Bismuto* (*). Nota II di RICCARDO FERRO, presentata (**) dal Socio L. ROLLA.

Nella Nota I (1) sull'argomento ho descritto la preparazione e le proprietà generali delle leghe dell'Uranio col Bismuto.

I composti già studiati sono UBi cubico tipo NaCl con $a_0 = 6{,}356$ Å al 53,25 % di U, U_3Bi_4 cubico tipo Th_3P_4 con $a_0 = 9{,}350$ Å.

Oltre alle fasi suddette, e forse U_4Bi_5, è stata dimostrata nel sistema anche la presenza del composto 1:2.

Composto UBi_2 (*36,29 % U*).

UBi_2 è tetragonale isomorfo, con UP_2, con UAs_2 (2) ed USb_2 (3). Il rapporto assiale è in questo caso molto vicino a 2 e dall'andamento dei $\text{sen}^2\theta$, tenuto conto delle intensità calcolate in base all'ipotesi precedente, risulta come valore più probabile $c/a = 2{,}004$, come è riportato nella tabella I. In questo caso come per gli altri composti dell'U col Bi sono state eseguite, per ottenere i valori più attendibili, diverse misure su vari fotogrammi delle polveri, ottenuti con la tecnica di Straumanis e correggendo le distanze osservate per confronto tra fotogrammi prodotti con anticatodo di Cu e di Fe. Il valore trovato per a_0 è di 4,445 Å.

La densità picnometrica di 12,36, in buon accordo con la X (12,38 per 2 mol./cella), porta a calcolare 1,997 mol./cella.

La struttura di UBi_2 è tipo C 38 (Strukturbericht), gruppo spaziale D_{4h}^7 con:

2 Bi I	in:	$0, 0, 0$ e	$\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0$
2 Bi II		$0, \frac{1}{2}, x$	$\frac{1}{2}, 0, \bar{x}$
2 U		$0, \frac{1}{2}, y$	$\frac{1}{2}, 0, \bar{y}$

con $y = 0{,}280$ e x in buona approssimazione uguale a $-0{,}365$. Può essere ritenuto molto probabile il valore di $-0{,}363$ per il quale si ha uguaglianza di distanza tra più atomi Bi rispetto all'U. Con quest'ipotesi le distanze U–Bi sono di 2 tipi, rispettivamente 3,23 e 3,34 Å.

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica generale dell'Università di Genova col contributo finanziario del C. N. R.

(**) Nella seduta dell'8 novembre 1952.

(1) « Rend. Acc. Naz. Lincei », vol. XIII, ser. 8ª, fasc. 6, pp. 401–405 (1952).

(2) A. IANDELLI, « Rend. Acc. Naz. Lincei », vol. XIII, ser. 8ª, 138–151 (1952).

(3) R. FERRO, « Rend. Acc. Naz. Lincei », vol. XIII, ser. 8ª, 151–157 (1952).

TABELLA I.

UBi_2 *fotogramma delle polveri, radiazione* $K_\alpha Cu$. $sen^2\theta$ *ed intensità calcolati ed osservati.*

hkl	$sen^2\theta$ calc.	$sen^2\theta$ oss.	Intensità calcolata		Intensità osservata
			per ogni *hkl*	per ogni riflessione separabile	
001	0,0075	—	0,2	0.2	—
002	0,0298	—	0,2	0,2	—
100	0,0300		0,0		
101	0,0374	—	2,7	2.7	—
102	0,0598	0,0600	5,1	14.2	md
110	0,0599		9,1		
003	0,0672	0,0671	20,1	67,2	f
111	0,0674		47,1		
112	0,0898	0,0897	47,7	47,7	mf
103	0,0971	0,0969	22,6	22,6	md
004	0,1194	0,1200	1.5	40,7	m
200	0,1199		39,2		
113	0,1271	—	1,4	1,5	—
201	0,1273		0,1		
104	0,1494		1,8		
202	0,1497	—	0,2	2,0	—
210	0,1498		0,0		
211	0,1573	—	1,6	1,6	—
114	0,1793	0,1791	8,4	12,6	d
212	0,1797		4.2		
005	0,1866	0,1869	0.5	36,5	m
203	0,1870		36.0		
105	0,2165	0,2172	14.0	40,2	mf
213	0,2170		26.2		
204	0,2393	0,2401	3,9	30,4	m–md
220	0,2397		26,5		
115	0,2465	0,2468	11,4	11,5	d
221	0,2472		0,1		
006	0,2686	0,2685	1.0	3 8	ddd
214	0,2692		2,7		
222	0,2696		0.1		
300	0,2697		0 0		
301	0,2772	—	0.6	0,6	—
106	0,2986	0,2995	19.4	27.1	m–md
302	0,2996		1.7		
310	0,2997		6.0		

Segue: TABELLA I.

hkl	$sen^2\theta$ calc.	$sen^2\theta$ oss.	Intensità calcolata		Intensità osservata
			per ogni *hkl*	per ogni riflessione separabile	
205	0,3064		1,5		
223	0,3069	0,3074	28,5	64,6	mf–f
311	0,3071		34,6		
116	0,3286	0,3295	5,8	49,2	m
312	0,3295		43,4		
215	0,3364	0,3368	22,4	32,9	m–md
303	0,3369		10,5		
224	0,3591	—	3,2	3,2	—
007	0,3657	—	1,4	3,0	—
313	0,3668		1,6		
206	0,3885		3,6		
304	0,3891	—	1,2	4,8	ddd
320	0,3896		0,0		
107	0,3956	—	0,0	1,0	—
321	0,3971		1,0		
216	0,4185		33,2		
314	0,4191	0,4183	12,0	48,2	m
322	0,4194		3,0		
117	0,4256	0,4265	5,7	7,1	dd
225	0,4263		1,4		
305	0,4563	0,4572	10,5	30,3	m–md
323	0,4568		19,8		
008	0,4776	0,4793	4,1	25,1	md
400	0,4795		21,0		
207	0,4855	0,4858	5,7	24,3	md
315	0,4862		18,5		
401	0,4870		0,1		
108	0,5076	0,5081	11,5	17,5	md
226	0,5084		3,6		
324	0,5090		2,3		
402	0,5093		0,1		
410	0,5095	—	0,0	0,0	—
217	0,5155	—	0,0	1,0	—
411	0,5169		1,0		
118	0,5375	—	0,0	0,0	—
306	0,5384	0,5380	17,2	23,1	md
412	0,5393		3,1		
330	0,5394		2,8		

Segue: TABELLA I.

hkl	$sen^2 \theta$ calc.	$sen^2 \theta$ oss.	Intensità calcolata		Intensità osservata
			per ogni *hkl*	per ogni riflessione separabile	
403	0,5467	0,5464	27,3	43,6	m
331	0,5469		16,3		
316	0,5683	0,5691	11,8	34,4	m–md
332	0,5693		22,6		
325	0,5762	0,5759	23,4	45,4	m
413	0,5766		22,0		
208	0,5975	0,5993	19,1	71,9	f sfumata
404	0,5989		3,6		
420	0,5994		49,2		
009	0,6045	—	0,1	0,1	—
227	0,6054	—	6,6	7,7	d sfumata
333	0,6066		0,9		
421	0,6068		0,2		
218	0,6274	0,6270	26,8	29,9	m
414	0,6289		2,8		
422	0,6292		0,3		
109	0,6344	0,6343	6,8	6,8	dd
307	0,6354		0,0		
326	0,6582	0,6582	42,7	50,5	mf–f
334	0,6588		7,8		
119	0,6644	0,6665	31,2	110,8	ff sfumata
317	0,6654		8,7		
405	0,6661		1,8		
423	0,6665		69,1		
415	0,6960	0,6954	30,0	30,0	m–md
228	0,7173	0,7170	25,4	35,0	m–md
424	0,7188		9,6		
209	0,7243	—	0,7	0,7	—
335	0,7260	—	12,0	12,0	d incerta
0.0.10	0,7463	—	1,0	1,0	
308	0,7473	0,7471	18,9	24,9	md
406	0,7481		6,0		
500+430	0,7492	—	0,0	0,0	—
219	0,7543	0.7540	18,9	21,7	md
327	0,7553		0,1		
501+431	0,7567		2,7		
1.0.10	0,7762	—	0,5	0,5	—
318	0,7773	—	0,0	0,0	—

Segue: TABELLA I.

hkl	$\text{sen}^2\theta$ calc.	$\text{sen}^2\theta$ oss.	Intensità calcolata		Intensità osservata
			per ogni *hkl*	per ogni riflessione separabile	
416	0,7781		62,9		
502+432	0,7791	0,7777	8,7	92,0	ff
510	0,7792		10,4		
425	0,7859	0,7870	5,3	68,2	f
511	0,7866		62,9		
I seguenti: valori per la $K\alpha_1$					
1.1.10	0,8045	0,8037	14,3	14,3	d
336	0,8064	0,8080	10,0	98,5	ff
512	0,8073		88,5		
503+433	0,8147	0,8137	66,2	66,2	mf–f
229	0,8424	—	1,1	1,1	—
407	0,8434	0,8435	14,2	18,1	md sfumata
513	0,8446		3,9		
2.0.10	0,8643		7,1		
328	0,8654	0,8653	62,9	100,0	ff
426	0,8662		20,2		
504+434	0,8668		9,8		
520	0,8673	—	0,0	0.0	—
309	0,8724	coinc. con la α_2 328	16,1	16,2	?
417	0,8733		10,1		
521	0,8747	—	3,1	3,1	—
2.1.10	0,8942	—	1,8	1,8	—
514	0,8967	0,8962	41,1	51,5	mf
522	0,8971		10,4		
0.0.11	0,9011		33,6		
319	0,9023	0,9020	169,7	215,3	fff
337	0,9032		12,0		
1.0.11	0,9310	—	3,8	3,8	—
505+435	0,9338	0,9337	144,5	235,6	fff
523	0,9343		91,1		

$$\frac{4\,\text{sen}^2\theta}{\lambda^2} = 0{,}050612\cdot(h^2 + k^2) + 0{,}012603\cdot l^2$$

$$a_0 = 4{,}445\ \text{Å} \quad , \quad c_0 = 8{,}908\ \text{Å} \quad , \quad c/a = 2{,}004$$

Anche nel caso del Bi si ritrovano perciò forme analoghe a quelle presentate dagli altri metalloidi di questo gruppo. Nella figura 1 sono riportate le varie distanze tra U e metalloide in questi vari composti: si può osservare una certa regolarità ma non sembra si possano trarre ulteriori sicure deduzioni. In ogni caso si nota che le minime distanze

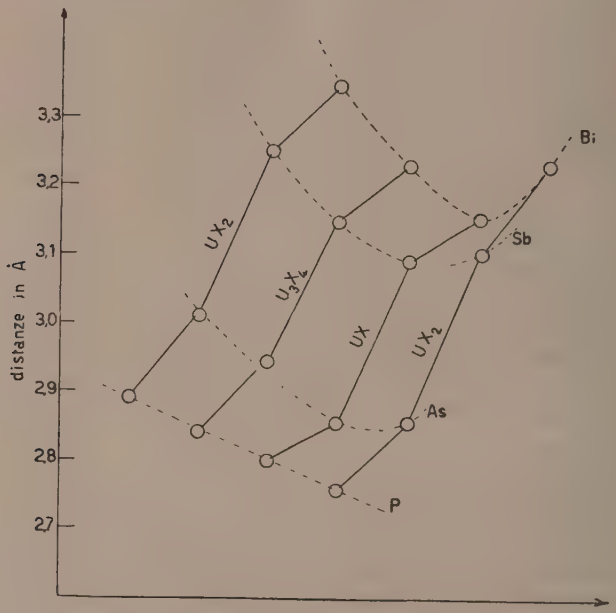


Fig. 1. – Distanze tra Uranio e metalloide nei composti dell'Uranio cogli elementi del V gruppo.

Per i composti UX_2 sono indicati i due valori delle distanze minime. Su ogni linea tratteggiata si trovano i punti relativi allo stesso metalloide.

che per i composti U — P compaiono per la formula 1 : 2, si spostano gradualmente, al crescere del carattere metallico dell'altro elemento, verso il composto 1 : 1.

Nel chiudere questa Nota sono lieto di poter esprimere qui il mio grato riconoscimento ai Signori:

prof. Luigi Rolla, per avermi generosamente permesso ed esortato a compiere queste ricerche;

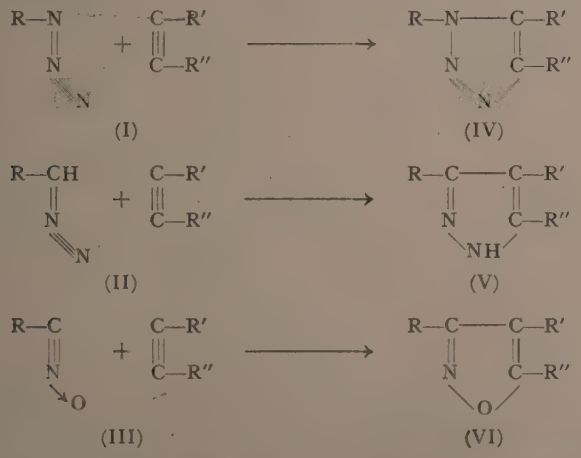
prof. Aldo Iandelli, per avermi concesso di discutere molto utilmente sull'argomento.

Chimica organica. — *Sintesi eterocicliche con l'alcool propargilico e il butindiolo.* Nota I di ELSO MUGNAINI e PAOLO GRÜNANGER, presentata (*) dal Corrisp. A. QUILICO.

Mentre fino ad una diecina di anni fa gli alcooli e i glicoli acetilenici erano dei prodotti esclusivamente di laboratorio e per di più di preparazione lunga e difficile, oggi, grazie ai progressi recentemente compiuti nel campo della chimica dell'acetilene, soprattutto per merito di Reppe e collaboratori, i termini più semplici della serie, cioè l'alcool propargilico e il butindiolo, sono divenuti prodotti accessibili anche industrialmente. Si presenta così la possibilità di studiare con maggiore diffusione le reazioni di questi due prodotti.

Nel presente lavoro abbiamo creduto di un certo interesse studiare l'utilizzazione dei due composti acetilenici per la sintesi di alcooli e glicoli eterociclici, una serie di composti ancora poco studiati ed interessanti quali eventuali materiali di partenza per sostanze di interesse farmaceutico.

Ci siamo limitati ai derivati della serie del pirazolo, del triazolo e dell'isossazolo, applicando al caso dell'alcool propargilico e del butindiolo rispettivamente le note reazioni di sintesi di E. Buchner [1], di O. Dimroth [2] e quella recentemente descritta da A. Quilico e collaboratori [3], basate sulla addizione al triplo legame acetilenico rispettivamente dei diazocomposti alifatici, delle diazoimidi e degli ossidi di nitrili:



dove R′ e R″ possono essere o un atomo di idrogeno o un radicale alchilico o arilico o carbossilico o aldeidico, o, come nel nostro caso, alcoolico primario.

(*) Nella seduta del 13 dicembre 1952.

(1) « Ber. », *22*, 842, 2165 (1889); « A. », *273*, 222 (1893).

(2) « Ber. », *43*, 2222 (1910).

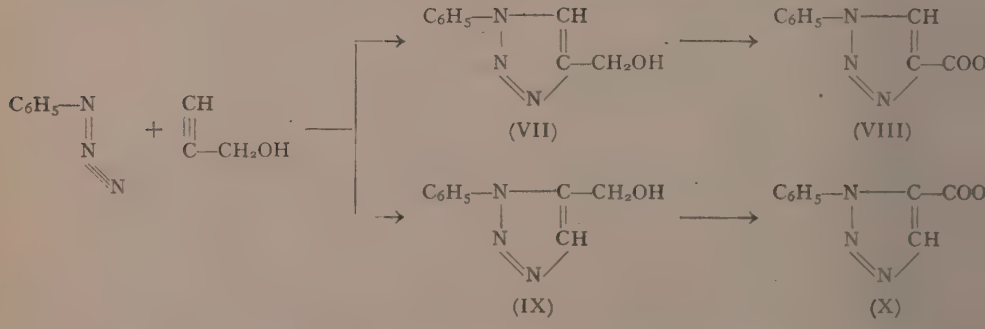
(3) A. QUILICO e G. SPERONI, « Gazz. », *76*, 148 (1946).

Le tre reazioni sono di tipo perfettamente analogo, come è già stato messo in rilievo altrove [4].

Abbiamo scelto come reagenti rispettivamente la fenilazide (I, dove $R=C_6H_5$), l'estere diazoacetico (II, dove $R=COOC_2H_5$), e l'ossido di benzonitrile (III, dove $R=C_6H_5$), che sono i composti più facilmente accessibili delle tre serie, e abbiamo studiato la loro azione a caldo sull'alcool propargilico e sul butindiolo.

In tutti i casi esaminati, tranne uno (benzonitrilossido + butindiolo), la reazione ha avuto luogo più o meno facilmente secondo gli schemi previsti, dando origine ai relativi alcooli e glicoli della serie del triazolo, del pirazolo e dell'isossazolo. L'addizione si effettua in tutti i casi riscaldando le due sostanze reagenti per un tempo più o meno lungo in seno ad un opportuno solvente. I prodotti di reazione sono sostanze incolore ben cristallizzabili, e la cui costituzione si è potuta in tutti i casi dimostrare mediante l'ossidazione permanganica ai rispettivi acidi, già noti in letteratura.

L'*alcool propargilico* reagisce facilmente in soluzione benzenica con la *fenilazide*, dando una miscela dei due isomeri teoricamente prevedibili, che possono essere separati per cristallizzazione frazionata dell'acqua: il prodotto meno solubile, p. f. 113°, che per ossidazione permanganica a freddo fornisce l'*acido 1-fenil, 1·2·3-triazol(4)carbossilico* (VIII) p. f. 149–150° [5], si rivela *1-fenil, 4-ossimetil, 1·2·3-triazolo* (VII), uno dei pochi esempi di alcooli della serie del triazolo già noti in letteratura [6]; il prodotto più solubile, p. f. 82°, si rivela *1-fenil, 5-ossimetil, 1·2·3-triazolo* (IX) mediante la sua ossidazione ad *acido 1-fenil, 1·2·3-triazol(5)carbossilico* (X) p. f. 176° dec. [7]:



Facendo reagire in analoghe condizioni l'alcool propargilico con l'estere diazoacetico, si è potuto isolare uno solo dei due isomeri teoricamente possibili, l'*estere etilico dell'acido 3 ossimetil, pirazol(5)carbossilico* p. f. 93° (XI).

(4) A. Quilico e G. Speroni, lav. cit.; cfr. anche A. Quilico, G. Stagno D'Alcontres e P. Grünanger, « Gazz. », *80*, 479 (1950).

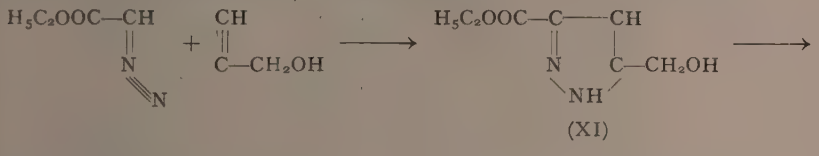
(5) O. Dimroth, « Ber. », *35*, 1037 (1902).

(6) K. Henkel e E. Weygand, « Ber. », *76*, 815 (1943).

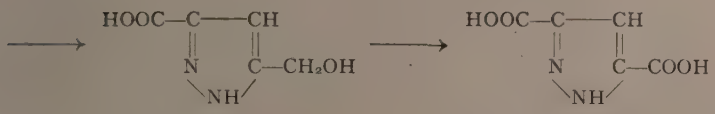
(7) O. Dimroth, « Ber. », *35*, 1034 (1902).

Viene così confermata anche nel caso degli alcooli, come prima per gli acidi e le aldeidi, la regola enunciata da K. v. Auwers e O. Ungemach [8], secondo la quale, addizionando ai diazocomposti alifatici un'acetilene sostituita del tipo $R'—C\equiv C—R''$ (dove $R'=COOR$, CHO o CH_2OH), l'atomo di N terminale del diazocomposto si lega all'atomo di C contiguo a R' quando R'' è un radicale alchilico o un atomo di H, e si ottiene invece una miscela dei due isomeri quando R'' è un radicale arilico.

Il composto (XI) per saponificazione dà il corrispondente acido libero (XII), cristallizzabile da poca acqua in aghetti p. f. 210–211°. L'ossidazione di questo acido porta facilmente all'*acido 3,5–pirazolbicarbossilico* (XIII), già noto [9];

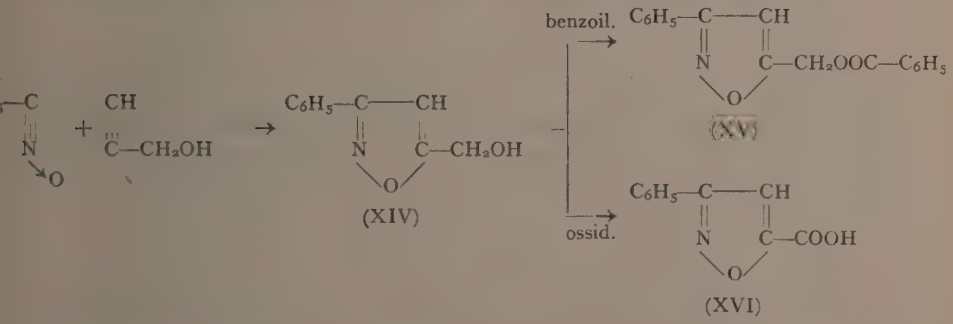


(XI)



(XII) (XIII)

Lo stesso alcool propargilico reagisce facilmente in soluzione eterea con l'*ossido di benzonitrile*, per fornire il *γ–fenil, α–isossazolcarbinolo* (XIV), cristallizzabile con difficoltà da benzolo–ligroina in scaglie p. f. 52°:



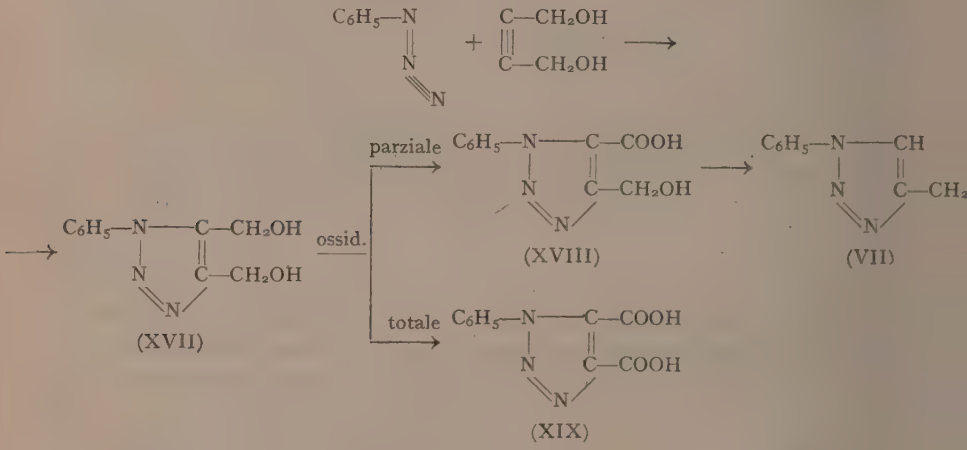
(XIV) (XV) (XVI)

Quest'alcool isossazolico venne identificato attraverso il suo *benzoil-derivato* (XV), già ottenuto da L. Panizzi mediante reazione di Cannizzaro dalla *γ fenil, α–isossazolaldeide* [10], e in seguito alla sua ossidazione al corrispondente *acido γ–fenil, α–isossazolcarbonico* p. f. 179–180° (XVI) [11].

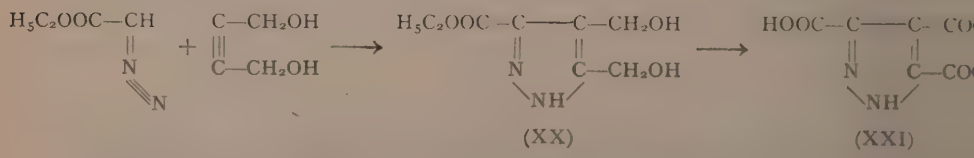
(8) « Ber. », *66*, 1205 (1933); cfr. anche R. HÜTTEL, « Ber. », *74*, 1680 (1941).
(9) R. v. ROTHEMBURG, « Ber. », *27*, 1098 (1894).
(10) L. PANIZZI, « Gazz. », *73*, 103 (1943)
(11) J. SCHÖTTLE, « Ber. », *45*, 2345 (1912).

Il *butindiolo* reagisce in genere con maggior difficoltà e con rese minori.

La reazione con *fenilazide* ha un decorso netto e facile: si forma l'*1–fenil 4·5–diossimetil, 1·2·3·triazolo* (XVII), cristallizzabile da acqua in prismi p. f. 161–162°. La sua costituzione è stata dimostrata ossidandolo a freddo con $KMnO_4$ in soluzione debolmente alcalina: usando la quantità stechiometrica di ossidante si riesce a trasformare una sola funzione alcoolica, giungendo così all'*acido 1–fenil, 4–ossimetil, 1·2·3·triazol(5)carbossilico* (XVIII), che, per cauto riscaldamento sopra il suo punto di fusione, si decarbossila dando l'*1–fenil, 4–ossimetil, 1·2·3·triazolo* (VII) p. f. 113°, già ottenuto per sintesi diretta dalla fenilazide e alcool propargilico. L'ossidazione totale porta invece all'*acido 1–fenil, 1·2·3·triazol(4·5)bicarbossilico* (XIX), già noto [12]:



L'addizione del butindiolo all'*estere diazoacetico* è più difficile, e fornisce l'*estere etilico* dell'*acido 3·4–diossimetil, pirazol(5)carbossilico* (XX), cristallizzabile in begli aghetti bianchi p. f. 145–145°,5, e identificato attraverso l'ossidazione ad *acido 3·4·5·–pirazoltricarbossilico* (XXI) p. f. 232° dec. già noto [13]:



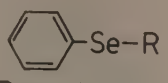
Non ha invece affatto luogo, almeno nelle condizioni sperimentali usuali, l'addizione del benzonitrilossido al butindiolo.

I dettagli sperimentali verranno esposti in una successiva Nota sull'argomento.

(12) O. Dimroth, « Ber. », *35*, 1036 (1902).
(13) E. Buchner, « Ber. », *22*, 845 (1889).

Chimica organica. — *Spettri u. v. di alcuni fenil–seleniuri e del difenil–selenio* (*). Nota di Luigi Chierici e Riccardo Passerini (**), presentata (***) dal Socio G. B. Bonino.

Le ricerche spettroscopiche sui fenil–alchil–seleniuri (form. I),



I

che riferiamo in questa Nota, sono il naturale proseguimento di quelle da tempo iniziate nell'Istituto di Chimica industriale di Bologna, sui composti Ar–X–Ar (Ar. = Arile ; X = S , SO_2 , O) (1), e ciò anche in relazione al recente lavoro di J. W. Baker e G.F.C. Barret (2), che per via cinetica hanno dimostrato come l'effetto + M degli elementi del VI Gruppo segue la progressione O > S > Se. D'altro, canto, le misure dei momenti dipolari di H. Lumbroso (3) confermano che il momento mesomero dell'anisolo è maggiore di quello del tioanisolo.

Oggetto di prossima pubblicazione saranno i dati relativi ai composti contenenti la funzione $-SeO_2-$ per il confronto coi corrispondenti solfoni.

Le ricerche sono state condotte su composti accuratamente purificati, e ridistillati immediatamente prima di registrarne lo spettro (campo 220–400 mμ, soluzioni alcooliche 1 : 100.000 in alcool etilico assoluto; le misure sono state effettuate con lo spettrofotometro Cary Recording mod. 10, ed i dati ripetuti e confermati con lo spettrofotometro Beckman D. U. a quarzo; le lunghezze d'onda, espresse in mμ, ed i logaritmi dei coefficienti di estinzione molare, relativi ai massimi di assorbimento e ai punti di flesso – questi ultimi tra parentesi – sono elencati nella tabella I).

(*) Lavoro eseguito negli Istituti di Chimica industriale dell'Università di Bologna e di Chimica farmaceutica dell'Università di Parma, e presso il « William Ramsay and Ralph Forster Lab. » University College London; col contributo del C.N.R.

(**) In ordine alfabetico.

(***) Nella seduta del 13 dicembre 1952.

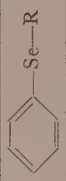
(1) A. Mangini, R. Passerini, « R.A.L. » [8], 7, 324 (1949); ib. ib. [8], *11*, 370 (1951); « J. Chem. Soc. », 1952, 1168; R. Passerini, G. Righi, *Spettri u. v. difenil–eteri*, « Boll. sci. Fac. Chim. Ind. », *10* (1952); G. Leandri, A Mangini, R. Passerini, « Gazz. chim. ital. », Nota II, III, IV, V (in corso di stampa). Ricordiamo che M. Nardelli, L. Chierici hanno recentemente pubblicato i dati di alcune grandezze chimico–fisiche di alchil–fenil–seleniuri « Ann. Chim. », *42*, 111 (1952).

(2) « J. Chem. Soc. », *1952*, 2831.

(3) « J. Chim. Phys. », *49*, 394 (1952).

Ad eccezione dello spettro dell'etil–fenil–seleniuro, registrato da K. Bowden, E. A. Braude [4] gli spettri di tutti gli altri termini non risultano noti in letteratura.

TABELLA I.

N° ord.	Composto	Sostit. R	Zona 220–250 mμ		oltre 250 mμ		P. eb. (* C° corretti)	n_{20}^{D}
			λ mass.	log ε	λ mass.	log. ε		
1		H	241	3.94	(270)	3.35	Kp_{10} 69–70	(2)
					320–350	2.67		
2		CH_3	248	3.81	266	3.61	$Kp_{748.8}$ 202–3	(2)
3		C_2H_5 (1)	247	3.69	270	3.58	$Kp_{748.8}$ 217–8	(2)
4		C_3H_7–*n*	246	3.63	269	3.55	* $Kp_{15.3}$ 117.7–118.2	(2)
5		C_3H_7–iso	242	3.45	272	3.37	$Kp_{16.2}$ 97–97.5	1,5655 (3)
6		C_4H_9–*n*	247	3.64	268	3.55	* $Kp_{15.3}$ 128.5–129.1	(2)
7		C_4H_9–iso	246	3.62	268	3.57	$Kp_{16.4}$ 117–8	1,5596 (3)
8		C_4H_9–sec.	245	3.39	273	3.35	$Kp_{19.3}$ 117–8	1,5608 (3)
9		C_5H_{11}–*n*	247	3.60	268	3.54	$Kp_{16.2}$ 135–6	1,5553 (3)
10		C_5H_{11}–iso	247	3.56	268	3.47	$Kp_{16.1}$ 129–130	1,5538 (3)
11		C_6H_{13}–*n*	247	3.63	268	3.55	* $Kp_{18.3}$ 159.8	(2)
12		C_7H_{15}–*n*	247	3.59	268	3.53	* $Kp_{15.7}$ 170.2	(2)
13		C_8H_{17}–*n*	246	3.60	268	3.54	* $Kp_{15.8}$ 182.3–183.3	(2)
14		$C_{10}H_{21}$–*n*	246	3.61	268	3.54	* $Kp_{18.4}$ 212.4	(2)

(1) K. Bowden, E. A. Braude riportano 2500 Å–4900 (log. ε = 3.69) per la banda primaria e 2690 Å–3200 (log. ε = 3.50) per la banda secondaria.

(2) M. Nardelli, L. Chierici, loc. cit. [v. bibl. cui a (1)].

(3) Misure eseguite nell'Istituto di Chimica fisica, dell'Università di Pavia, diretto dal ch.mo prof. M. Rolla, che qui ringraziamo.

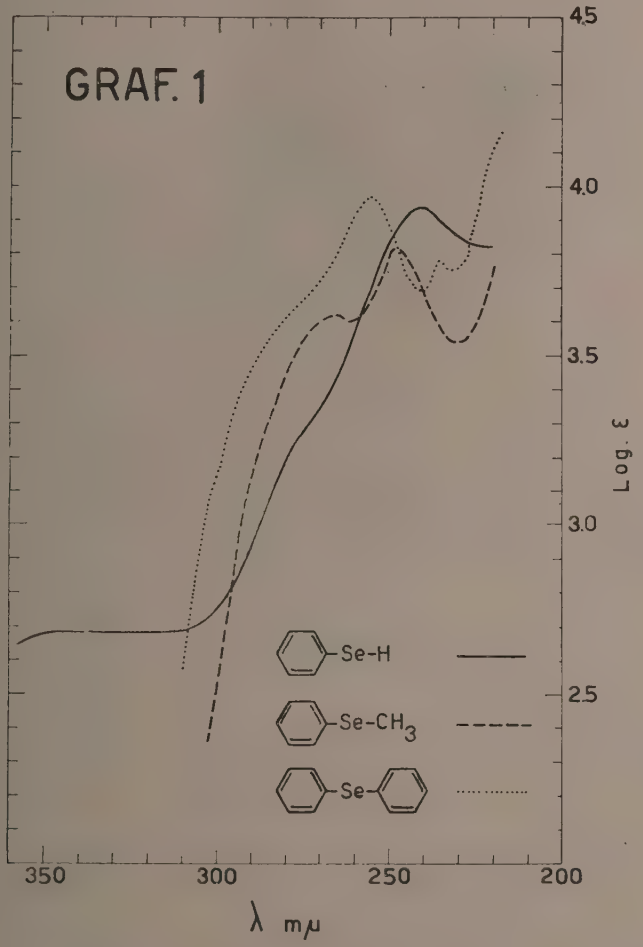
Delle altre misure chimico-fisiche sarà oggetto una prossima Nota. L. Chierici.

Selenofenolo (Grafico 1). – Il selenofenolo impiegato per le ricerche, preparato secondo D. G. Foster e Coll. [5], è stato purificato per distillazione sotto vuoto, in buio, e lo spettro effettuato immediatamente dopo, onde evitare errori dovuti alla presenza di prodotti di ossidazione che si formano già dopo breve tempo.

(4) « J. Chem. Soc. », *1952*, 1068.

(5) « Organic Syntheses », *24*, 89 (1944).

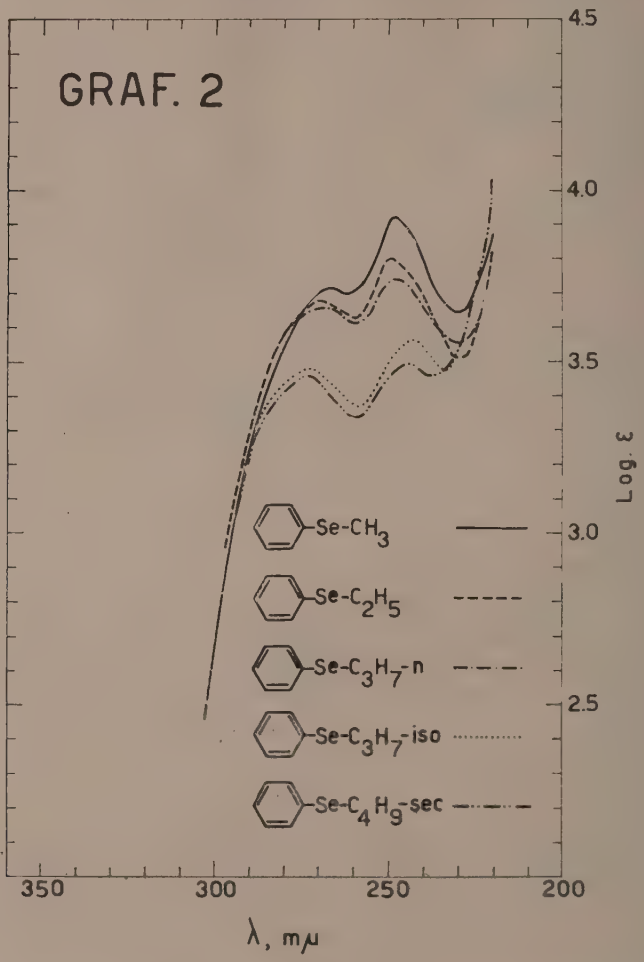
Lo spettro del selenofenolo presenta un massimo ben pronunciato a 241 mμ, log. ε = 3,94, ed una inflessione a circa 270 mμ, log. ε = 3,35, dopo di che nel campo 300-350 mμ la curva è praticamente piatta: l'andamento della curva di assorbimento ricorda quindi molto da vicino quella del tiofenolo.



L'intensa banda a 241 mμ, analogamente a quanto osservato per il tiofenolo [banda 235 mμ (6)] dovrebbe presumibilmente essere assegnata alla transizione insorgente da una coniugazione fra gli elettroni non-leganti del selenio (4 p^2) e gli elettroni π dell'anello benzenico. Il cromoforo benzenoide che compare nel tiofenolo come struttura fine, nella regione 270 mμ, risulta nel nostro caso notevolmente inviluppato nel flesso a 270 mμ. La zona appiattita dello spettro si mostra di più difficile interpretazione.

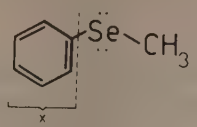
(6) H. P. Koch, « J. Chem. Soc. », *1949*, 387-394.

Fenil–metil–seleniuro (Grafico 1). – La sostituzione dell'idrogeno acido con un metile, come già nel caso del passaggio tiofenolo–tioanisolo, comporta una sostanziale modificazione delle caratteristiche di assorbimento: la banda primaria viene spostata a 248 mμ, con lieve diminuzione della intensità;



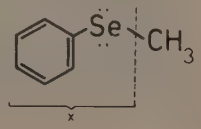
il flesso a 270 mμ assume l'aspetto di un massimo ben definito a 266 mμ (log. $\varepsilon = 3{,}61$), mentre la zona piatta scompare.

Lo spostamento batocromo della banda primaria è di minore entità di quello osservato nel caso del passaggio tiofenolo–tioanisolo (235 → 254 mμ), ed a nostro avviso può essere dovuto alle caratteristiche differenziali selenio–zolfo: ma la posizione di questa banda (248 mμ) porta a considerare debba trattarsi essenzialmente, come nel caso della banda 254 mμ del metil-fenil–solfuro, di una forma perturbata della banda B_{2u} benzenica (form. II; l'asterisco vuol dire « eccitato »)



II

Al secondo massimo a 266 mμ, riteniamo sia essenzialmente interessato il cromoforo otto-elettronico $\pi^{8}_{(Se)}$ (form. III)



III

dovuto alla interazione della coppia non-legante del selenio ($4p^2$) con gli elettroni benzenici: e corrispondenti quindi alla inflessione nella regione 280 mμ del fenil-metil-solfuro.

Fenil-alchil-seleniuri (Grafico 2). - La sostituzione del metile con altri alchili non sposta praticamente la posizione delle due bande di assorbimento, pur avendosi variazioni nelle intensità; peraltro le due bande tendono ad avere la stessa altezza col crescere dell'alchile.

Si ha quindi una notevole differenza dalla corrispondente serie dei solfuri studiata da E. A. Fehnel, M. Carmack [7]

Alch.	C_6H_5—S—Alch.				C_6H_5—Se—Alch.			
	mμ	log. ε	mμ	log. ε	mμ	log. ε	mμ	log. ε
CH_3	254	3.98	(275)	3.15	248	3.81	266	3.61
C_2H_5	210	3.94	(270)	3.40	247	3.69	270	3.58
	256	3.90						
C_3H_7—iso	215	3.94			242	3.45	272	3.37
	258	3.75						

e anche tale diverso comportamento è probabile sia dovuto alle diverse caratteristiche del selenio rispetto allo zolfo.

Non deve meravigliare se dal termine C_5H_{11}-*n* al $C_{10}H_{21}$-*n* le variazioni delle proprietà spettrali sono del tutto trascurabili; ma è ovvio che fatti sterici debbono essere presi in considerazione per il fenil-iso-propil- e

(7) « J. Am. Chem. Soc. », *71*, 84 (1949).

per il fenil–sec. butil–seleniuro, subendo le due bande una riduzione di intensità.

Il fenomeno può verosimilmente ricondursi alla sempre minore probabilità di una configurazione planare comprendente l'anello benzenico e l'atomo di selenio (il fenil–terz. butil–seleniuro non si è potuto sintetizzare seguendo l'usuale metodo di preparazione da noi descritto, ma è da prevedere che per questo termine l'effetto sterico debba essere molto più evidente).

Difenil–selenio. — La curva di assorbimento del difenil–selenio C_6H_5–Se–C_6H_5 è riportata sul Grafico 1; i dati da noi ottenuti integrano e completano la curva registrata da Chaix [8] e sono in buon accordo con quelli riportati da tale A.

Il difenil–selenio [preparato secondo F Kraft, A. Kaschau [9] e purificato accuratamente per ripetute distillazioni a pressione ridotta p. eb. Kp_{10} 159° C] presenta uno spettro caratterizzato da un massimo ben pronunciato a 255 mμ, log. ε = 3.97, accanto ad un flesso a circa 275 mμ, log. ε = 3.67, a parte un piccolo massimo a 235 mμ, log. ε = 3.78.

È evidente l'analogia col difenil–solfuro (anche per la banda verso le minori λ) e risulta chiara una interazione tra l'atomo di selenio ed i contigui anelli benzenici: il massimo a 255 mμ è da ritenere sia dovuto, come nel caso del difenil–solfuro, ad una forma perturbata della transizione B_{2u} benzenica, mentre la 275 mμ dovrebbe ancora corrispondere al cromoforo otto–elettronico $\pi^{8}_{(Se)}$.

Parte sperimentale. – I prodotti da 1 a 4, 6, da 9 a 14 sono stati preparati secondo quanto già descritto da uno di noi [1].

I seleniuri non ancora noti, fenil–iso–propil–, fenil–iso–butil– e fenil–sec. butil– sono stati preparati: addizionando a 0,3 mol. di selenofenolo (sciolti in 200 cc. di alcool assoluto) 0,3 mol. di NAOH sciolte nella minore quantità possibile di acqua, e quindi l'alogenuro alchilico, 1.2 mol. aggiunto a piccole porzioni; il tutto si fa bollire a ricadere per un'ora; dopo raffreddamento si diluisce con 4 volte il volume di acqua fredda. Si sottopone a triplice estrazione con etere la soluzione acquoso–alcoolica; dopo essiccamento con cloruro di calcio, l'etere viene distillato ed il residuo oleoso frazionato. Si raccoglie la frazione a p. eb. costante rettificando successivamente il prodotto per tre volte. I rendimenti si aggirano sul 72–80 %.

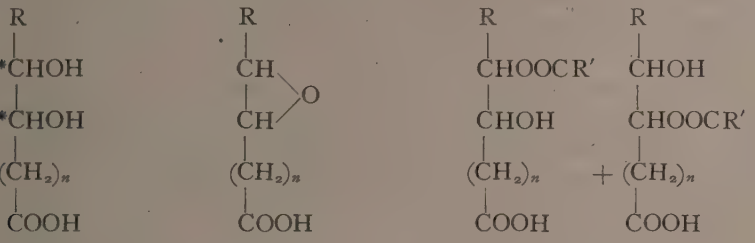
Ringraziamo vivamente il prof. C. K. Ingold, F.R.S., dell'University College di Londra e il dr. G. E. W. Wolstenholme, O. B. E. della Ciba Foundation–Londra per i mezzi gentilmente messi a disposizione per il compimento di queste ricerche.

(8) « Bull. Soc Chim. », *53*, 700 (1933).
(9) « Ber. », *29*, 429 (1896).

Chimica organica. — *Sull'ossidazione dei composti etilenici con acqua ossigenata* (*). Nota I di Luigi Canonica, Marino Martinolli e Enzo Alneri, presentata (**) dal Socio L. Cambi.

Le recenti numerose ricerche sull'ossidazione dei doppi legami degli acidi grassi non saturi ponevano in rilievo l'interesse di questa reazione, ma non ne definivano l'intimo chimismo; e di incerta interpretazione rimanevano le divergenze di comportamento che nella reazione stessa i singoli acidi grassi presentavano, secondo i lavori finora apparsi.

Così nelle ricerche di Doree e Pepper (1), l'acido brassidico forniva per azione dell'acqua ossigenata in soluzione di acido acetico un acido 13–14–diossibeenico (I);



(I) $R=CH_3(CH_2)_7$, $n=11$ (IV) $R=CH_3(CH_2)_7$, $n=11$

(II) $R=CH_3(CH_2)_7$, $n=7$ (V) $R=CH_3(CH_2)_7$, $n=7$

(III) $R=H$, $n=8$ (VI) $R=H$, $n=8$

(VII) $R=CH_3(CH_2)_7$, $n=11$, $R'=CH_3-$

(VIII) $R=CH_3(CH_2)_7$, $n=7$, $R'=CH_3-$

(IX) $R=H$, $n=8$, $R'=H$

nelle stesse condizioni l'acido erucico dava un acido diossibeenico (I) stereisomero del precedente accanto a quantità considerevoli di un prodotto oleoso, dal quale si isolava per distillazione un acido 13–14–epossibeenico (IV), operando però a temperatura tanto elevata da non escludere la possibilità di reazioni secondarie di pirolisi.

Quasi contemporaneamente, Scanlan e Swern (2), ossidando in condizioni analoghe l'acido oleico, ottenevano una massa oleosa che ritenevano costituita da una miscela dei due monoacetilderivati (VIII) dell'acido 9–10–diossistearico, stereisomero p. f. 95° C, e che questo genera per saponifica-

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica Industriale dell'Università di Milano.

(**) Nella seduta del 13 dicembre 1952.

(1) « J. Chem. Soc. », 477 (1942).

(2) « J. Am. Chem. Soc. », *62*, 2385 (1940).

zione; King [3] confermava questo risultato, constatando inoltre come nelle stesse condizioni l'acido elaidinico fornisse, accanto ad una miscela dei monoacetilderivati dell'acido 9–10–diossistearico, stereisomero p. f. 132° C, anche l'acido 9–10–epossistearico p. f. 55°,5 C.

In modo diverso dai due acidi non saturi si comporterebbero, secondo precedenti ricerche di Hildicht e Lea [4] i loro esteri metilici, generando per ossidazione con acqua ossigenata in acido acetico, accanto alla miscela di monoacetilderivati del diossiestere, anche il diossiestere stesso, nonché un terzo composto a carattere di perossido.

Da ultimo Swern, Billen, Findlej e Scanlan [5] e poi Greenspan [6] notavano come in soluzione di acido formico l'azione dell'acqua ossigenata sui doppi legami decorresse assai più rapidamente che in mezzo acetico, ottenendo, tra l'altro, dall'acido Δ 10–11–undecilenico, in modo praticamente quantitativo, i formilderivati (IX).

Pareva doversi così concludere che di fronte all'acqua ossigenata, per cause che rimanevano oscure, i singoli acidi non saturi si comportassero in modo nettamente diverso.

Attraverso un più accurato esame dei prodotti di reazione e scegliendo opportunamente le condizioni sperimentali, abbiamo invece constatato come lo schema di reazione risulti presumibilmente in ogni caso il medesimo, e solo differiscano i rapporti quantitativi secondo i quali i vari prodotti vengono formati.

Così, dalla miscela liquida di acidi ossi–acetossistearici che risulta dalla reazione tra acido oleico, acqua ossigenata ed acido acetico nelle condizioni di Scanlan e Swern [2], abbiamo, per prolungato riposo a bassa temperatura, isolato quantità considerevoli di acido 9–10–diossistearico p. f. 95° C.

Anche nell'ossidazione dell'acido Δ 10–11–undecilenico con acqua ossigenata al 30 % in acido formico al 98–100 % abbiamo, a differenza di Swern e collaboratori e di Greenspan, constatato il formarsi del diossiacido (III) con rese che possono raggiungere il 25 % del teorico ove esso venga tempestivamente sottratto all'ulteriore azione dell'acido formico; protraendo invece il riscaldamento della soluzione in acido formico, la quantità del diossiacido isolabile va progressivamente scemando. L'acido 10–11–diossiendecanoico così ottenuto risulta identico a quello ottenuto dalla saponificazione dei formilderivati, nonché al prodotto ottenuto, con scarse rese da Hasura e Grüssner [7] per azione del permanganato potassico sull'acido Δ 10–11–undecilenico. La sua costituzione è dimostrata dalla demolizione ossidativa, mediante acido periodico, che ci ha dato, accanto a formaldeide, la semialdeide sebacica.

(3) « J. Chem. Soc. », 37 (1943).
(4) « J. Chem. Soc. » 1576 (1928).
(5) « J. Am. Chem. Soc. », 67, 1786 (1945).
(6) « Ind. Eng. Chem. » 39, 847 (1947).
(7) « Monatsch. », 9, 950 (1888).

Quando però nella miscela di reazione si sostituisce all'acido formico assoluto, l'acido all'80 %, e la reazione viene interrotta dopo 1 ora di riscaldamento a 40–45° C (essa è però già allora praticamente completa) si isola, grazie alla sua minor solubilità in acqua, che permette di separarlo dal diossiacido, un nuovo acido solido p. f. 69° C. A questo prodotto in base ai dati analitici ed al suo comportamento chimico, abbiamo attribuita la costituzione di acido 10–11–epossiendecanoico (VI): esso si dimostra stabile a freddo all'acido periodico; l'idrolisi acida, in condizioni blande, lo trasforma in acido 10–11–diossiendecanoico.

Tale epossiacido risulterebbe invero già noto dalla letteratura ed ottenuto, con scarse rese, da Harris e Smith [8] per azione dell'acido perbenzoico sull'acido Δ 10–11–undecilenico in soluzione di ligroina: l'acido di Harris e Smith presentava però un p. f. 45°,5, e che si elevava a 50° C lasciando soggiornare il prodotto in essicatore per alcuni giorni: ciò viene attribuito alla spontanea trasformazione dell'acido p. f. 45°,5 in una nuova forma. Noi riteniamo che Harris e Smith abbiano solo potuto ottenere un prodotto largamente impuro.

Ed infine, ripetendo l'ossidazione dell'acido erucico nelle condizioni di Doree e Pepper, abbiamo noi pure ottenuto, quale principale prodotto di reazione l'acido 13–14–diossibeenico: le soluzioni madri del diossiacido abbandonano però per concentrazione o per diluizione con acqua forti quantità di un prodotto semisolido a temperatura ambiente, che non fu possibile isolare allo stato di purezza, ma che per idrolisi alcalina fornisce una nuova frazione di acido diossibeenico: non si può presumere che questa frazione del diossiacido provenga dall'eventuale idrolisi dell'epossiacido (che si dimostra assai resistente all'azione degli alcali), appare invece logico supporre, in analogia ai casi prima descritti, che il prodotto semisolido sia principalmente costituito dalla miscela dei monoacetilderivati (VII). Le acque madri di quest'ultima parte del diossiacido contengono solo piccole quantità di acido epossibeenico p. f. 63°,5.

Questi risultati dimostrano come nei casi studiati (e presumibilmente in modo generale) l'epossiacido, il diossiacido e gli acilderivati si formino l'uno accanto all'altro, in rapporti quantitativi determinati dal gioco delle velocità delle reazioni che a ciascuno di essi danno origine nelle specifiche condizioni di esperienza.

È logico ritenere che l'epossiacido derivi dall'azione sull'acido etilenico dell'acido peracetico o performico presente nell'equilibrio acqua ossigenata–acido acetico o formico, secondo lo schema della reazione di Prileshajew: è infatti noto come una soluzione di acido peracetico preformato (da anidride acetica ed acqua ossigenata) trasformi a freddo, con decorso di reazione molto netto, i derivati etilenici nei corrispondenti epossidi. In tali condizioni abbiamo preparato con buone rese, a partire dall'acido erucico, l'acido 13–14–epossibeenico, identico al prodotto preparato da Dorèe

(8) « J. Chem. Soc. », 1572 (1935).

e Pepper mediante l'acido perbenzoico. Di meno chiara interpretazione appariva la genesi dei diossiderivati, simulante la diretta addizione di acqua ossigenata al doppio legame.

Abbiamo perciò sperimentato il comportamento di fronte all'acqua ossigenata dell'acido oleico o Δ 10–11–undecilenico in soluzione di alcool od acetone: in tali condizioni, pur dopo prolungato riscaldamento, l'acido grasso veniva recuperato inalterato; che l'acido erucico non entrasse in reazione con l'acqua ossigenata in acetone era già stato constatato da Doree e Pepper [1]. Anche l'aggiunta di acido solforico o perclorico in quantità tale da assicurare una elevata concentrazione idrogenoionica del mezzo (il 5 % del peso della soluzione), non vale a promuovere l'addizione di acqua ossigenata al doppio legame.

Pare così da escludere la possibilità che i diossiderivati traggano origine dalla diretta addizione di acqua ossigenata al legame etilenico: ed interessa altresì rilevare come gli acidi insaturi stessi non possano evidentemente sostituire l'acido acetico o formico nell'intermedio meccanismo di formazione del peracido.

Abbiamo invece constatato come gli acidi 10–11–epossiendecanoico e 13–14–epossibeenico addizionino acqua con molta facilità ad opera degli acidi minerali anche diluitissimi, trasformandosi nei diossiacidi corrispondenti: così l'acido epossiendecanoico si trasforma in acido diossiendecanoico già per riscaldamento su b. m. con acido solforico 0,005 N, nel tempo di poche ore: pareva perciò probabile che anche nell'ossidazione degli acidi insaturi con acqua ossigenata i diossiacidi prendessero origine dagli epossiacidi intermediariamente formatisi per addizione di acqua, catalizzata dall'acidità del mezzo: in effetti, riscaldando gli epossiacidi dell'acido erucico od undecilenico rispettivamente con acido acetico o formico al 60 % (è questa la concentrazione finale dell'acido, nelle condizioni scelte per l'ossidazione dell'acido non saturo) abbiamo ottenuto la formazione dei diossiacidi con rese paragonabili a quelle ottenute nell'ossidazione diretta: accanto all'ossiacido si produce anche in questo caso la miscela liquida dei suoi acilderivati. Che i diossiacidi prendano origine dall'idrolisi degli acilderivati, pare senz'altro da escludere: da questi ultimi non è infatti riuscito di ottenerli per riscaldamento con acido formico od acido acetico diluiti, nelle condizioni sopradette.

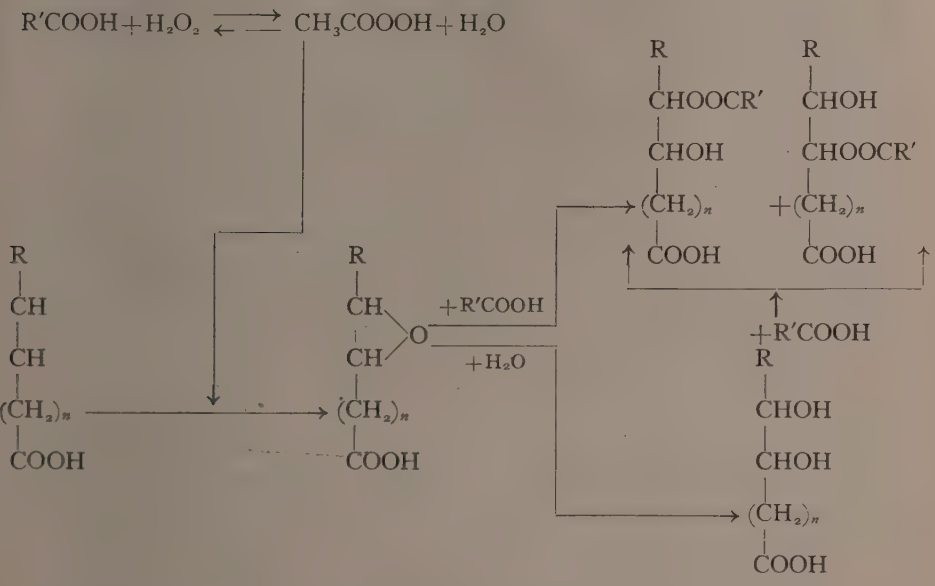
Riguardo agli acilderivati dei diidrossiacidi, si era da vari Autori supposta la loro derivazione dagli epossiacidi per diretta addizione di una mole di acido formico od acetico: tale ipotesi trova ora conferma nelle esperienze sopra riferite, nelle quali gli acilderivati si sono formati accanto ai diossiderivati nell'idratazione degli epossidi con gli acidi organici.

Si poteva invero anche supporre la loro formazione attraverso una reazione di esterificazione dei diossiacidi: infatti, riscaldando a 50° C l'acido 10·11 diossiendecanoico con acido formico al 60 %, se ne è ottenuta la parziale esterificazione; la reazione è peraltro lenta e genera il formilderivato con velocità assai minore a quella con la quale esso prende origine nella

diretta ossidazione dell'acido Δ 10–11–undecilenico con acqua ossigenata in acido formico.

Si deve perciò ritenere che in questo caso la maggior parte dell'acil-derivato provenga dalla somma dell'acido organico a basso peso molecolare al sistema epossidico, mentre in condizioni ordinarie, la esterificazione del diossiderivato rappresenta solo un processo collaterale.

Sulla scorta di queste esperienze, l'insieme delle reazioni che hanno luogo tra acido insaturo, acqua ossigenata ed acido formico od acetico appare ben interpretato dallo schema seguente:



Il fatto che in soluzione di acido formico l'insieme delle reazioni decorra più rapidamente che in acido acetico sembra indicare una più rapida formazione dell'acido performico rispetto al peracetico, mentre è logico supporre che anche le fasi successive risultino accelerate dalla maggior acidità del mezzo.

Parte sperimentale.

Ossidazione dell'acido Δ 10–11–undecilenico.

a) *Con acqua ossigenata al 30 °/° in acido formico all'80 °/°.* – 10 g. di acido undecilenico puro vengono aggiunti, agitando, alla soluzione di 6,2 g. di acqua ossigenata in 20 cc. di acido formico. La reazione si innesca con sviluppo di calore: la temperatura viene mantenuta a 40° dapprima raffreddando in acqua corrente poi riscaldando.

L'acido undecilenico passa rapidamente in soluzione: il riscaldamento viene protratto per circa 30′ dopo la scomparsa delle ultime goccie oleose, dopodichè l'acqua e l'acido formico vengono allontanati per evaporazione nel vuoto. Il residuo viene ripreso con etere, la soluzione eterea lavata con acqua per allontanare le ultime tracce di acido formico, ed evaporata nel vuoto. La massa oleosa residua viene estratta con 130 cc. di acqua a 80° e lo strato acquoso separato dalla parte indisciolta: per raffreddamento esso lascia separare una massa voluminosa di acido 10–11–diossiendecanoico (g. 2,8); altri 0,70 g. dello stesso acido vengono ottenuti per concentrazione nel vuoto, a piccolo volume. Rapidamente ricristallizzato da acqua il prodotto si presenta in scagliette bianche opache p. f. 85°C. Alla determinazione dell'equivalente:

equivalente { trov. 217,40
per $C_{11}H_{22}O_4$ calc. 218,17.

Il residuo oleoso dall'estrazione con acqua calda, per raffreddamento a 0° separa dopo 24 h un prodotto solido che viene raccolto per filtrazione alla pompa ed essiccamento su piatto poroso: lo si cristallizza dall'acqua (nella quale è assai meno solubile del prodotto precedente) ottenendo dopo due cristallizzazioni un prodotto in lamelle bianche lucenti p. f. 69° costante alla determinazione dell'equivalente:

equivalente trov. 200,90
per $C_{11}H_{20}O_3$ calc. 200,17.

La separazione dell'epossido acido dalla massa oleosa dei formilderivati è però sempre assai lenta ed incompleta: più agevolmente esso può venir isolato disciogliendo la massa in idrato sodico al 5 % (in quantità tripla a quella necessaria a portare tutto in soluzione operando a 40°).

Dopo 2 h la saponificazione dei formilderivati è completa: per addizione di acido cloridrico fino a reazione debolmente acida al rosso Congo e lasciando a riposo la soluzione a temperatura ambiente si separa dapprima l'epossidoacido, che viene purificato dal diossiacido eventualmente frammisto per cristallizzazione dall'acqua se ne possono così ottenere fino a 3,5 g. da 10 di acido undecilenico: le acque madri contengono il diossiacido proveniente dall'idrolisi dei formilderivati; che nelle blande condizioni di idrolisi adottate l'epossiacido derivi dai formilderivati per sottrazione di una molecola di acido formico è da escludersi: in tali condizioni la miscela di formilderivati ottenuta per prolungata azione dell'acido formico al 100 % sull'epossido non da l'epossiacido stesso in quantità isolabile.

b) *Con acqua ossigenata al 36 % in acido formico al 98 %*. – L'ossidazione viene condotta con le modalità prima descritte: la massa oleosa dei formilderivati quale residua dall'evaporazione della soluzione eterea separa per prolungato riposo a 10° un precipitato di acido 10–11-diossiendecanoico che viene raccolto per filtrazione alla pompa, essiccato su piatto poroso e cristallizzato da acqua: la resa in diossiacido risulta di g. 2,7–2,9.

Idrolisi dell'acido 10–11–epossiendecanoico ad acido 10-11–diossiendecanoico.

a) *Con acido solforico diluito.* – g. 0,1 di acido epossiendecanoico vengono sospesi in 10 cc. di acqua contenenti 0,2 cc. di acido solforico N/2 e si riscalda a 70–75°: dopo 4–5 h le goccioline oleose prima presenti passano in soluzione; il riscaldamento viene protratto ancora per qualche tempo dopodiché l'acido solforico viene esattamente neutralizzato con soda e la soluzione concentrata nel vuoto a 2 cc. Si ottengono così mg. 81 di acido diossiendecanoico p. f. 82–84° C, p. f. 85° C dopo cristallizzazione, anche in miscela con l'acido ottenuto per idrolisi dei formilderivati.

b) *Con acido formico al 60 %.* – g. 0,2 di acido epossiendecanoico vengono riscaldati a 45° con 0,4 cc. di acido formico al 60 % per 40′: si evaporano poi rapidamente nel vuoto l'acqua e l'acido formico ed il residuo si riprende con 10 cc. di acqua calda. Il residuo oleoso indisciolto viene separato: la soluzione acquosa, per concentrazione a 5 cc. separa una piccola quantità dello stesso olio che viene allontanato: concentrando poi quasi a secchezza si separa una massa pastosa che per cristallizzazione da acqua fornisce mg. 41 di acido diossiendecanoico p. f. 85° C.

I residui oleosi prima detti vengono disciolti in 5 cc. di idrato sodico al 3 %: dopo 24 h di riposo a temperatura ambiente, si aggiunge acido cloridrico fino a reazione appena acida al rosso congo e si concentra nel vuoto a 3 cc.: vengono così recuperati mg. 52 di epossiacido inalterato p. f. 69° C dopo cristallizzazione dell'acqua. Le acque madri dell'epossiacido dànno per concentrazione nel vuoto mg. 50 di diossiacido, proveniente dalla saponificazione dei formilderivati formatisi accanto al diossiacido.

Formilderivati dell'acido 10–11–diossiendecanoico dall'acido 10-11–epossiendecanoico. – g. 0,3 di epossiacido vengono riscaldati per 1 h 30′ a 55° con 0,6 cc. di acido formico all'80 % .

Dopo completa evaporazione nel vuoto dell'acido formico residua la miscela oleosa dei formilderivati dalla quale non riesce di estrarre con acqua calda il diossiacido evidentemente presente in minima quantità: per concentrazione a piccolo volume degli estratti acquosi si separano solo piccole quantità di prodotti oleosi. Per saponificazione al solito modo si ottengono dalla miscela dei formilderivati g. 0,29 del diossiacido.

L'esterificazione del diossiacido stesso per riscaldamento con acido formico al 60 % è viceversa lenta: riscaldando g. 1 di diossiacido con 2 cc. di acido formico a 60° per 2 h si separavano dai formilderivati ancora g. 0,45 di diossiacido inalterato.

Ossidazione dell'acido 10-11-diossiendecanoico con acido periodico. – mg. 200 del diossiacido vengono disciolti in 20 cc. di alcool etilico a 30° con mg. 295 di periodato potassico e cc. 1,4 di acido solforico N. Dopo 48 h di riposo a temperatura ambiente nella soluzione è dimostrabile la presenza di formaldeide mediante la reazione del dimedone. La rimanente soluzione viene estratta con cloroformio e l'estratto evaporato a secco nel vuoto: rimane un residuo oleoso che non accenna a cristallizzare: esso viene disciolto

in 10 cc. di alcool etilico diluito e la soluzione addizionata di mg. 200 di solfato di semicarbazide e mg. 225 di acetato sodico.

Si ottiene così il semicarbazone della semialdeide sebacica p. f. 170° C. in accordo con il dato della letteratura.

Nelle stesse condizioni l'acido epossiendecanoico rimane praticamente inalterato.

Acido 13–14–epossibeenico. – A g. 52 della soluzione di acido peracetico preparata da anidride acetica ed acqua ossigenata secondo [9], diluiti con uguale volume di cloroformio vengono aggiunti g. 13 di acido erucico.

Dopo 12 h di riposo a temperatura ambiente la titolazione iodometrica indica che l'ossidazione è completa: si allontana nel vuoto a temperatura ambiente il cloroformio e la maggior parte dell'acido acetico versando il residuo in 400 cc. di acqua.

Il solido separatosi viene raccolto e cristallizzato da etere di petrolio.

Si ottengono così g. 8,5 di acido 13–14–epossibeenico puro p. f. 63°,5 C. in accordo con il dato della letteratura.

La determinazione dell'ossigeno epossidico secondo il metodo di Nicolet e Poulter [10] e quella dell'equivalente hanno dato:

O epossidico	trov. %	4,38
per $C_{22}H_{42}O_3$	calc.	4,51
equivalente	trov.	352,2
per $C_{22}H_{42}O_3$	calc.	354,2.

Per riscaldamento di g. 1 dell'epossiacido con 5 cc. di acido acetico al 60 % su b. m. per 5 h si ottengono dopo raffreddamento e filtrazione alla pompa g. 0,93 di prodotto di consistenza pastosa che per cristallizzazione da benzolo–etere di petrolio da g. 0,35 di acido 13-14-diossibeenico p. f. 101° C. Le acque madri del diossiacido contengono una sostanza oleosa (miscela dei monoacetilderivati) che per saponificazione con idrato sodico fornisce l'acido 13 14 diossibeenico in modo praticamente quantitativo.

Nell'ossidazione dell'acido erucico con acqua ossigenata in acido acetico nelle condizioni di [1] le rese in acido diossibeenico furono coincidenti con quelle di Doree e Pepper: l'olio che residua dalla cristallizzazione del diossiacido fornì per saponificazione alcalina quantità considerevole del diossiacido (g. 20–25 a partire da 50 g. di acido erucico).

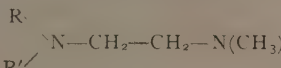
Le acque madri di questa seconda frazione di acido diossibeenico contengono piccole quantità di acido 13-14-epossibeenico p. f. 63°,5 C (g. 0,8–1 circa) che può venir isolato per concentrazione a piccolo volume e cristallizzazione da etere di petrolio.

(9) Ved. ad esempio JINDLEJ, SWERN e SCANLAN, « J. Am. Chem. Soc. », *67*, 412 (1945).

(10) « J. Am. Chem. Soc. », *52*, 1186 (1930). All'etere dietilico si è sostituito quale solvente per l'acido cloridrico l'etere diisopropilico.

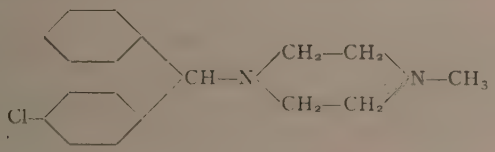
Chimica organica. — *Sulle triazine asimmetriche: derivati 3 N–piperazinici* (*). Nota di SILVANO ROSSI, presentata (**) dal Socio L. CAMBI.

L'introduzione di un nucleo eterociclico nella molecola di farmaci ad azione antistaminica venne attuata per la prima volta nel 1944 con la sintesi del Neo Antergan (N α piridil–N–p·metossibenzil–N'–dimetiletilendiamina) (1). Il nuovo composto si rivelò subito molto attivo e conseguentemente da Huttrer e collaboratori (2) fu sperimentata una lunga serie di prodotti di formula generale:

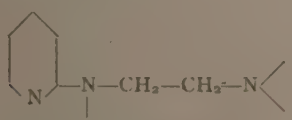


dove R e R' sono dei radicali aromatici, almeno uno dei quali eterociclico. I composti risultati più attivi furono il Neoantergan stesso, la Piribenzamina (N–α–piridil–N–benzil–N'–dimetiletilendiamina) e la Neoetramina (N 2–pirimidin–N–p·metossibenzil–N' –dimetiletilendiamina) (3). Per questi composti dosi di 0,02 γ/cc. sono già in grado di neutralizzare la contrazione causata da 1 γ/cc. di difosfato di istamina sull'intestino isolato di cavia.

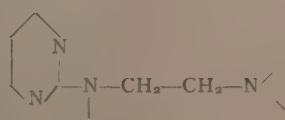
La sostituzione del gruppo etilendiaminico col nucleo della imidazolina, ispirata dalla struttura della istamina, non diede alcun risultato positivo. Di grande importanza si rivelò invece la sostituzione dell'etilendiamina con la dietilendiamina o piperazina. Spetta ad Hamlin e collaboratori (4) l'aver dimostrato che le piperazine 1-4 disostituite sono attivi antistaminici. Il più efficace di questi farmaci è l'Hystantin o 1–p·clorobenzidril–4–metil–piperazina:



Il presente lavoro ha preso anzitutto lo spunto dalle molecole tipo Antergan (I) e Neoetramina (II) per effettuare



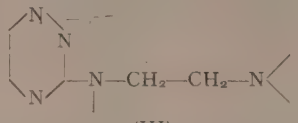
(I)



(II)

(*) Lavoro eseguito presso l'Istituto di Chimica Industriale dell'Università di Milano.
(**) Nella seduta del 10 gennaio 1953.
(1) D. BOVET e collaboratori, «C. R. Soc. Biol.», Paris, *138*, 99 (1944).
(2) C. P. HUTTRER e collaboratori, «J. Am. Chem. Soc.», *68*, 1999 (1946).
(3) J. F. REINHARD e collaboratori, «Proc. Soc. exp. Biol.», N. Y., *66*, 512 (1947).
(4) K. E. HAMKIN e collaboratori, «J. Am. Chem. Soc.», *71*, 2731 (1949).

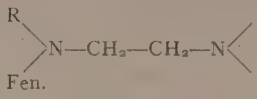
l'introduzione di un nucleo eterociclico contenente un terzo atomo di azoto in posizione 3 rispetto al carbonio legato alla catena laterale (III):



(III)

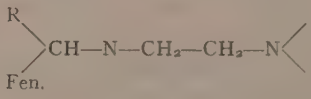
Questo nucleo della triazina asimmetrica oltre che per le ragioni di analogia su esposte venne scelto anche a causa delle sue interessanti proprietà farmacologiche recentemente studiate in questo Istituto [5].

Come catena laterale azotata venne scelto il nucleo della N'–metilpiperazina in armonia quindi con i farmaci della serie Hystantin. Ma la particolarità più importante delle molecole da noi sintetizzate consiste nella differente posizione in esse occupata dal sostituente fenilico. Mentre infatti in tutti gli esempi finora considerati questo sostituente è legato alla catena azotata o direttamente come in (IV) (schema del neoantergan):



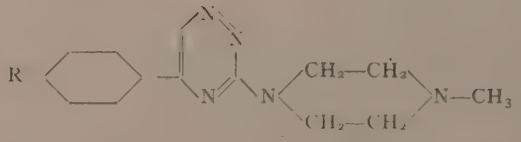
(IV)

o tramite un atomo di carbonio terziario come in (V) (schema dello Hystantin:



(V)

nel nostro caso il sostituente arilico è legato al nucleo piperazinico tramite l'anello triazinico stesso. Ciò non era mai stato tentato e solo l'esperienza potrà dire se il criterio da noi seguìto sia valido. Quanto ai termini preparati, del tipo generale (VI):



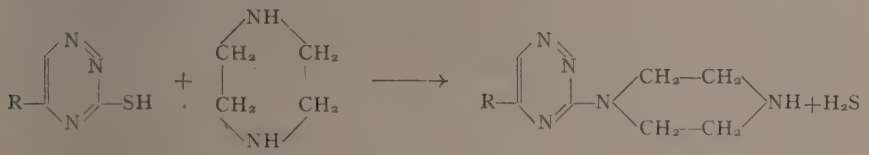
(VI)

per R sono stati scelti oltre all'idrogeno (come termine fondamentale della serie) anche il cloro ed il metossile come i sostituenti dimostratisi più efficaci (Neoantergan e Hystantin).

Anche lo schema di sintesi da noi seguìto differisce sensibilmente da quelli usati comunemente per la preparazione di prodotti antistaminici. Punto

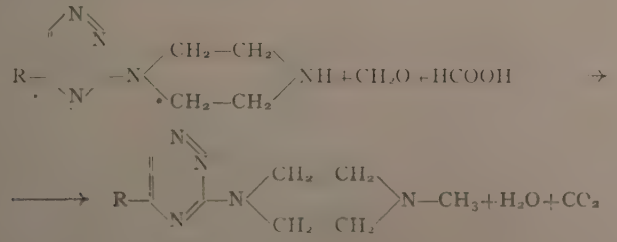
(5) R. Fusco e collaboratori, lavoro in corso di pubblicazione.

di partenza è la 3–mercaptotriazina asimmetrica variamente sostituita in 5. A questo composto si può giungere attraverso due vie ambedue sperimentate in questo lavoro. La prima via, dovuta a Wolff [6] e già da noi largamente impiegata per la sintesi di 1, 2, 4 triazine [7] si serve dei cloruri degli acidi. La seconda invece [7] parte dai gliossali sostituiti: con tiosemicarbazide in difetto (meno di una mole) si forma il monotiosemicarbazone che con alcali chiude a mercaptotriazina. Queste reazioni avvengono facilmente, con buone rese, anche variando i sostituenti. Le 3–mercapto as. triazine sono prodotti assai stabili ai quali il gruppo tiolico conferisce caratteristiche acide: esso costituisce anche il punto più reattivo della molecola. Il gruppo tiolico reagisce infatti con facilità con le basi azotate eliminandosi come idrogeno solforato; con ammoniaca alcoolica in tubo chiuso fornisce le 3–aminotriazine, con idrato di idrazina dà le 3–idrazinotriazine [7]. Su questa traccia è stata tentata la reazione con piperazina. Un primo tentativo eseguito con piperazina esaidrata fallì; si lavorò allora con piperazina anidra e si vide che la reazione procedeva nettamente con abbondante sviluppo di idrogeno solforato. Per impedire la condensazione di due moli di triazina con una di piperazina, si operò in eccesso di quest'ultima (da 4 a 5 volte il teorico). La reazione ha luogo secondo lo schema seguente:



(VII) (VIII)

e decorre, senza l'impiego di solventi, a una temperatura di 135°–145°. La umidità non è dannosa alla reazione, si è operato talvolta con piperazina non totalmente anidra. Il solvente migliore per l'estrazione delle basi è risultato il cloroformio: da questa soluzione, per introduzione di acido cloridrico secco vennero precipitati i cloridrati. Il successivo ed ultimo passaggio consiste nella metilazione delle precedenti basi che venne effettuata secondo Clarke [8] con formaldeide e acido formico:



(6) WOLFF e LINDENHAYN, « Ber. », *36*, 4127 (1903).
(7) S. ROSSI, lavori in corso di pubblicazione.
(8) CLARKE, « J. Am. Chem. Soc. », 4571 (1933).

È risultato conveniente operare con un forte eccesso di acido formico e limitare la durata della reazione a circa mezz'ora, controllando la scomparsa della piperazinotriazina non ancora metilata col saggio all'acido nitroso. Questo reattivo non agisce infatti sui prodotti metilati, ma dà subito un precipitato di nitrosoamina colla piperazina non sostituita ad uno degli azoti. L'isolamento e la purificazione delle nuove basi vennero eseguiti con gli stessi criteri illustrati a proposito delle basi non metilate. I cloridrati così ottenuti hanno un aspetto simile ai precedenti, ma posseggono maggiore solubilità in acqua. La sperimentazione farmacologica dei nuovi prodotti è attualmente in corso presso l'Istituto di Farmacologia dell'Università di Milano.

Parte sperimentale.

3–N–Piperazin, 5–fenil as. triazina (VIII R = C_6H_5). – La piperazina esaidrata del commercio viene disidratata con una duplice distillazione su idrato sodico in pastiglie. Gr. 17 di 5 fenil, 3 mercapto as. triazina preparata da fenilgliossale e tiosemicarbazide [9] vengono scaldati a ricadere in un bagno ad olio con 35 gr. di piperazina anidra. Si mantiene la temperatura del bagno a 140° per 4 ore, lo svolgimento di idrogeno solforato è piuttosto intenso. La reazione è terminata quando alcune gocce del liquido reagente versate in acqua ed acidificate non dànno precipitato. (Assenza di mercaptotriazina di partenza). A questo punto si diluisce con acqua a 5 volumi e si estrae con cloroformio. Gli estratti vengono lavati con acqua, poi essiccati su carbonato potassico. Dalla soluzione cloroformica anidra si precipita il dicloridrato con una corrente di acido cloridrico gassoso secco. Esso si presenta come una massa gialla che cristallizza da alcool diluito. Resa gr. 20 (70 %), p. f. 300°–305°:

	trov.	N %	22,15
per $C_{13}H_{15}N_5 \cdot 2HCl$	cerc.		22,29.

Una piccola porzione del prodotto sciolta in acqua e acidificata viene trattata con una soluzione di nitrito sodico: precipita la nitrosoamina che si cristallizza da etanolo, p. f. 174°:

	trov.	N %	30,98
per $C_{13}H_{14}N_6O$	cerc.		31,11.

3–N–(N'–metil) piperazin–5–fenil as. triazina (VI R = H). – 15 gr. di dicloridrato di cui sopra vengono neutralizzati con 4 gr. di idrato sodico in soluzione acquosa concentrata. Raffreddando si aggiungono poi 20 cc. di acido formico 85 % fino a ridisciogliere il precipitato inizialmente formato. Si aggiungono poi 10 cc. di soluzione acquosa di formaldeide al 36 40 %. Si scalda la miscela a b.m. per 4 ore, si ha notevole svolgimento di CO_2,

(9) R. Fusco e collaboratori, « Annali di Chimica », *52*, 101 (1952).

dopo aggiunta di 10 cc. di acido cloridrico conc. si evapora sotto vuoto fino a secchezza. Si riprende con acqua, si filtra e si alcalinizza con idrato sodico, si separa un olio scuro che viene estratto con cloroformio. Dopo lavaggio con acqua si essica la soluzione cloroformica su carbonato potassico e vi si fa passare una corrente di acido cloridrico gassoso secco. Il dicloridrato precipita e viene cristallizzato da una miscela etanolo–80 % e acetato di etile in parti eguali. Il prodotto cristallizza con due molecole d'acqua, p. f. 278°:

	trov. N %	19,22	HCl %	19,92
per $C_{14}H_{17}N_5 \cdot 2HCl \cdot 2H_2O$	calc.	19,50		20,05.

Picrato p. f. 229°.

Monotiosemicarbazone del p·metossifenilgliossale. – Per azione del cianuro potassico (1, 2 moli) in soluzione acquosa concentrata su una soluzione alcoolica di p·metossidiazoacetofenone (1 mole) si ottiene il sale potassico del p·metossiacetofenonazoformonitrile sotto forma di un solido cristallino giallo–oro. Il sale sciolto in acqua e sottoposto all'azione dell'idrogeno solforato, dà luogo al monotiosemicarbazone. Cristalli da etanolo p. f. 178°.

Il medesimo prodotto può essere ottenuto per azione della tiosemicarbazide sul p·metossifenilgliossale [10]:

	S trov. %	13,53
per $C_{10}H_{11}O_2SN_3$	cerc.	13,48.

3–mercapto–5–p·metossifenil as. triazina (VII R = p.CH_3O–C_6H_4). – Il monotiosemicarbazone del p·metossifenilgliossale viene sospeso in una soluzione acquosa di carbonato potassico e scaldato all'ebollizione, dopo dissoluzione si filtra e si acidifica il filtrato con acido cloridrico. Cristalli gialli da etanolo p. f. 219° con decomposizione:

	S trov. %	14,73
per $C_{10}H_9OSN_3$	cerc.	14,62.

3–N–Piperazin, 5–p·metossifenil as. triazina (VIII R = p·CH_3O–C_6H_4). – In un palloncino munito di ricadere si scaldano 10 gr. di p·metossifenilmercaptotriazina con 22 gr. di piperazina anidra (pari a 50 gr. di piperazina esaidrata). In un bagno d'olio si mantiene la temperatura a 140° per tre ore e mezzo, fino a che un campioncino della soluzione diluito con acqua e acidificato non dà più precipitato. Si diluisce con acqua fino a 250 cc. e si filtra a caldo, per raffreddamento cristallizza l'idrato della base in lunghi fiocchi gialli. Aghi gialli da acqua, p. f. 73°. Resa gr. 7 (55 %). Per essiccamento prolungato sotto vuoto a 70° la base si ottiene anidra, p. f. 102°:

	trov. N %	23,60.
per $C_{14}H_{17}N_5O \cdot H_2O$	cerc.	24,22

(10) P. KARRER e A. V. SEGESSER, «Helv. Chim. Acta», *18*, 273 (1935).

Una porzione sciolta in acqua, acidificata e trattata con nitrito sodico, separa la nitrosoamina, p. f. 185° (da etanolo).

3–N (N'–metil) Piperazin–5–p·metossifenil as. triazina (VI R = CH_3O). – 5,6 gr. di 3 N Piperazin, 5 p·metossifenil as·triazina vengono sciolti in 20 cc. di acido formico 85 % raffreddando con acqua. Si aggiungono poi 6 cc. di formaldeide in soluzione acquosa 36 %. Si scalda a b.m. per 1 ora fino a cessazione dello sviluppo di anidride carbonica. Un campioncino diluito e acidificato non deve dare precipitato per aggiunta di una soluzione di nitrito sodico. A questo punto si diluisce e si alcalinizza con idrato sodico. Si estrae con cloroformio l'olio separatosi e si asciuga la soluzione su carbonato potassico anidro. Con acido cloridrico anidro si precipita direttamente il dicloridrato, massa giallo–chiara solubile in acqua, insolubile nei solventi non acquosi. Si cristallizza da una miscela di 35 cc. di acqua più 150 cc. di etanolo più 150 cc. di etere acetico. Polvere bianca, p. f. 280°:

	trov.	% N	19,60	HCl	19,95
per $C_{15}H_{19}ON_5 \cdot 2HCl$	cerc.		19,55		20,39.

3–mercapto–5–p·clorofenil as. triazina (VII R = p·Cl–C_6H_4). – 45 gr. di idrato del p·clorofenilgliossale [11] vengono sciolti in acqua a cui viene aggiunto il 10 % circa di etanolo. Si filtra a caldo con carbone per avere una soluzione limpida e vi si aggiunge una soluzione acquosa acida per acido acetico di 20,5 gr. di tiosemicarbazide. Precipita il tiosemicarbazone: aghi aranciati da metanolo, p. f. 160°.

Il tiosemicarbazone così ottenuto viene sciolto all'ebollizione in una soluzione di 40 gr. di carbonato potassico in 300 cc. di acqua, dopo 15 minuti di ebollizione si filtra da eventuali porzioni indisciolte, si acidifica il filtrato ottenendo 42 gr. di triazina. Resa 82 %. Aghi arancione da etanolo con una molecola d'acqua di cristallizzazione, p. f. 199°:

	S %	trov.	13,65
per $C_9H_6N_3SCl \cdot H_2O$		cerc.	13,22.

3–N–Piperazin, 5 p·clorofenil as. triazina (VIII R = p·Cl–C_6H_4). – Si mescolano 25 gr. di p.clorofenilmercaptotriazina con gr. 44 di piperazina anidra. La massa viene scaldata 4 ore a 140° in un bagno d'olio, e quando il saggio di diluizione e acidificazione non separa più prodotto di partenza, si diluisce tutto con acqua e si estrae con cloroformio. Gli estratti si asciugano su carbonato potassico e si sottopongono a una corrente di acido cloridrico secco. Dapprima si separa il monocloridrato giallo, poi il dicloridrato rosso. Il monocloridrato è cristallizzabile da etanolo diluito, p. f. 330°:

	N %	trov.	22,89	HCl	11,38
per $C_{13}H_{14}N_5Cl \cdot HCl$		calc.	22,43		11,69.

Il dicloridrato ha punto di fusione superiore ai 350°.

(11) Arnold e Fuson, « J. Am. Chem. Soc. », 1295 (1936).

3–N–(N' metil) piperazin 5 p·clorofenil as. triazina (VI R = Cl). – 15 gr. di dicloridrato della 3 N piperazin–5 p·clorofenil as. triazina vengono neutralizzati con la quantità stechiometrica di idrato sodico (gr. 3,5) sciolta in acqua. Raffreddando si aggiungono poi 30 cc. di acido formico, infine si aggiungono 10 cc. di soluzione di formaldeide 38 %, si scalda mezz'ora a b.m. Terminato l'energico sviluppo di anidride carbonica si osserva che la reazione con acido nitroso è divenuta negativa. Allora si diluisce e si alcalinizza con idrato sodico, l'olio bruno separatosi viene estratto con cloroformio e la soluzione, dopo essiccamento, è trattata con acido cloridrico secco. Si ha separazione di un prodotto aranciato, p. f. 305° (da metanolo 80 %), che viene riconosciuto come il monocloridrato della dibase:

	N %	trov.	20,87	HCl	11,45
per $C_{14}H_{16}N_5Cl \cdot HCl$		cerc.	21,47		11,20.

Una porzione del monocloridrato viene alcalinizzata con idrato sodico, si separa un olio che viene estratto con etere, per evaporazione si ottiene una sostanza cristallina che è la base libera, p. f. 121°.

La base, sciolta in acetone e trattata con ioduro di metile separa un solido cristallino giallo, p. f. 165° (da etanolo) costituito dallo ioduro di N (5 p·clorofenil) as. triazino 3–N'–dimetilpiperidinio.

Chimica fisica. — *Sulla cinetica della reazione tra 1–cloro–2–nitroetano ed acqua* (*). Nota I di MASSIMO SIMONETTA e GIORGIO FAVINI, presentata (**) dal Socio L. CAMBI.

Da circa due anni abbiamo in corso delle ricerche riguardanti la mobilità del cloro in nitroderivati alchilici, arilici, ed alchilarilici allo scopo di determinare il meccanismo delle reazioni di sostituzione e di eliminazione del cloro e di indagare la distribuzione della densità elettronica in queste molecole. Nella presente Nota vengono esposti alcuni dei risultati sperimentali da noi acquisiti per la reazione tra 1–cloro–2–nitroetano ed acqua.

Preparazione del 1–cloro–2–nitroetano. – Il nitroetanolo preparato secondo le modalità indicate da Controulis, Rebstock e Crooks (1), si lascia gocciolare in cloruro di tionile adoperato in eccesso del 50 % rispetto la quantità teoricamente necessaria per la clorurazione.

Terminato il primo sviluppo di gas, si riscalda mantenendo la miscela di reazione ad ebollizione vivace per almeno quattro ore. Dopo raffredda-

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica industriale dell'Università di Milano e nell'Istituto di Chimica generale del Politecnico di Milano.

(**) Nella seduta del 13 dicembre 1952.

(1) J. CONTROULIS, M. C. REBSTOCK, H. M. CROOKS, « J. Am. Chem. Soc. », 2463 (1949).

mento si elimina sotto vuoto l'eccesso di cloruro di tionile e si distilla il cloronitroetano ottenuto (p. eb. 75-85° a 20 mm.). Dopo due ridistillazioni si ottiene un liquido limpido, incolore, di odore pungente (p. eb. 78–79° a 20 mm.). Resa 55 % ca. Sul prodotto puro sono state eseguite le seguenti determinazioni: analisi del cloro: 32,5 % (teorico 32,6 %). Densità a 25 °C.: 1,343.

Indice di rifrazione: $n_{25}^{D} = 1{,}44781$. Rifrazione molecolare: 21,84 (teorico: 21,925). Momento elettrico (determinato secondo Cohen Henriquez [2] in soluzione benzenica a 25 °C.): 3,17 Debye.

Preparazione della soluzione e prove preliminari. – Come solventi sono stati impiegati: diossano anidro purificato secondo Laitinen e Wawzonek [3] e acido formico Kodak al 98,95 % in peso. Sono state preparate due soluzioni 0,15 *n* di nitrocloroetano in diossano ed acido formico, delle quali è stata controllata la stabilità tanto a freddo (fino ad alcune settimane) che a caldo (tre ore all'ebollizione): in nessun caso è stata riscontrata traccia di Cl^- in soluzione.

Per aggiunta di acqua (1 volume di acqua su due volumi di soluzione) a temperatura ambiente la presenza di Cl^- in soluzione veniva riscontrata soltanto in piccola quantità (inferiori all'1 % del cloro totale) dopo diverse ore. Per riscaldamento invece è stato qualitativamente riscontrato che la formazione di Cl^- aumenta progressivamente con l'aumentare della temperatura e, a parità di temperatura, con l'aumentare della quantità di acqua aggiunta. La reazione è la seguente:

$$CH_2Cl—CH_2NO_2 + H_2O = CH_2OH—CH_2NO_2 + H^+ + Cl^-.$$

È stata infatti riscontrata nelle prove con soluzione diossanica la formazione di acido cloridrico ed è stato isolato il nitroetanolo formato evaporando sotto vuoto il solvente e distillando il residuo. Punto di ebollizione (102–103 a 18 mm) e indice di rifrazione del distillato corrispondevano ai valori del 2–nitro–1–etanolo.

La possibile concomitanza della reazione:

$$CH_2Cl—CH_2NO_2 \rightarrow CH_2=CHNO_2 + H^+ + Cl^-$$

è da escludere in quanto il nitroetilene in soluzione acquosa dà un precipitato bianco di polimero [4]; in tutte le prove da noi eseguite la soluzione è invece sempre rimasta limpida; per maggior sicurezza dopo estrazione con tetracloruro di carbonio l'estratto è stato trattato con una soluzione diluita di bromo in tetracloruro (0,02 *n*); dopo mezz'ora rititolato il bromo per via iodometrica si è trovata inalterata l'intera quantità impiegata.

Per controllare l'eventuale possibilità della reazione inversa:

$$CH_2OH—CH_2NO_2 + HCl = CH_2Cl—CH_2NO_2 + H_2O$$

(2) Cohen, Henriquez, « Physica », (1934); « Rec. Trav. Chim. », *3*, 327 (1935).
(3) H. A. Laitinen, S. Wawzonek, « J. Am. Chem. Soc. », *64*, 1765 (1942).
(4) H. Wieland, E. Sakellarios, « B. », *52*, 901 (1919).

nelle condizioni sperimentali da noi adottate, sono stati disposti in tubo chiuso 20 cc. di soluzione 0,15 *n* di nitroetanolo in diossano con 10 cc. di HCl acquoso 0,3 *n*; dopo otto ore e dopo ventiquattro ore a 70° la scomparsa di acido cloridrico è stata praticamente irrilevante. Sono state inoltre eseguite prove della durata di 24 ore a 70° con soluzioni 0,1 *n* in diossano cui era stata aggiunta la quantità equimolecolare d'acqua oppure dieci volte questa quantità: in nessun caso si è avuto apprezzabile formazione di Cl in soluzione.

È stata saggiata anche la possibilità di studiare la reazione:

$$CH_2Cl—CH_2NO_2+OH^-=CH_2OH—CH_2NO_2+Cl^- .$$

A tale scopo 10 cc. di soluzione 0,15 *n* in diossano sono stati mescolati con 5 cc. di KOH 0,3 *n* acquosa: dopo un minuto a temperatura ambiente (20°) la soluzione è stata acidificata e trattata con $AgNO_3$: si trova presente sotto forma di ione l'82,5 % del cloro totale.

Analoga prova della durata di 1 ora dà il 96 % di Cl^- formato. All'atto della acidificazione si forma un precipitato bianco poco solubile anche in tetracloruro di carbonio (probabilmente un polimero di $CH_2=CHNO_2$) mentre nella soluzione si è riscontrata la presenza di sostanze non sature (probabilmente $CH_2=CHNO_2$). Poiché la reazione di idrolisi del cloruro di etile è stata studiata dal punto di vista cinetico in condizioni diverse da quelle da noi adottate per il cloruro di nitroetile[5], abbiamo lasciato in tubo chiuso per 3 ore a 100° 20 cc. di soluzione 0,15 *n* di C_2H_5Cl in diossano e 10 cc. d'acqua. Alla fine dell'esperienza la percentuale di Cl formati è stata del 5,2 % sul cloro totale.

Cinetiche in diossano acquoso. – Lo studio cinetico dell'idrolisi si iniziava ponendo in un termostato a circolazione d'acqua, in cui la temperatura era mantenuta costante a ± 0,05°, i due reattivi: acqua e soluzione di 1-cloro-2-nitroetano in diossano. Raggiunta la temperatura desiderata si mescolava alla soluzione del composto la quantità voluta d'acqua.

I prelievi venivano eseguiti con pipetta da 25 cc. tarata a quella temperatura, e i tempi controllati con cronometro. La reazione veniva bloccata al tempo richiesto versando in 50 cc. di acido nitrico 0,3 *n* freddo. L'analisi veniva fatta secondo Vohlard con $AgNO_3$ 0,1 *n* in eccesso. Si filtrava quindi l'AgCl formatosi, lavandolo ripetutamente, e si titolava l'eccesso di $AgNO_3$ nel filtrato con solfocianuro di ammonio in presenza di allume ferrico. Terminati i prelievi sulla porzione ultima si controllava l'assenza di composti non saturi per titolazione con bromo come detto in precedenza.

Abbiamo eseguito cinetiche in soluzioni diossano-acqua in rapporto 2 : 1 (in volume) a 50°-55°-60°-65°-70°. In rapporto 5 : 1 a 60°-65°-70°-75°-80°. In rapporto 1 : 1 a 60°-65°-70°. I dati relativi sono raccolti nelle seguenti tabelle; dove K_1 (in minuti^{-1}) è stato calcolato con la formula $K_1 = 2{,}3/t \lg C_0/C$.

(5) G. H. GRANT, C. N. HINSHELWOOD, « J. Chem. Soc. », 258 (1933).

Soluzione 0,1 n in acqua-diossano (1 : 2).

t'	50°		55°		60°		65°		70°	
	% Cl^-	K_1	% Cl^-	K_1	% Cl^-	K_1	% Cl^-	K_1	% Cl^-	K_1
30	3,212	0,00107	4,912	0,00168	6,500	0,00224	9,068	0,00316	11,132	0,00393
60	6,292	0,00107	9,068	0,00158	13,004	0,00232	16,756	0,00305	21,384	0,00400
90	8,932	0,00104	12,832	0,00152	18,548	0,00228	24,076	0,00306	29,880	0,00394
150	13,904	0,00100	21,294	0,00159	29,176	0,00230	36,708	0,00305	44,840	0,00395
210	20,944	0,00111	28,432	0,00158	38,284	0,00229	47,360	0,00305	56,430	0,00394

Soluzione 0,1 n in acqua-diossano (1 : 5).

t'	60°		65°		70°		75°		80°	
	% Cl	K_1	% Cl^-	K_1	% Cl^-	K_1	% Cl	K_1	% Cl^-	K_1
30	1,892	0,000636	2,544	0,000859	3,432	0,00116	4,324	0,00147	5,632	0,00198
60	3,652	0,000620	—	—	6,732	0,00116	8,648	0,00151	11,132	0,00196
90	—	—	7,096	0,000815	9,812	0,00115	13,004	0,00154	16,984	0,00206
150	9,064	0,000639	11,816	0,000838	16,104	0,00116	20 528	0,00153	27,985	0,00212
210	12,584	0,000639	16,172	0,000839	21,824	0,00116	27,656	0,00154	38,240	0,00228
300	18,084	0,000618	22,112	0,000835	—	—	—	—	—	—

Soluzione 0,1 n in acqua-diossano (1 : 1).

t'	60°		65°		70°	
	% Cl^-	K_1	% Cl^-	K_1	% Cl^-	K_1
30	11,132	0,00394	16,568	0,00603	22,904	0,00866
60	20,944	0,00393	30,032	0,00595	39,868	0,00847
90	27,704	0,00394	42,284	0,00609	53.728	0,00856
120	—	—	50,956	0,00593	63,564	0,00841
150	45,280	0,00400	58,876	0,00592	71,880	0,00845
210	56,845	0,00399	—	—	—	—

Con questi dati sono stati costruiti i diagrammi A, B, C, mediante i quali sono stati calcolati i valori medi delle costanti di velocità ed è stato verificato l'andamento del primo ordine della reazione. Il diagramma D ha permesso il calcolo per via grafica dei calori di attivazione per la reazione nei vari solventi.

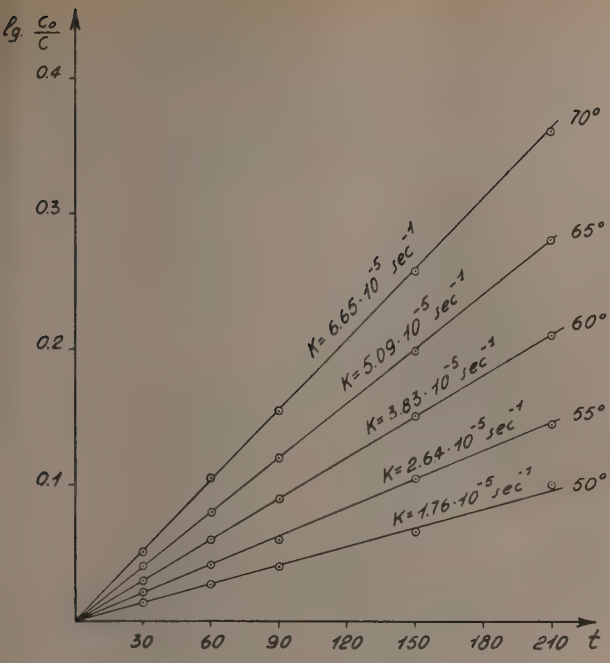


DIAGRAMMA A

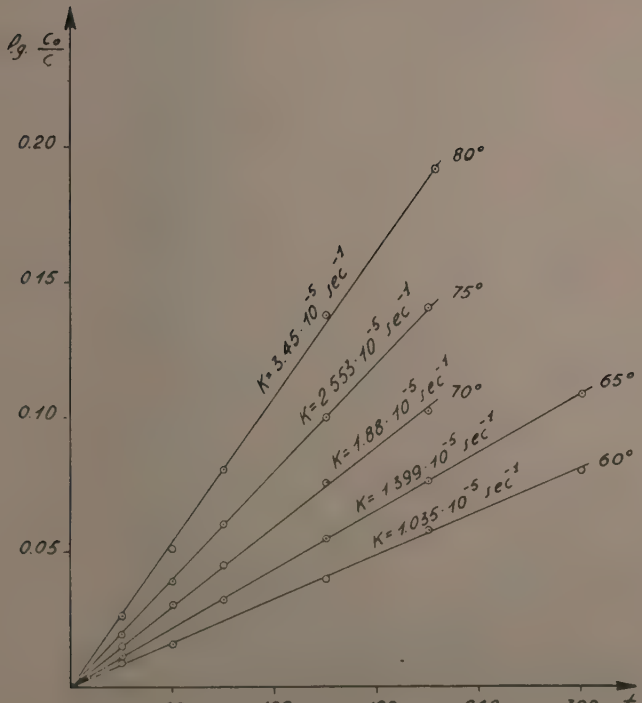


DIAGRAMMA B

Didascalia per i diagrammi A, B, C, D, E, F, G

T: temperatura in °K

t: tempo in minuti primi

Co: conc. del cloronitroetano in moli/l. al tempo zero

C: conc. del cloronitroetano in moli/l. al tempo t

In ciascuna curva sono indicati la temperatura in °C e K_I in sec^{-1}.

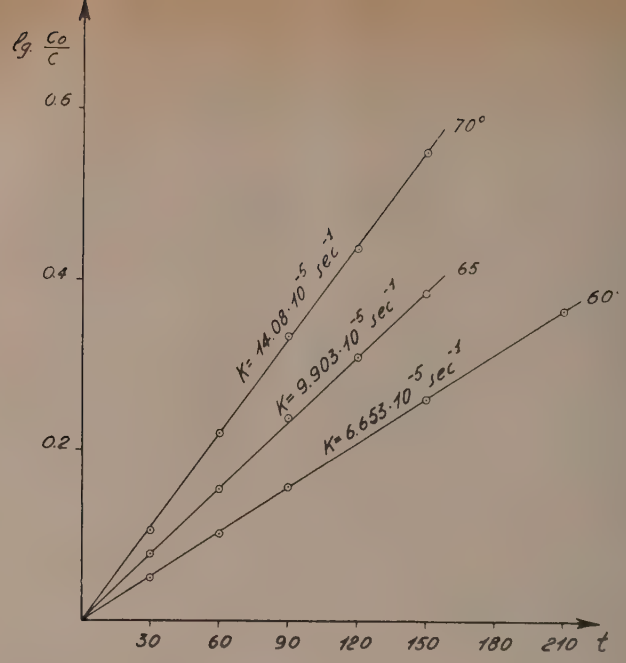
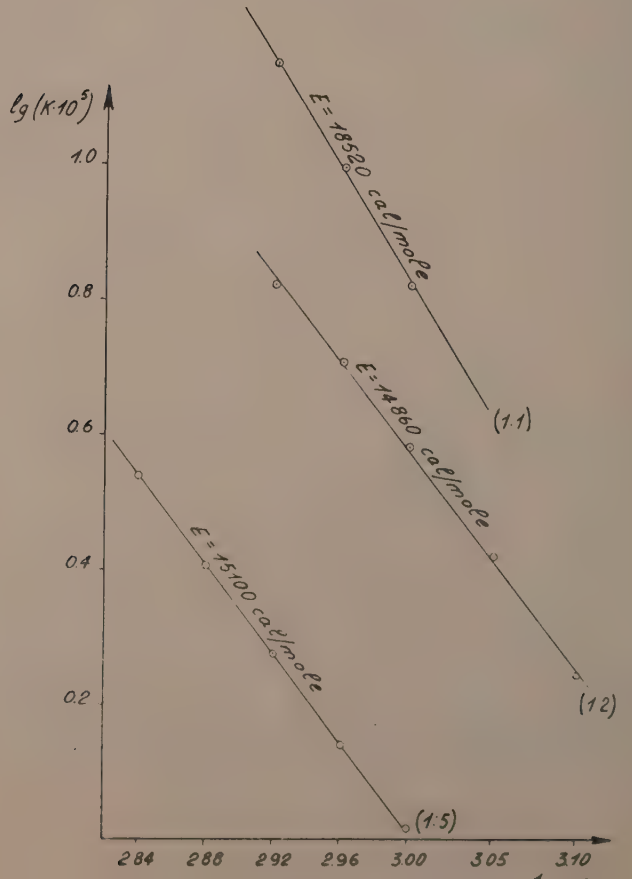

lg. Co/C
0.6
0.4
0.2
70°
65
60
K= 14.08·10 -5 sec -1
K= 9.903·10 -5 sec -1
K= 6.653·10 -5 sec -1
30
60
90
120
150
180
210
t

DIAGRAMMA C


lg(K·10^5)
1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
E = 18520 cal/mole
E = 14860 cal/mole
E = 15100 cal/mole
(1.1)
(12)
(1.5)
284
288
292
296
300
305
310

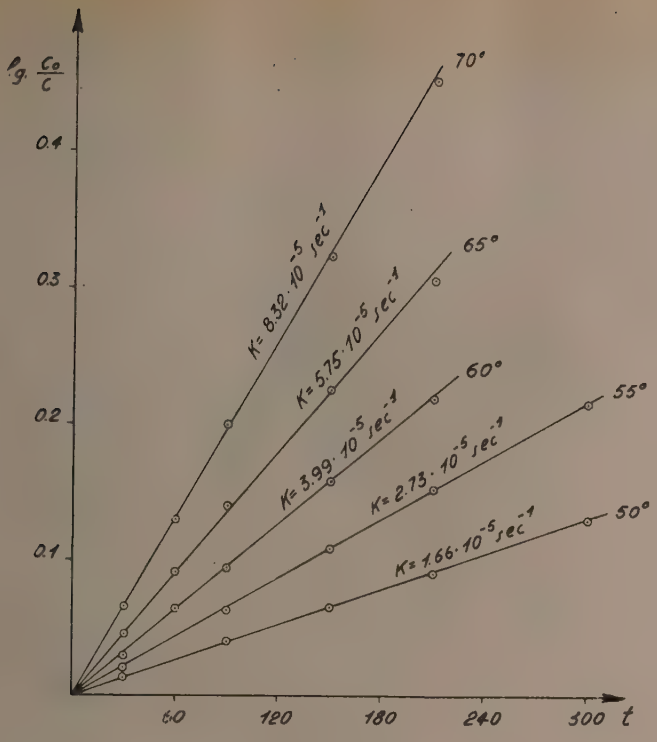


DIAGRAMMA E

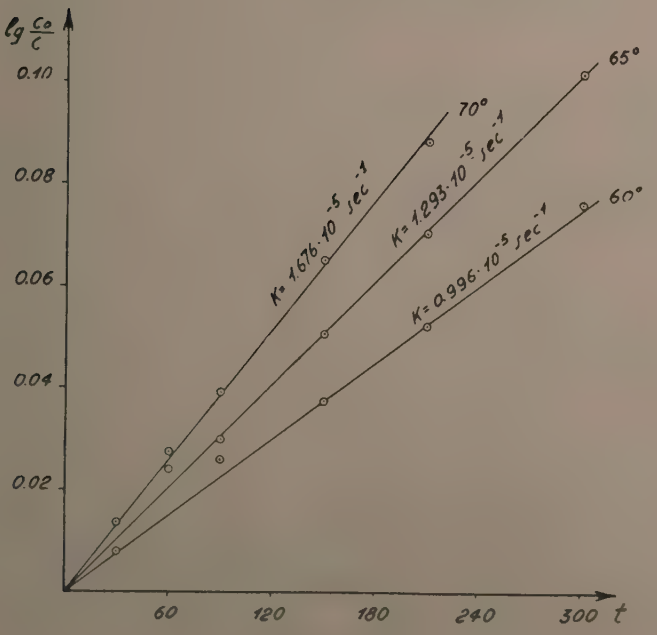


DIAGRAMMA F

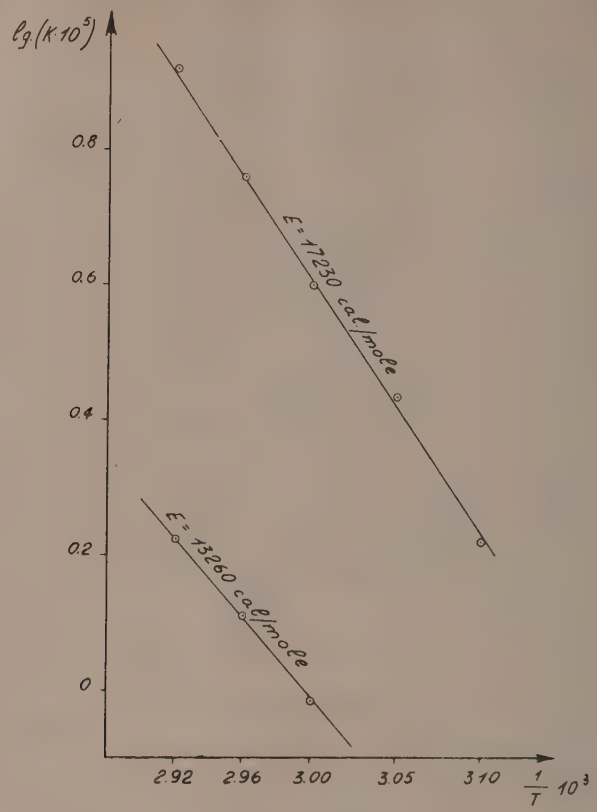


DIAGRAMMA G

Cinetiche in acido formico acquoso. – Le prove sono state eseguite secondo le modalità precedentemente descritte. Abbiamo eseguito cinetiche in acido formico–acqua in rapporto di 2 : 1 (in volume) a 50°–55°–60°–65°–70° e in rapporto 5 : 1 a 60°–65°–70°. I dati sono raccolti nelle seguenti tabelle:

Soluzione 0,1 n in acido formico–acqua (2 : 1).

t'	50°		55°		60°		65°		70°	
	% Cl	K_1	% Cl^-	K_1	% Cl^-	K_1	% Cl^-	K_1	% Cl	K_1
30	3,104	0,001050	4,720	0,00161	7,064	0,00244	9,836	0,00345	14,192	0,00510
60	—	—	—	—	13,796	0,00247	18,944	0,00350	26,072	0,00503
90	9,044	0,001053	13,432	0,00160	19,340	0,00239	26,864	0,00347	36,700	0,00508
150	13,796	0,000989	22,112	0,00166	30,464	0,00242	40,264	0,00343	54,540	0,00496
210	18,548	0,000975	29,636	0,00167	39,472	0,00239	50,560	0,00335	64,752	0,00496
300	26,044	0,001005	39,072	0,00165	—	—	—	—	—	—

Soluzione 0,1 n in acido formico-acqua (5 : 1).

t'	60°		65°		70°	
	% Cl^-	K_1	% Cl^-	K_1	% Cl^-	K_1
30	—	—	1,948	0,000655	3,136	0,001058
60	—	—	—	—	5,512	0,000943
90	5,876	0,000672	6,668	0,000766	8,648	0,001005
150	8,252	0,000575	11,024	0,000777	13,996	0,001005
210	11,420	0,000577	14,984	0,000773	18,152	0,000968
240	13,004	0,000580	—	—	—	—
300	16,172	0,000587	20,924	0,000781	—	—

Con questi dati abbiamo costruiti i diagrammi E ed F e il diagramma G per il calcolo delle energie di attivazione.

Geologia. — *Sulla struttura della regione della Laga (Abruzzi)* (*). Nota di JEAN DEMANGEOT, presentata (**) dal Socio R. FABIANI.

Poiché i fogli dell'Aquila e di Teramo della carta geologica d'Italia 1 : 100.000 non sono ancora pubblicati, la presente Nota si prefigge di raccordare gli elementi tettonici dell'Abruzzo settentrionale (fogli di Norcia e Ascoli Piceno) con quelli del Gran Sasso d'Italia (1).

Nell'Abruzzo settentrionale, da ovest verso est, si osservano i seguenti allineamenti:

1° *I Monti della Laga.* – È noto come si tratti di una anticlinorio di Molassa con asse orientato nord ovest–sud est (2). Verso nord, se ci si riferisce alle inclinazioni del Monte Ceresa, oltre il F. Tronto, l'asse anticlinale sembra incurvarsi verso NE per raggiungere il ramo occidentale dell'anticlinale d'Acquasanta. Nella parte centrale della catena, e sul versante occidentale, il nucleo Elveziano della Laga compare sotto forma d'anticlinale rovesciata verso occidente. L'attento esame dello specchio situato

(*) Eseguito presso il Centro di Studio per la Geologia dell'Italia Centro-meridionale del Consiglio Nazionale delle Ricerche in Roma.

(**) Nella seduta del 13 dicembre 1952.

(1) Cfr. J. DEMANGEOT, *L'Arc Abruzzais externe, étude tectonique*. « La Ricerca Scientifica », giugno 1951, pp. 904–939.

(2) Cfr. F. SCARSELLA, *Carta geologica d'Italia, foglio Norcia, n. 132* (1941).

sopra all'abitato di Preta mostra come il fianco inverso di questa anticlinale sia stato laminato ma non fagliato: gli strati sono dislocati e striati secondo le facce degli strati e vi mancano le brecce per fratturazione [3]. L'asse appare diretto nord–sud. Inoltre, il nucleo Elveziano duro, separato dalla Molassa

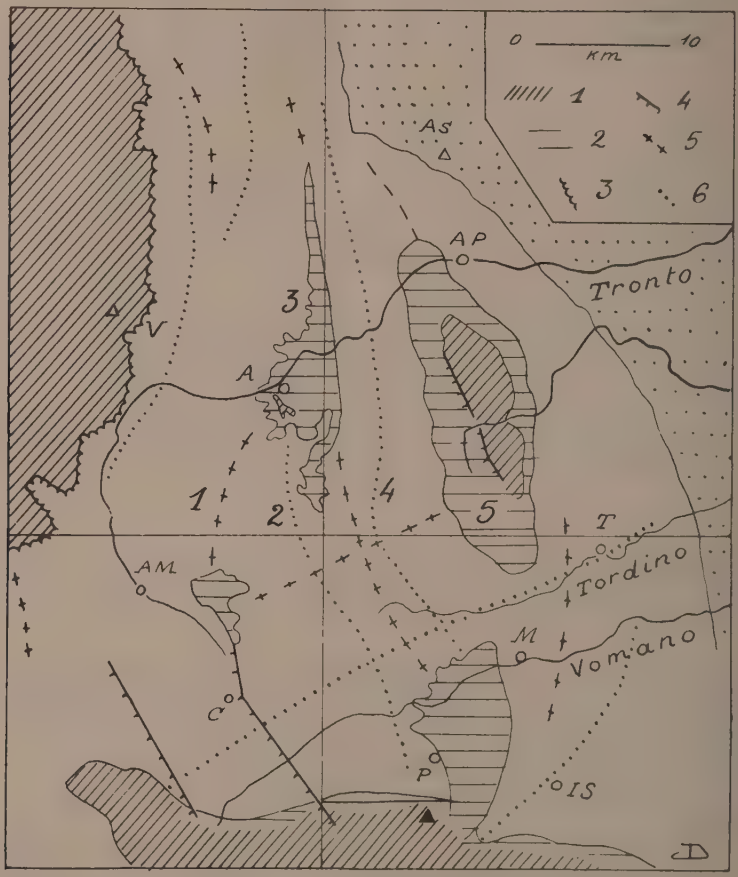


Fig. 1. – Rapporti strutturali della regione della Laga e del Gran Sasso d'Italia.

Segni speciali: 1. Terreni preelveziani. 2. Terreni elveziani. 3. Fronte dell'arco Umbro-Marchigiano. 4. Faglie (i trattini sono volti verso il lato abbassato). 5. Asse anticlinale della Molassa. 6. Asse sinclinale della Molassa. In bianco la Molassa, punteggiato il Pliocene.

Abbreviazioni: A, Acquasanta. AM, Amatrice. AP, Ascoli Piceno. AS, Monte Ascensione. C, Campotosto. M, Montorio al Vomano. P, Pietracamela. V, Monte Vettore.

Il Gran Sasso d'Italia è indicato con un triangolo nero (presso il margine inferiore della cartina). I numeri della cartina designano gli elementi strutturali citati nel testo: 1. Anticlinale della Laga. 2. Sinclinale di Crognaleto. 3. Anticlinale d'Acquasanta. 4. Sinclinale Fluvione-Tevera. 5. Anticlinale della Montagna dei Fiori.

Le due perpendicolari che attraversano il disegno rappresentato il raccordo dei fogli 1 : 100.000 (Norcia a NO; Ascoli Piceno a NE, Aquila a SO, Teramo a SE).

(3) Queste osservazioni confermano intieramente quelle di A. G. Segre, *L'Anticlinale della Laga e la tettonica del confine marchigiano abruzzese*. « La Ricerca Scientifica », marzo–aprile 1948, pp. 406–414.

per mezzo di uno strato di argille tortoniane, presenta un carattere leggermente diapirico.

Al sud la Laga è costituta da una serie molassica monoclinale a immersione volta verso l'Adriatico: effettivamente l'edifizio anticlinale è troncato da una doppia faglia immersa ad occidente e diretta nord ovest–sud est, obliqua dunque rispetto all'asse elveziano (4), che si può denominare «Faglia di Campotosto». Non è fuor di luogo ricordare come Campotosto sia stato l'epicentro del grave terremoto del 1950 che ha raggiunto l'VIII grado della scala Mercalli (5). Tuttavia nessuna delle gallerie che traversano il piano di faglia è stata interrotta (6). Più a sud la faglia di Campotosto taglia la vallata del F. Vomano nei paraggi della centrale idroelettrica di Provvidenza e prosegue nel massiccio calcareo del Gran Sasso (7).

2° *La sinclinale di Crognaleto.* – Prende origine, nei dintorni di Pietracamela senza tuttavia che sia possibile di precisare il punto, una sinclinale ad asse diretto nord ovest–sud est, appena accennata, lungo la base orientale della Laga. La si può osservare distintamente lungo l'asse del torrente Mistrasca, affluente della sponda destra del F. Vomano. Più a nord tale sinclinale sembra passare per Macchiatornella e alle falde del Monte Romicito... La presenza di questo accidente singolare e problematico, è in parte postulata dalle pendenze dell'anticlinale detta d'Acquasanta, nei paraggi del Rio Valle Castellana.

3° *L'Anticlinale d'Acquasanta*, che viene successivamente, fa emergere l'Elveziano. Si raccorda sicuramente in profondità con il fascio occidentale elveziano di Cima Alta (8). Il raccordo avviene secondo l'asse Ponte S. Giacomo–Colle Cepo. Le inclinazioni della Molassa sono considerevolmente attenuate rispetto a quelle dell'Elveziano.

4° *La Sinclinale Fluvione–T. Castellano–Tevera*, interessa bruscamente la Molassa sul foglio di Ascoli Piceno. Si stabilisce d'altronde abbastanza facilmente con metodi morfologici, come questa molassa comporti otto orizzonti di arenarie dure separate da scisti teneri. Verso sud, e attraverso l'alto bacino del F. Tordino (regione di Lisciano–Taiano), la cerniera sinclinale continua nella dorsale elveziana di Cima Alta attraverso la zona flessa di Capenilli–Altavilla.

5° *L'Anticlinale della Montagna dei Fiori* nella sua estremità sud, s'immerge dolcemente sotto la Molassa, ma senza ricomparire. Il contatto Elveziano Molassa si segue attraverso la porzione settentrionale del rilievo detto

(4) F. SCARSELLA (*Sulla zona d'incontro dell'Umbria e dell'Abruzzo.* «Boll. Servizio Geol. d'Italia», LXXI, 1947–48–49, nota XII), ha già segnalato obliquità.

(5) Cfr. D. DI FILIPPO e L. MARCELLI, *Uno studio del terremoto del Gran Sasso d'Italia del 5 settembre 1950.* «Pubbl. Ist. Naz. Geofisica, Annali di Geofisica», vol. IV, n. 2. Roma 1951, pp. 213–239.

(6) Informazioni comunicate dalla Società Terni che ringrazio sentitamente.

(7) Cfr. J. DEMANGEOT, loc. cit.

(8) Cfr. J. DEMANGEOT, *Osservazioni geologiche sui dintorni di Pietracamela.* «Contributi di Scienze Geologiche, suppl. alla Ricerca Scientifica», I, 1950, pp. 84–86.

i Colli, il villaggio di S. Stefano e quello di S. Felice, l'alto Rio Grosso e il villaggio di Tofo. Anche in questo caso si ha la sensazione che il nucleo duro abbia reagito disarmonicamente rispetto al suo rivestimento plastico.

Per terminare si noterà: 1°, che queste differenti unità strutturali sono trasversate da sud ovest a nord est da delle trasversali; è stata già segnata [9] la depressione del Vomano che, in realtà, dirige l'impostazione del Rio Fucino e del Tordino. Deve aggiungersi una leggera anticlinale che congiunge il Monte Gorzano alla Montagna di Campli passando per Paranesi; 2° che in parecchi posti vi è disarmonia fra gli accidenti tettonici dell'Elveziano e quelli della Molassa.

Petrografia. — *Di un nuovo metodo di calcolo delle analisi delle rocce e di alcune notevoli conseguenze* [*]. Nota di Mosè Barconi, presentata [**] dal Socio U. Panichi.

I. – Il Metodo di calcolo.

Or è un anno, in occasione di una mia breve permanenza presso l'Istituto di Mineralogia di Vienna, diretto dal prof. Machatschki, venni a conoscenza di un nuovo metodo di calcolo e di rappresentazione diagrammatica delle analisi chimiche delle rocce proposto dai proff. Köhler e Raaz [1] del locale Istituto di Petrografia, diretto dal prof. Leitmeier, ed ebbi a discuterne diffusamente con gli Autori.

Il metodo di Köhler–Raaz è un metodo *cristallochimico* (in quanto tiene conto delle recenti acquisizioni cristallochimiche circa la funzione dei vari cationi (per esempio Al e Ti) nei reticoli dei minerali), che io chiamerei *differenziale*, poiché in esso, in definitiva, vengono riportate in un sistema ad assi ortogonali, rispettivamente come ascisse e come ordinate, la differenza si — si′ e quella F — fm [2], siano queste differenze positive o negative.

Il metodo (che parte dai numeri degli atomi dei cationi delle analisi) permette una differenziazione abbastanza netta delle rocce alcalicalciche dalle alcaline da una parte e dalle argillose dall'altra, come pure degli ortoscisti dai parascisti: esso inoltre consente spesso di trarre conclusioni circa

(9) Cfr. Segre, loc. cit. e J. Demangeot, *L'Arc abruzzais externe*, ecc.

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Mineralogia dell'Università di Pavia.

(**) Nella seduta del 13 dicembre 1952.

(1) Il metodo allora da poco presentato all'Accademia di Scienze Austriaca (10 maggio 1951: « Anz. d. math. natw. Kl. d. ö. Akad. d. W. », **1951**, n. 8, pp. 205–215), fu poi pubblicato più diffusamente in « N. Jahrb. f. Min. Monatshefte », **1951**, pp. 247–263.

(2) si — si′ = ± qz è la differenza tra la silice totale presente e la silice combinata, ammettendo la massima silicizzazione dei componenti mineralogici sia chiari (considerati come feldspati), sia scuri (calcolati come pirosseni); F — fm rappresenta la differenza tra i cationi alcalini ed alcalino terrosi legati all'Al^{IV} ed i cationi totali Al^{VI} compreso dei pirosseni, delle miche ecc.

i possibili fenomeni di assimilazione, granitizzazione e simili, subìti dalle rocce in esame.

Un elemento ipotetico è però insito in esso nel caso di (si — si′) negativo (— qz), giacché se la silicizzazione massima dei componenti è senza altro ammissibile quando resti della silice libera (+ qz), nel caso di deficit di silice — qz non può dirci nulla circa la reale distribuzione della silice presente tra i componenti.

Inoltre, in comune con la massima parte dei metodi precedenti, esso trascura, nella rappresentazione diagrammatica, accanto all'ossigeno, anche l'Al^{IV} e fa $Fe_2O_3 = 2FeO$, cioè non tiene conto del diverso grado di ossidazione del ferro presente.

Io ho cercato di affrontare il problema della ricerca di un metodo che considerasse integralmente tutti gli elementi chimici (ossigeno compreso) costituenti una roccia, con le loro diverse valenze (principalmente Fe″ e Fe‴) e coordinazioni (in particolare Al^{IV} e Al^{VI}).

Poiché l'eccessivo prevalere tra i componenti, dell'ossigeno e del silicio ne rende evidentemente necessaria, per la rappresentazione diagrammatica, l'eliminazione almeno parziale, questa dovrebbe se mai avvenire in base a considerazioni che tengano conto delle attuali conoscenze circa i processi cristallochimici, petrografici e geochimici propri della crosta terrestre.

Le nostre attuali conoscenze ci permettono di affermare con sufficiente sicurezza che nelle rocce eruttive (e metamorfiche da esse derivate), che costituiscono il 95 % della litosfera (o *ossisfera* secondo il concetto di V. M. Goldschmidt (1928)) a noi nota [3], i silicati (e il quarzo) sono i componenti mineralogici di gran lunga prevalenti (probabilmente 92 % e oltre).

Grazie ai lavori fondamentali di Machatschki, Bragg e collaboratori, è oggi universalmente riconosciuto che nei silicati l'unità strutturale fondamentale è costituita dal gruppo a coordinazione tetraedrica $(SiO_4)^{4-}$, il quale, nel processo petrografico di differenziazione dalle rocce « basiche » alla rocce « acide », tende a dare raggruppamenti sempre più complessi, dall'iniziale gruppo isolato, tipico dei nesosilicati (per esempio olivina), all'aggruppamento totale tridimensionale caratteristico del quarzo ed in genere dei componenti chiari delle rocce. Tali aggruppamenti, sia pure di tipo irregolare, si ritrovano anche nello stesso stato vetroso.

Il processo di arricchimento in silice delle rocce ed il parallelismo dell'arricchimento in silicio ed in ossigeno. È un fatto risaputo che nel passaggio dalle rocce basiche (per esempio gabbri) alle rocce acide (per esempio graniti) si ha un progressivo aumento del tenore in silice delle rocce: un arricchimento in silice (meglio un arricchimento in silicio ed ossigeno).

Questo arricchimento in silice è legato ad un progressivo concatenarsi dei gruppi $(SiO_4)^{4-}$ tetraedrici nei minerali componenti, così che in questi

(3) Lo strato superficiale roccioso di circa 15 km., le « 10 miglia » di Clarke.

si osserva (nel passaggio dai minerali basici a quelli acidi) una diminuzione formale del rapporto ossigeno : silicio (O : Si), a cui si accompagna un aumento parallelo del rapporto ossigeno : cationi totali e del rapporto silicio : cationi totali. Così, per limitarci ai casi estremi, negli ortosilicati o nesosilicati (per esempio forsterite Mg_2SiO_4) si ha il rapporto O : Si=4 : 1, il rapporto $O : Cat_{tot} = 4 : 3$, il rapporto $Si : Cat_{tot} = 1 : 3$; mentre nel quarzo (tettosilicato SiO_2 o $SiO_{4/2}$ [4]) questi rapporti diventano rispettivamente: $O : Si = 2 : 1$; $O : Cat_{tot} = 2 : 1$; $Si : Cat_{tot} = 1 : 1$.

È appunto questo processo di arricchimento in silice che ho pensato fosse opportuno rappresentare diagrammaticamente.

Per far questo si può immaginare che nei reticolati cristallini dei silicati tutto o quasi (ved. poi) l'ossigeno sia collegato *ab initio* col silicio (tutto o parte) a dare quei tetraedri $(SiO_4)^{4-}$ che abbiamo visto essere le unità strutturali dei silicati, tetraedri che, inizialmente isolati, vengono ad essere collegati tra di loro, in modo più o meno stabile, dai restanti cationi.

La rappresentazione diagrammatica dell'arricchimento in silice. — Nella rappresentazione diagrammatica del fenomeno potremo allora trascurare l'ossigeno ed il silicio dei gruppi $(SiO_4)^{4-}$ assunti come iniziali, mentre potremo distinguere i cationi « leganti » in tre gruppi a seconda che si tratti:

1° di silicio in eccesso rispetto all'iniziale rapporto 1 : 4 con l'ossigeno [5];

2° di Al^{IV} e dei metalli alcalini ed alcalino-terrosi ad esso collegati, caratteristici dei minerali chiari a struttura di tettosilicati, come i feldspati ed i feldspatoidi;

3° degli elementi bivalenti ferromagnesiani (Fe'', Mn'', Mg, Ca femico e Al^{VI}, Fe''', Ti, Zr ecc., che possono in parte sostituirli) [6].

Andamento del calcolo. — *Il calcolo del silicio « legante » o « extratetraedrico »*. – Il silicio extratetraedrico Si' è uguale al silicio totale della roccia meno il silicio che abbiamo ammesso essere al centro dei tetraedri (SiO_4) iniziali (silicio tetraedrico), silicio che possiamo fare uguale a $O_{/4}$, cioè a un quarto della somma dell'ossigeno presente nei silicati della roccia. Quest'ossigeno è uguale all'ossigeno totale della roccia se si fa astrazione dall'ossigeno legato all'idrogeno (acqua), al carbonio (anidride carbonica), al fosforo (anidride fosforica) ed ai cationi legati a queste anidridi [7].

(4) Secondo la notazione di Niggli: *Gesteine und Minerallagerstätten*, I, p. 72 (1948).

(5) Naturalmente la distinzione tra il silicio « legante » e quello dei gruppi (SiO_4) iniziali può considerarsi formale, in quanto negli aggruppamenti Si O più complessi (rapporto O : Si < 4) tutti gli Si sono, con tutta probabilità, perfettamente equivalenti.

(6) Ricordo che al 2° ed al 3° gruppo corrispondono rispettivamente i minerali delle due serie di reazione di Bowen degli elementi chiari (tettosilicati: feldspatoidi, feldspati, quarzo) e degli elementi scuri (silicati a concatenamento dei gruppi (SiO_4) via via crescente, ma non mai tridimensionale: neso-, ino-, soro- e fillo-silicati).

Negli elementi chiari il concatenamento dei tettosilicati è reso possibile dalla coordinazione 4 che l'alluminio può assumere quando è legato coi metalli alcalini o alcalino terrosi.

(7) Ca (Ca_{ap}) nel caso dell'apatite, Ca ed eventualmente Mg nel caso dei carbonati (CCO_3 e $MgCO_3$).

L'ossigeno della roccia si può calcolare molto facilmente quando si parta dai numeri molecolari (necessari per il calcolo dei numeri magmatici di Niggli, oggi i più diffusi) e dai numeri atomici (necessari per il calcolo equivalenziario di Niggli e per il calcolo « differenziale » di Köhler–Raaz) dei singoli ossidi dell'analisi delle rocce.

Infatti per gli elementi tetravalenti e trivalenti l'ossigeno ad essi legato è uguale alla somma dei numeri molecolari ed atomici, mentre per gli elementi bivalenti e monovalenti esso è uguale al rispettivo numero molecolare.

Calcolato così il silicio « legante » o « extratetraedrico » $\underline{Si}' = Si' - O/4$ si calcolano poi $\underline{F}'$ e $\underline{Fm}'$ in modo perfettamente analogo a F' e fm' di Köhler–Raaz [8]. Riportando poi a 100 la somma di $\underline{Si}'$, $\underline{F}'$, $\underline{Fm}'$, si hanno rispettivamente i valori $\underline{Si}$, $\underline{F}$, $\underline{Fm}$ per la rappresentazione triangolare, valori che chiamerò « numeri d'arricchimento in silice ».

Un esempio di calcolo dei numeri d'arricchimento in silice, in confronto con i due metodi, magmatico ed equivalenziario, di Niggli e con il metodo di Köhler–Raaz è riportato nella tabella I per una monzonite.

TABELLA I.

MONZONITE: (*M. Monzoni, Val di Fassa*).

Tröger, 1935, n. 259.

Componenti	%	Numero atomi	Valori di Niggli	Valori di K. R.	Valori arr.to in silice
SiO_2	54.20	902	*magm.*	qz — 14,5	ΣO 2762
Al_2O_3	15.73	308	al 25	F 38.7	O/4 690
TiO_2	0.40	5	fm' 35	fm 46.7	$\underline{Si}'$ 212
Fe_2O_3	3.67	46	c 24 1/2	F–fm — 8.0	F' 251
FeO	5.40	75	alc 15 1/2		$\underline{Fm}'$ 303
MnO	0.70	10	c/fm 0.70		Σ 766
MgO	3.40	84	si 146		$\underline{Si}$ 27.7
CaO	8.50	152	qz — 16		F 32.8
BaO	—	—	*equival.*		$\underline{Fm}$ 39.5
Na_2O	3.07	99	Q 31.7		
K_2O	4.42	94	L 42.6		
P_2O_5	0.50	7	M 25.6		
H_2O	0.50	—			
TOTALE	100.49	1782			

(8) Per un confronto più preciso coi metodi di Köhler-Raaz, Niggli, Barth ecc. e per una esposizione più particolareggiata del metodo del calcolo anche nel caso delle rocce argillose ed alcaline) rimando ad un altro lavoro in corso.

La rappresentazione diagrammatica così ottenuta è simile a quella equivalenziaria di Niggli e ciò mi ha indotto a pensare che attraverso ai numeri d'arricchimento in silice fosse possibile risalire alla composizione mineralogica quantitativa della roccia, e ciò partendo direttamente dai numeri atomici, senza passare attraverso la formazione di una « base » mineralogica.

Se infatti scriviamo, a scopo di confronto, i vari minerali con formule « equivalenti », per esempio a O_{24} [9], e consideriamo, secondo il principio del metodo su esposto, solo la parte della formula posta al di fuori del gruppo (Si_6O_{24}), comune a tutte e quindi trascurato, osserviamo (ved. tabella II [10]) che la formulazione dei vari minerali, a partire da $\underline{Si}'$ per il silicio e dai numeri atomici per gli altri elementi, viene ad essere abbastanza semplice; le equazioni di formazione dei minerali sono di una semplicità pari a quella che si ha nel metodo equivalenziario di Niggli per le equazioni di formazione dei minerali a partire dai minerali della « base ».

Distribuiti così (ved. tabella III) a seconda delle diverse equazioni i costituenti atomici tra i vari minerali della roccia [11], passando al calcolo delle percentuali dei singoli minerali occorre tener conto che nella eliminazione costante del gruppo comune (Si_6O_{24}) la riduzione effettuata è diversa per ogni minerale a seconda della valenza dei suoi costituenti. Così, per esempio, nel caso del quarzo $Si_6(Si_6O_{24})$ si è avuta una riduzione del 50 % (dei cationi presenti), mentre nel caso della forsterite $Mg_{12}(Si_6O_{24})$ la riduzione è solo del 33,3 %.

Si tratta quindi di introdurre un coefficiente di correzione che porti la riduzione uniformemente ad un terzo [12]. Questa correzione è in pratica assai semplice: essa corrisponde a $+ {}^1/_3$ per il $\underline{Si}'$ e per i componenti tetravalenti presenti nei singoli minerali, e a $+ {}^1/_6$ per i metalli trivalenti non collegati a metalli monovalenti [13].

Con queste correzioni la somma totale dei vari numeri atomici distribuiti nelle molecole dev'essere uguale ai 2/3 del valore iniziale (ricavato dall'analisi) e si possono calcolare senz'altro le percentuali equivalenti dei diversi minerali. Nella tabella III questo calcolo è riportato per la monzonite della tabella I, ed i dati ottenuti sono confrontati con i valori *misurati sperimentalmente* dal Tröger.

(9) Formule ad O_{24} furono già usate, per esempio, da SCHARIZER, « N. J. Min. B.B. », **57** A, 1°, p. 57 (1927).

(10) Per una tabella più estesa vedi nota (8) a p. 3.

(11) *Reali* se si sono potuti riconoscere per via ottica, röntgenografica, termico-differenziale ecc., *virtuali* se un riconoscimento per altra via non è stato possibile, caso particolarmente frequente nelle rocce effusive.

(12) O, il che è lo stesso, porti la percentuale di tutti i minerali presenti ai 2/3 del loro valore iniziale.

(13) La coesistenza di metalli trivalenti e monovalenti dà luogo ad una compensazione delle correzioni, uguali ed opposte.

Tabella II.

Simbolo	Formula cristallochimica	Formula ad O_{24} abbr. ($-Si_6O_{24}$)	Equazione di formazione dalla base	
			secondo arricchimento in silice	secondo Niggli (**)
Q· (*)	SiO_2	Si_6	$Q\cdot = \underline{Si}$	$Q = Q$
Ne·	$Na(AlO_2)(SiO_2)$	Na_6Al_6	$2\,Ne\cdot = Na + Al$	$Ne = Ne$
Lc·	$K(AlO_2)(SiO_2)_2$	$K_4Al_4Si_8$	$5\,Lc\cdot = 2\,K + 2\,Al + \underline{Si}$	$4\,Lc = 3\,Kp + Q$
An·	$Ca(AlO_2)_2(SiO_2)_2$	Ca_3Al_6	$3\,An\cdot = Ca + 2\,Al$	$5\,An = 3\,Cal + 2\,Q$
(Or·)Ab·	$Na(AlO_2)(SiO_2)_3$	$Na_3Al_3Si_9$	$3\,Ab\cdot = Na + Al + \underline{Si}$	$5\,Ab = 3\,Ne + 2\,Q$
(Fo·)Fa·	Fe''_2SiO_4	Fe''_{12}	$Fa\cdot = Fe''$	$Fa = Fa$
Fs·	$[Fe'''_4(SiO_4)_3]$	Fe'''_8	$Fs\cdot = Fe'''$	$Fs = Fs$
Di·	$CaMgSi_2O_6$	$Ca_4Mg_4Si_8$	$5\,Di\cdot = 2\,Cf + 2\,Mg + \underline{Si}$	$8\,Di = 3\,Cs + 3\,Fo + 2\,Q$
Orn''·	$H_2Ca_2(Mg, Fe'')_4Al_2SiSi_6O_{24}$	$[H_2]Ca_2(Mg, Fe'')_4Al_2Si$	$9\,Orn''\cdot = Cf + 4\,(Mg, Fe'') + Ca + 2\,Al + \underline{Si}$	$10\,Horn'' = 4\,(Fo, Fa) + Cs + 2\,Cal + 3\,Q$
Bi·	$KMg_3(F, OH)_2[AlSi_3O_{10}]$	$[H_4]K_2Mg_6Al_2$	$5\,Bi\cdot = K + 3\,Mg + Al$	$16\,Bi = 6\,Kp + 9\,Fo + Q$
Ms·	$KAl_2^{VI}(F, OH)_2[Al^{IV}Si_3O_{10}]$	$[H_4]K_2Al_4^{VI}Al_2^{IV}$	$4\,Ms\cdot = K + 3\,Al(2\,Al^{VI} + Al^{IV})$	$7\,Ms = 3\,Kp + 2\,C + 2\,Q \quad (C = Al^{VI})$
Ma·	$Fe_3O_4[Fe'Fe'''_2O_4]$	$Fe''_6Fe'''_{12}[O_{24}]$	$2\,Ma\cdot + 2\,\underline{Si} - Fa\cdot + 3\,Fs\cdot(Fe'' + 3\,Fe''')$	$2\,Ma + Q - 2\,Fs + Fa$
Em·	Fe'''_2O_3	$Fe'''_{16}[O_{24}]$	$Em\cdot + \underline{Si} - 2\,Fe'''$	$2\,Hem + Q = 3\,Fs$
Ap·	$Ca_3P_2O_8$	$Ca_9[P_6O_{24}]$	$Ap\cdot = Cap = \frac{3}{2}P$	$Cp = Ap$

(*) Il · vuol indicare che il simbolo si riferisce alla formula equivalente a $[Si_6O_{24}]$.
(**) Da: M. E. Denaeyer, *Tableaux de Pétrographie*, Paris, 1951, p. 64.

Tabella III.

Calcolo della composizione mineralogica quantitativa a partire dai «numeri di arricchimento in silice».

Minerali ed equazioni di formazione	Atomi base		Q	Or	Ab	An	FeBi	Orn″	Di	Ma	Ap	Misurato		Calcolato
Q·=Si	Si′	212	−21	83	99	—	—	9	42	—	—	Q	1	1.1
	Al^{IV}	308	—	83	99	98	11	18	—	—	—	Or	32	31.6 Pert. *
	Ti	5	—	—	—	—	—	—	5	—	—	Ab	21.5	21,5
2 Ma·+2 Si·=Fe″+3 Fe‴	Fe‴	46	+31	—	—	—	—	—	—	15	—	An	11.5	11.5
5 Fe Bi·=K+Al+3 Fe″	Fe″+Mn	85	—	—	—	—	34	36	—	15	—	Di+Orn	24	25.8
9 Orn″ = 4 (Fe″+2Mg)+Cf+Ca+2 Al+Si	Mg	84			—				84	—	—	FeBi	6	4.7
Ap·=Cap	Cap	11	—	—	—	—	—	—	—	—	11	Acc.	4	3.7
5 Di·=4 (Cf, Mg, Ti/2)+Si	Cf	83	—	—	—	—	—	9	74	—	—			
3 Ab·=Na+Al+Si	Ca	58	—	—	—	49	—	9	—	—	—			99.9
3 Or·=K+Al+Si	Na	99	—	—	99	—	—				—			
	K	94	—	83	—	—	11		—		—			
Totale		1085	10	249	297	147	56	81	205	30	11			
Corr. E‴		83	3	28	33	—	—	3	16	—	—			
Corr. E‴		22	—	—	—	16	—	3	—	3	—			
TOTALE		1190	13	277	330	163	56	87	221	33	11			
%		99.9	1.1	23.2	27.7	13.7	4.7	7.3	18.5	2.8	0.9			

* Pert. 31.6 { 23.2 Or / — Vt / 2.2 An

Se consideriamo ulteriormente le formule ad O_{24} dei minerali della tabella II, sempre nella loro parte esterna al gruppo (Si_6O_{24}), osserviamo che esse si possono ricondurre ad un unico tipo $[Me]_6^4 (Si_6O_{24})$ qualora i singoli componenti si riuniscano in gruppi *equivalenti* a 4 valenze (corrispondenti ad una unità $\underline{Si}'$). Questi si possono sempre ripartire poi nei tre gruppi $Si^{X'}$ $F^{X'}$ ed $\underline{Fm}^{X'}$; $\underline{Si}'$ rimane inalterato ($\underline{Si}' = \underline{Si}^{X'}$), F' si riduce a $\frac{Me' Me'''}{2}$ $+ 2/3\ (CaAl_2^{IV})$; $\underline{Fm}'$ diventa $\frac{(Mg\ ,\ Fe''\ ,\ C_{fem})}{2} + 3/4\ (Al^{VI}\ ,\ Fe''') + (Ti\ ,\ Zr) + + C_{CO_3}/2$. Si otterrebbero così dei valori che riportati a 100 darebbero luogo a $\underline{Si}^X$, F^X, $\underline{Fm}^X$ adatti per la rappresentazione diagrammatica triangolare.

Questi ultimi valori sono del tutto analoghi a quelli corrispondenti del calcolo equivalenziario di Niggli (Q , L , M), in cui però si sia tenuto conto delle correzioni relative a Fe''' su accennate.

Sull'importanza di questo metodo « equivalente » per la rappresentazione diagrammatica delle rocce conto, come ho già detto, di ritornare diffusamente. Qui desidero solo far notare che un simile procedimento « equivalente » è sempre seguìto quando, come è solito, per rappresentare i feldspati alcalini si considerano i soli metalli alcalini, trascurando l'Al^{IV}.

A questo punto possiamo porci la questione se la distinzione, che è alla base del metodo di « arricchimento in silice », tra aggruppamento $(SiO_4)^4$ anionico ed i diversi gruppi « leganti », debba considerarsi puramente formale o se non corrisponda ad un fenomeno reale.

Il problema è particolarmente importante per il silicio « legante » (« extratetraedrico ») e per l'alluminio, pure a coordinazione 4, degli elementi chiari delle rocce, mentre è praticamente ovvio per gli elementi ferro–magnesiani (a poliedro di coordinazione ottaedrico rispetto all'ossigeno), la cui funzione di ponte tra gli aggruppamenti tetraedrici Si–O (a dare il complessivo raggruppamento tridimensionale tipico dei cristalli) è, mi pare, universalmente accettata.

Per gli elementi a coordinazione tetraedrica invece, la cosa non è, a me sembra, del tutto chiara ed il problema ora posto consiste, in ultima analisi, nel vedere se (allo stato presente delle nostre conoscenze) sia ammissibile distinguere, tra gli aggruppamenti tetraedrici delle strutture dei silicati, dei gruppi di « pura » coordinazione (e come tali tipici soltanto dello stato cristallino) e dei gruppi $(SiO_4)^4$, che invece potrebbero mantenere la loro esistenza anche allo stato fuso analogamente a quanto si ammette per i complessi anionici ossidati quali PO_4^{---}, SO_4^{--} e simili, stabili anche allo stato liquido.

Attualmente infatti, come giustamente osservò il Niggli, come reazione all'abitudine precedente di riferire senz'altro allo stato fluido le relazioni chimiche riconosciute allo stato cristallino, ed ai malintesi così avutisi nell'interpretazione delle strutture cristalline, si è indotti ad uno scetticismo che porta ad eccedere nel negare delle correlazioni tra lo stato esistente

nella massa fusa prima della cristallizzazione e la specie dei prodotti di cristallizzazione [14].

Ora ho cercato di applicare i concetti qui brevemente esposti [15] a problemi della struttura dei silicati, ottenendo alcuni risultati interessanti, quale, per esempio, il riconoscimento che i limiti quantitativi della sostituzione Al^{IV} — Si sono sempre e soltanto corrispondenti alla sostituzione completa Al^{IV} — Si « extratetraedrico » o « legante ».

Questi risultati saranno appunto oggetto di esposizione dettagliata in una mia seconda Nota.

Biologia. — *Azione dell'ormone tiroideo sul neurone di Mauthner. Esperienze su Anfibi urodeli* [*]. Nota II di GIORGIO M. BAFFONI, presentata [**] dal Socio G. COTRONEI.

Nell'ambito degli studi sul differenziamento del neurone, che si vanno svolgendo nel nostro Laboratorio (Stefanelli e Collaboratori 1943 1952 [1]), ho voluto eseguire una serie di ricerche sullo sviluppo del neurone e quindi sugli effetti provocati dalle modificazioni delle attività metabolica, funzionale, rigenerativa e dell'ambiente umorale sulla cellula nervosa differenziata, con particolare riguardo alle alterazioni strutturali (aspetto delle neurofibrille) e biochimiche (aspetto della sostanza basofila) della cellula nervosa differenziata. Poiché è noto che i vari centri nervosi e gli elementi di uno stesso centro nervoso non reagiscono egualmente ad uno stimolo (Nissl, Lugaro, Marinesco, Luria, Bodian [2] ecc.), di proposito ho scelto per queste ricerche un singolo e caratteristico neurone, peculiare degli Ittiopsidi (cellula

(14) NIGGLI (*das Magma*, p. 325, 1937): « Früher hat man zwischen Mineralarten erkennbare Beziehungen ohne weiteres als Ganzes auf den molekulardispersen Zustand übertragen. Heute haben Missverständnisse in der Deutung der Kristallstrukturen teilweise eine Skepsis erzeugt, die in der Negierung enger Zusammenhänge zwischen dem speziellen Zustand in der Schmelze vor der Kristallisation und der Art der Kristallisationsprodukte viel zu weit geht ».

(15) Per cui si sarebbe portati ad ammettere che la struttura dei silicati non è basata soltanto su un impacchettamento costante di atomi di ossigeno (BRAGG 1927, NIGGLI 1932, BARTH 1948), ma su un impacchettamento di gruppi (SiO_4) che attraverso il collegamento del silicio extratetraedrico (ed eventualmente dell'Al^{IV}) dànno i noti raggruppamenti reticolari (Si(Al)O).

(*) Ricerca eseguita nel Laboratorio di Istologia ed Embriologia della Facoltà di Scienze dell'Università di Roma, con un contributo del C. N. R.

(**) Nella seduta del 13 dicembre 1952.

(1) Ved. AL. STEFANELLI, « Mem. Acc. Naz. Lincei » (VIII), 1°, p. 27 (1947); « Ricerche di Morfologia », 22° (1947); « Boll. di Zool. », 18°, p. 279 (1951); *Accrescimento degli organismi*, Quaderno 28, Acc. Naz. Lincei, p. 143 (1952).

(2) Ved. G. MARINESCO, *La cellule nerveuse* (Paris 1909); D. BODIAN, H. HYDEN in *Genetic neurology* (Chicago 1950); G. M. BAFFONI, « Rend. Acc. Naz. Lincei » (VIII), 13°, p. 281 (1952).

di Mauthner), da tempo utilizzato con successo nel nostro Istituto (Stefanelli 1942–1952 [3]).

Ricordo in proposito che il neurone di Mauthner è un elemento tipicamente perenne nei Teleostei e negli Anfibi urodeli acquatici, ma che negli Anfibi anuri è un elemento « a ciclo larvale » (Stefanelli 1951) [4] poiché dopo la metamorfosi si involve e scompare. In precedenti ricerche, somministrando estratti tiroidei a larve di Anfibi anuri, a causa dell'accelerazione delle modificazioni della metamorfosi (Gudernatsch, Cotronei, Giacomini [5], ecc.), ho osservato che il processo involutivo del neurone mauthneriano è anticipato ed accelerato: negli animali trattati con tiroide, infatti, la cellula di Mauthner scompare precocemente, spesso prima che la metamorfosi sia compiuta, mentre negli animali normalmente metamorfosati essa scompare 20–30 giorni dopo il termine della metamorfosi (Baffoni e Catte 1950) [6]. L'effetto involutivo dell'ormone tiroideo sul neurone di Mauthner degli Anfibi anuri è stato di recente confermato da Weiss e Rossetti (1951) [7].

Dalle osservazioni di morfologia ecologica fatte da Stefanelli (1949–51 [8]) risulta che il neurone di Mauthner è un apparato di associazione degli stimoli provenienti dai centri statici (specie dalla linea laterale) e di coordinazione degli impulsi diretti ai centri spinali motori della coda; l'atrofia e la scomparsa della cellula di Mauthner negli Anfibi anuri dopo la metamorfosi è stata perciò interpretata come dovuta al riassorbimento e perdita della coda ed alla scomparsa degli organi della linea laterale, essendo tuttavia sufficiente l'atrofia di uno dei due sistemi per provocare quella del neurone mauthneriano (in *Xenopus*, metamorfosati, infatti, dove i centri statici della condizione acquatica si conservano, le cellule di Mauthner si involvono dopo la scomparsa della coda–Stefanelli 1949) [9]. Avendo osservato che in Anfibi anuri (*Hyla*) trattati con tiroide le cellule di Mautner sono notevolmente involute o affatto scomparse ancor prima della perdita della coda, ho supposto che il fenomeno fosse correlato alla precoce involuzione dei centri della linea laterale, specialmente avendo notato processi degenerativi a carico di elementi nervosi nell'area di Kingsbury (Baffoni e Catte 1951 [10]). Restava però sempre la possibilità che l'ormone avesse agito direttamente sul neurone mauthneriano e cioè che la precoce involuzione e scomparsa di questo fosse dovuta ad una particolare suscettibilità all'ambiente umorale. Onde

(3) AL. STEFANELLI e A. M. OSTI, « Boll. di Zool. », 13°, p. 135 (1942); AL. STEFANELLI, « La Ricerca Scientifica », 20°, p. 609 (1950).

(4) AL. STEFANELLI, « Rend. Acc. Naz. Lincei » (VIII), 10°, p. 159 (1951).

(5) I. F. GUDERNATSCH, « Arch. Entw-mech. », 35°, p. 457 (1912); G. COTRONEI, « Bios », 2°, p. 27 (1913); « Rend. R. Acc. Naz. Lincei » (V), 23°, p. 453 (1914); E. GIACOMINI, « Rend. R. Acc. Sci. Ist. Bologna », 18°, p. 116 (1914).

(6) G. M. BAFFONI e G. CATTE, « Rend. Acc. Naz. Lincei » (VIII), 9°, p. 282 (1950).

(7) P. WEISS e F. ROSSETTI, « Proc. Nat. Ac. Sci. », 37°, p. 540 (1951).

(8) AL. STEFANELLI, « Riv. di Biol. », 41°, p. 249 (1949); « Quart. Rev. Biol. », 26°, p. 17 (1951).

(9) AL. STEFANELLI, « Boll. di Zool. », 16°, p. 139 (1949).

(10) G. M. BAFFONI e G. CATTE, « Riv. di Biol. », 43°, p. 373 (1951).

risolvere il problema ho ritenuto necessario trattare con ormone tiroideo Ittiopsidi che conservano dopo la metamorfosi la coda e gli organi della linea laterale (nei quali il neurone mauthneriano è perenne), cioè Anfibi urodeli acquatici e Teleostei. Negli Anfibi urodeli acquatici, infatti, gli adattamenti alla condizione natatoria si conservano nell'adulto: dopo la metamorfosi, a causa del passaggio alla condizione terrestre, i bottoni della linea laterale si affondano nell'epidermide, pronti però a riaffiorarne e ad entrare in funzione durante i periodici ritorni alla vita acquatica (epoca degli amori); nei Teleostei, invece, in cui il passaggio dalla vita larvale alla adulta non è connessa a profonde modificazioni ambientali, dopo la metamorfosi la coda e gli organi della linea laterale continuano a funzionare ed a svilupparsi.

In questa Nota riferisco i risultati ottenuti da esperienze eseguite su Anfibi urodeli acquatici. In proposito ricordo che l'apparato di Mauthner degli Anfibi urodeli è stato illustrato da numerosi ricercatori (Stieda [11] 1875, Kingsbury [12] 1895, Beccari [13] 1907, Szepsenwol [14] 1935, Leghissa [15] 1941, ecc.): esso dopo la metamorfosi si conserva (Kingsbury [12], sebbene di dimensioni ridotte (Beccari) [13]; di recente Stefanelli (1950) [16] ha osservato che negli Urodeli metamorfosati le cellule di Mauthner presentano periodici aumenti di volume in coincidenza con i ritorni alla vita acquatica ed il comportamento dei bottoni della linea laterale.

Da un lotto di larve di *Triturus vulgaris* (L.) var. *meridionalis* BLGR. (= *Triton taeniatus* Auct.) di trenta giorni di sviluppo (stadio 51 di Glücksohn) [17], ho isolato 15 animali che sono stati trattati ogni giorno con tiroxina *Roche* a una concentrazione del $5 \cdot 10^{-6}$. Dopo nove giorni, dato che gli animali presentavano le branchie e le pinne caudali involute, ho interrotto il trattamento ed ho fissato 10 individui in Bouin e 5 in Helly; contemporaneamente ho fissato 15 larve dei lotti di controllo (a pari età –stadio 57) e, dopo 20 giorni, 15 animali al termine della metamorfosi e che presentavano lo stesso aspetto (stadio 62) degli animali trattati; ho anche fissato 10 larve all'inizio delle esperienze (stadio 51). Le sezioni trasversali in serie degli animali fissati in Bouin (10 μ di spessore) sono state impregnate con Ag secondo il metodo di Holmes [18] (1943), quelle degli animali fissati in Helly (7 μ di spessore) sono state colorate secondo il metodo di Nissl al bleu di toluidina. Le misurazioni citometriche sono state eseguite direttamente al microscopio, quelle dei volumi e delle aree sono state ricavate con i soliti sistemi (ved. Baffoni e Catte [10], Baffoni e Serra [19]).

(11) L. Stieda, « Zeischr. wiss. Zool. », 25°, p. 285 (1875).
(12) B. F. Kingsbury, « Journ. Comp. Neurol. », 5°, p. 139 (1895).
(13) N. Beccari, « Arch. Ital. Anat. Embriol. », 6°, p. 660 (1907).
(14) J. Szepsenwol, « C. R. Soc. Biol. », 119°, p. 10 (1935).
(15) S. Leghissa, « Arch. Zool. Ital. », 29°, p. 213 (1941).
(16) Al. Stefanelli, « Rend. Acc. Naz. Lincei » (VIII), 8°, p. 59 (1950).
(17) S. Glücksohn, « Arch. Entw–mech. », 125°, p. 341 (1932).
(18) W. Holmes, « Anat. Rec. », 86°, p. 157 (1943).
(19) G. M. Baffoni e L. Serra, « Riv. di Biol. », 44°, p. 469 (1952).

Come è stato osservato nelle esperienze sugli Anfibi anuri, anche negli Urodeli elevate concentrazioni di ormone tiroideo arrestano i processi dell'accrescimento ed accelerano quelli della metamorfosi: i *Triturus* trattati conservano infatti la taglia delle larve all'inizio delle esperienze (mm. 10,5 di lunghezza); il loro aspetto, però, è molto simile a quello degli animali metamorfosati (mm. 20,5 di lunghezza).

A differenza di quanto è stato osservato in *Hyla*, in *Triturus* non sono apparse evidenti *disarmonie* (Cotronei 1914) [20] nei vari organi o nelle varie parti del corpo degli animali; ciò è dovuto al fatto che, per quanto anticipate ed accelerate dall'azione ormonale, le modificazioni della metamorfosi negli Anfibi urodeli sono di minor entità che negli Anuri: in quelli, infatti, i sistemi proprii della vita acquatica (a parte l'apparato respiratorio) non scompaiono, quelli della vita terragnola (apparato locomotore) si sviluppano lentamente, il tipo di alimentazione non cambia (l'apparato digerente non si modifica), ecc.

L'esame istologico dei preparati ha riscontrato che in *Triturus* trattati con tiroxina le modificazioni della cute sono per certi aspetti simili a quelle degli animali metamorfosati normalmente (controlli a pari stadio): l'epidermide è costituita da epitelio piatto e cheratinizzato ma negli animali trattati le ghiandole mucipare sono involute ed i bottoni della linea laterale più approfonditi e coperti dall'epidermide (ved. figg. 7, 8 e 9). Nella conformazione dell'encefalo e delle sue porzioni non sono apparse alterazioni: negli animali trattati il metencefalo ed il rombencefalo si presentano un po' più ispessiti che nelle larve, ma, a parte le dimensioni minori, simili a quelle degli animali naturalmente metamorfosati; queste modificazioni sono correlate al differenziamento dei centri, tra cui quelli proprî della condizione tetrapoda (terrestre).

Le cellule di Mauthner di *Triturus* trattati con tiroxina non scompaiono; la loro forma è più assottigliata che nelle larve di controllo (sia di pari taglia che di pari età), ma meno che negli animali normalmente metamorfosati.

Poiché le cellule di Mauthner degli animali metamorfosati (sia normalmente che sperimentalmente) sono di dimensioni minori che nelle larve, ne consegue che esse hanno subìto una riduzione volumetrica (ipotrofia). Inoltre gli animali trattati presentano cellule di Mauthner più piccole degli animali naturalmente metamorfosati (ved. valori assoluti nella Tabella); tali differenze (specie per la larghezza) sono risultate statisticamente significative ($t < P.\ 0{,}27$) e, in base alle ricerche di Levi, Artom, Terni, Stefanelli, ecc. [21], possono essere riferite alla diversa mole somatica; ma un'analisi più accurata ha dimostrato che il rapporto tra i volumi somatici e quelli delle cellule di Mauthner non sono direttamente proporzionali: le cellule di Mauthner degli animali trattati con tiroxina infatti, risultano in proporzione più voluminose

(20) G. COTRONEI, «Arch. Ital. di Biol.», 61°, p. 305 (1914).
(21) Ved. G. LEVI, *Accrescimento e senescenza*, Firenze 1940.

Tutte queste annotazioni dimostrano che il neurone mauthneriano di *Triturus* dopo la metamorfosi va incontro ad ipotrofia; gli aspetti di questa (modica atrofia ed incipiente cromatolisi) risultano molto simili a quelli riscontrati nei neuroni di Anfibi anuri dopo il taglio della coda e la mancata rigenerazione del neurite (Baffoni 1952) [22]: anch'essi perciò vanno attribuiti all'arresto della funzione specifica. Riferendomi a quanto è stato accennato da Beccari [13] (1907) e dimostrato da Stefanelli [8] (1949), in questo caso l'arresto funzionale del neurone di Mauthner va messo in rapporto con quello dei centri statici della linea laterale; ciò del resto è indicato dall'atrofia e dalla cromatolisi che, nelle cellule di Mauthner di *Triturus* metamorfosati, interessano specialmente il dendrite e la porzione laterale del pirenoforo [23]; è avvalorato inoltre dalle modificazioni degli organi della linea laterale osservate negli Urodeli metamorfosati. A tal proposito preciso che negli animali trattati con tiroxina i bottoni della linea laterale (specie quelli del tronco) si presentano molto appiattiti e completamente ricoperti dalla cute (fig. 9), mentre negli animali di controllo a pari stadio (metamorfosati) sono meno modificati (fig. 8); questo fatto può sembrare in contraddizione con quanto arguito in precedenza: a maggiori modificazioni degli organi di senso della linea laterale, infatti, dovrebbero corrispondere più profonde modificazioni dell'elemento mauthneriano; ricordo però che negli animali trattati le modificazioni degli organi della linea laterale, appunto perchè anticipate ed accelerate dall'azione dell'ormone, sono avvenute più di recente che nei controlli normalmente metamorfosati (nei quali esse procedono lentamente ed iniziano negli stadî premetamorfici); l'arresto funzionale dei centri della linea laterale, perciò, ha influito meno a lungo sul neurone mauthneriano degli animali trattati, il quale, di conseguenza, risulta meno modificato.

Anche il nucleo dell'elemento mauthneriano si riduce negli animali metamorfosati; la sua riduzione, però, è più lieve di quella del citoplasma: infatti il rapporto nucleo-plasmatico delle cellule di Mauthner di animali metamorfosati (sia naturalmente che sperimentalmente) aumenta (ved. Tabella); ciò rappresenta un'ulteriore conferma di quanto è stato da me stabilito in precedenti ricerche (ved. Baffoni 1952 [24]) e cioè che il nucleo partecipa meno del neuroplasma alle variazioni volumetriche che si verificano nei processi d'accrescimento, nei fenomeni di regressione e d'involuzione e nell'attività reattiva del neurone.

L'ipotrofia del neuroplasma nell'elemento di Mauthner degli urodeli metamorfosati si manifesta anche con l'assottigliamento del neurite (ved. Tabella); lo spessore della fibra di Mauthner è minore nei controlli metamorfosati che negli animali trattati.

(22) G. M. BAFFONI, « Rend. Acc. Naz. Lincei » (VIII), 12°, p. 189 (1952).

(23) Un'ulteriore dimostrazione di ciò emerge dai risultati ottenuti in esperienze tuttora in corso di asportazione degli abbozzi della linea laterale in Anfibi anuri ed urodeli.

(24) G. M. BAFFONI, « Rend. Acc. Naz. Lincei » (VIII), 13°, p. 281 (1952).

In conclusione: l'azione della tiroxina in larve di Anfibi urodeli si esercita anticipando ed accelerando le trasformazioni dei sistemi e delle strutture proprie delle condizioni larvale ed adulta. Per effetto dell'ormone tiroideo il neurone di Mauthner degli Anfibi urodeli acquatici non scompare, come avviene negli Anfibi anuri (Baffoni e Catte), ma subisce una lieve ipotrofia; questa è meno accentuata nelle larve trattate che nei controlli alla metamorfosi. Ciò dimostra che il neurone mauthneriano non è direttamente suscettibile all'ormone tiroideo; esso risente delle modificazioni provocate dall'ormone sul tegumento, e quindi sugli organi e i centri della linea laterale (a cui l'apparato mauthneriano è funzionalmente connesso – Stefanelli), l'arresto funzionale dei quali induce le modificazioni del neurone mauthneriano; nelle larve trattate le cellule di Mauthner si presentano meno modificate che nei controlli metamorfosati poiché esse hanno risentito meno a lungo dell'arresto funzionale dei centri della linea laterale.

Biologia. — *Osservazioni sulla vita latente.* – II. *Studio delle proteinasi di «Artemia salina» L.*(*). Nota di ENRICO URBANI e LIVIA DE CESARIS-COROMALDI, presentata(**) dal Socio G. COTRONEI.

In una precedente Nota (1) sono stati comunicati i risultati dello studio di un enzima, presente nei germi incistati di *Artemia salina*, capace di scindere l'alanilglicina. Questa dipeptidasi perciò si conserva nei germi incistati e deve essere legata al protoplasma disidratato in modo tale da non venire distrutta dalle molteplici avverse condizioni ambientali che l'organismo attraversa durante il periodo di vita latente che si può protrarre per diversi anni. Si è proseguito nello studio dei fermenti proteolitici esaminando, sullo stesso materiale, il tenore in proteinasi. Ad evitare equivoci seguiamo la terminologia di Smith (2) definendo quali proteinasi quegli enzimi capaci di idrolizzare i legami peptidici interni della molecola proteica (endopeptidasi di Bergmann) e nel caso nostro particolare chiameremo, in accordo con Holter e Løvtrup (3), proteinasi un enzima capace di digerire, in determinate condizioni di pH e temperatura, la caseina. È difficile poter stabilire con esattezza se nel caso specifico della proteinasi di ameba, studiata da Holter e Løvtrup e nel nostro caso dei germi incistati di Artemia ci si trovi di fronte a uno di quegli enzimi proteolitici chiamati da Wilstätter e

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Anatomia Comparata «G. B. Grassi» della Università di Roma, col contributo del C. N. R.

(**) Nella seduta del 13 dicembre 1952.

(1) E. URBANI, L. ROGNONE e S. RUSSO, questi «Rendiconti», vol. XIII, fasc. 5, pp. 300–308 (1952).

(2) E. L. SMITH, *Proteolytic Enzymes* in *The Enzymes* Edited by J. B. Summer and K. Myrbäch, vol. 1, parte 2ª. Acad. press Inc., New York (1952).

(3) H. HOLTER e S. LØVTRUP, «C. R. Lab. Carlsberg, Ser. Chim.», *27*, 27 (1949).

Bamann *catepsine*, a localizzazione intracellulare e la presenza dei quali è dimostrata dalla digestione alla quale va incontro il protoplasma dopo la morte della cellula. Clementi (1923) [4] dimostrò un potere caseinolitico degli estratti di tessuti di vertebrati omeotermi ed eterotermi e Duspiva (1939) [5] ha esaminato il problema della origine e della localizzazione delle proteinasi nel sistema digerente del Ditisco. Lo spazio non ci consente un esame della vastissima letteratura sugli enzimi proteolitici che inoltre non avrebbe un riferimento immediato con il nostro problema. Dobbiamo ricordare, per ciò che riguarda la conservazione di enzimi in organismi in vita latente che Engel e Heins (1947) [6] dimostrano la presenza di proteinasi e dipeptidasi nei semi quiescenti di segale orzo e grano.

Il materiale da noi impiegato è costituito da germi incistati e disseccati di *Artemia salina* L. in vita latente da circa un anno, provenienti dalla California. Poiché si prospettava interessante anche una analisi su germi in anabiosi da più tempo abbiamo usato dei germi incistati provenienti da Capo d'Istria (1939 e 1942) e dalla California (1945). Questi vari lotti posti in acqua di mare a 22°-24° C. schiudono in una percentuale che non ci sembra in rapporto con il periodo di anabiosi ma probabilmente in rapporto al modo con il quale i germi incistati sono stati conservati.

Nella descrizione dei dosaggi effettuati, qualora non venga data altra indicazione si intende che il materiale usato è quello proveniente dalla California ed in vita latente da circa un anno (1951).

Le proteinasi sono state studiate con il metodo di Anson (1938) [7] già usato da Duspiva e ridotto ad ultramicrometodo da Holter e Løvtrup.

Essenzialmente il principio è il seguente. Le cellule o il tessuto o l'estratto enzimatico vengono posti in contatto con la caseina (secondo Hammarsten) ad opportuni pH e temperatura, per un certo tempo di incubazione. Dopo l'incubazione la reazione enzimatica è bloccata con aggiunta di acqua e acido tricloroacetico. La caseina non digerita precipita e rimangono in soluzione i prodotti della idrolisi enzimatica dei quali vengono dosati colorimetricamente, usando il reagente di Folin-Ciocalteau, la tirosina e il triptofano. Questi aminoacidi possono essere anche dosati misurando l'assorbimento in luce ultravioletta a 2800 Å. Se la reazione enzimatica ha avuto luogo, in presenza del Folin si sviluppa una colorazione bleu, se non vi è stata reazione enzimatica il liquido rimane solo debolissimamente colorato in giallo-verdastro che è il colore proprio del reattivo. Si costruisce una curva di taratura usando tirosina, nel nostro caso abbiamo usato questo aminoacido in modo da avere una concentrazione di 0,125, 0,250, 0,375, 0,500 *gamma* in 30 µl. Il grafico che riportiamo (fig. 1) mostra la perfetta linearità della reazione colorata (in ordinate l'estinzione a 6350 Å, circa, in ascisse i *gamma* di tirosina). La retta passa dall'origine in quanto dai singoli valori è stato sottratto il colore dato dal solo reattivo di Folin con la concentrazione *zero* di tirosina. Abbiamo desiderato fare un controllo del metodo colorimetrico da noi usato (vedi dopo) con la misura della estinzione nell'U. V. a 2537 Å, non pos-

(4) A. Clementi, « Bioch. Zeitschr. », *136*, 71 (1923).
(5) F. Duspiva, « Protoplasma », *32*, 211 (1939).
(6) Chr. Engel e J. Heins, « Bioch. et Biophys. Acta », *1*, 196 (1947).
(7) M. L. Anson, « J. Gen. Physiol », *22*, 79 (1938).

sedendo una sorgente monocromatica a 2800 Å. Il dispositivo per il dosaggio è identico per principio a quello usato per la colorimetria ma molto complesso in quanto l'ottica del microscopio è di quarzo, i vetrini per le vaschette in quarzo e la cellula fotoelettrica è un fotomoltiplicatore elettronico IP28 RCA alimentato a 1200 Volts in corrente raddrizzata e stabilizzata. La messa a fuoco è su schermo di willemite artificiale da noi costruito. I risultati ottenuti, che qui non possiamo riportare per mancanza di spazio, sono stati perfettamente concordanti con quelli ottenuti con il reattivo di Folin.

Per la determinazione delle proteinasi nei germi incistati di Artemia abbiamo proceduto nel modo seguente: 100–200 mgr. di germi incistati sono stati polverizzati in mortaio di vetro ed omogenati con 1–3 ml di acqua distillata. L'estratto è stato centrifugato a 3.000 giri per 3 minuti in modo da fare

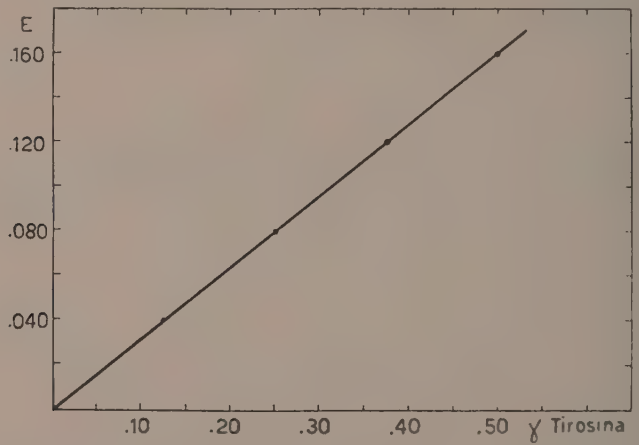


Fig. 1. – Curva di taratura: in ascisse *gamma* di tirosina, in ordinate estinzione a 6350 Å circa. Spessore della vaschetta mm 1,9.

sedimentare tutti i detriti grossolani ed il supernatante è stato usato per i dosaggi [8]: 35 µl di omogenato sono stati mescolati con 35 µl di tampone fosfato-citrato-ammonio secondo Duspiva a un determinato pH e con 35 µl di caseina-urea preparata secondo Duspiva. La miscela è stata incubata per un certo tempo ad una determinata temperatura dopo di che la reazione enzimatica è stata bloccata prelevando 35 µl del liquido enzima caseina e aggiungendovi 141 µl di acqua e 282 µl di acido tricloroacetico 0,3 M. Si è lasciato riposare il liquido con i precipitati di caseina per qualche ora in « icebox » e con centrifugazione a 2000 giri per tre minuti si è eliminato il precipitato. Dal supernatante limpido sono stati prelevati o 27,10 µl o 31,30 µl

(8) Per la costruzione di ogni singola curva di attività sono state usate frazioni di supernatante di una unica quantità di omogenato. Questo non significa che l'enzima si trovi solamente nel supernatante ma sarà presente anche nel « culot » di centrifugazione costituito da detriti e dai frammenti dell'involucro dei germi incistati che non è stato considerato nei nostri dosaggi.

e si sono uniti con 27,10 μl o con 31,30 μl NaOH IN. Il reattivo di Folin va aggiunto in una quantità, che è critica per ottenere il massimo di colore. Nel nostro caso questa quantità è stata determinata sperimentalmente e in tutte le determinazioni sono stati aggiunti 5,20 μl del reattivo.

La colorimetria è stata eseguita con il microcolorimetro a cellula fotoelettrica costruito ed illustrato da uno di noi [9] 3–5 minuti dopo l'aggiunta del Folin, in vaschette di *plexiglas* dello spessore di 1,9 mm. e della capacità di circa 30 μl. La determinazione del *bianco* è stata fatta o al *tempo zero* ossia bloccando la reazione appena mescolati, a temperatura di 0°–2° C., l'estratto enzimatico con il substrato e il tampone o mettendo ad incubare l'estratto enzimatico inattivato (con ebollizione in fiala saldata per 20–30 minuti). I risultati ottenuti sono illustrati nei grafici ogni punto dei quali è la media di due–tre determinazioni.

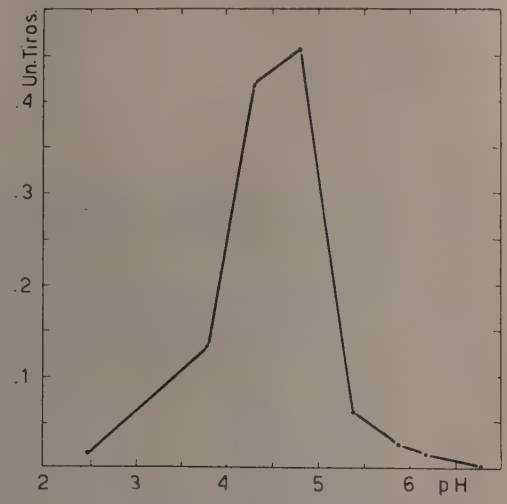


Fig. 2. – Attività enzimatica in funzione del pH: in ascisse pH, in ordinate unità di tirosina.

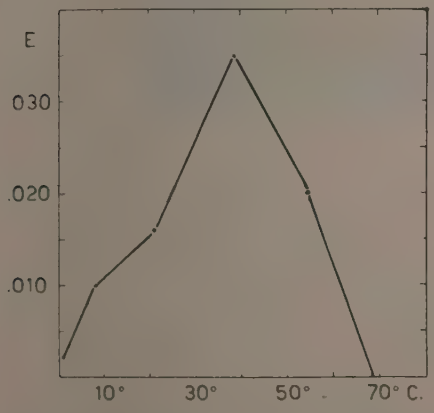


Fig. 3. – Attività enzimatica in funzione della temperatura: in ascisse gradi centigradi di incubazione, in ordinate estinzione.

ATTIVITÀ IN FUNZIONE DEL pH. – Questa determinazione ha mostrato che nei germi incistati è presente una proteinasi con pH optimum intorno a 4,8. Il grafico (fig. 2) illustra l'andamento della reazione per un'ora di incubazione a 38° C. Una seconda serie di determinazioni eseguita con valori di pH molto vicini a 4,8 ha mostrato un optimum a pH 4,7.

ATTIVITÀ IN FUNZIONE DELLA TEMPERATURA. – La fig. 3 mostra l'andamento della reazione enzimatica in funzione della temperatura per un tempo di incubazione di 15 minuti. Si vede come l'optimum di temperatura sia intorno a 38° C.

(9) E. URBANI, « La Ricerca Scientifica », *22*, 2174 (1952).

Attività in funzione della concentrazione dell'enzima. – Sono state effettuate delle diluizioni dell'estratto enzimatico con lo stesso procedimento illustrato nella Nota precedente. Diamo qui di seguito le estinzioni corrispondenti alle concentrazioni usate.

Concentrazione	1	2	3	4
Estinzione	.026	.056	.076	.094

Si vede come la scissione del substrato sia sufficientemente proporzionale alla concentrazione dell'enzima.

Attività in funzione del tempo di incubazione. – La fig. 4 illustra chiaramente l'andamento della reazione enzimatica in funzione del tempo di incubazione a 38° C. Le curve a linea unita e a linea tratteggiata illustrano due differenti esperimenti con concentrazioni diverse di enzima. In ordinate unità di tirosina (*gamma*) in ascisse il tempo di incubazione in minuti.

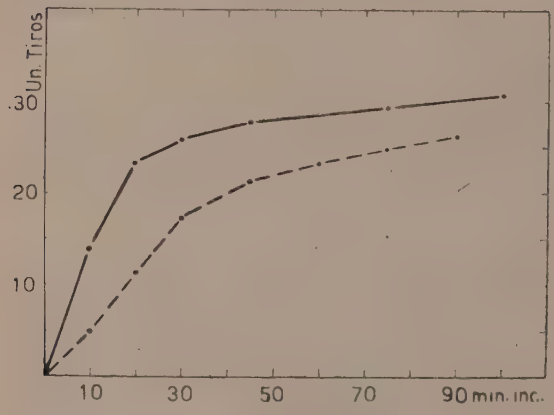


Fig. 4. – Attività enzimatica in funzione del tempo di incubazione: in ascisse tempo di incubazione a 38° C. in minuti, in ordinate unità di tirosina.

Come è stato accennato precedentemente abbiamo eseguito anche dei dosaggi su germi incistati dal 1939, 1942, 1945. In questi lotti è stata riscontrata la presenza dell'enzima da noi studiato, anche in quelli del 1942 che nelle condizioni di salinità e di temperatura da noi adottate non hanno schiuso. Abbiamo voluto controllare se lo stesso fosse per l'alanilglicina dipeptidasi ed il cromatogramma che riportiamo fig. 5 eseguito con le stesse modalità illustrate nella precedente Nota) mostra che tutti gli estratti posti in contatto con il dipeptide A lo hanno in parte scisso; gli estratti inattivati con l'ebollizione B invece non hanno idrolizzato l'alanilglicina.

Queste osservazioni mostrano che nei germi incistati dal 1942 che non hanno schiuso nelle condizioni ambientali da noi realizzate sono conservati la dipeptidasi e la proteinasi. Pensiamo che per il momento non sia facile dare una spiegazione di questo fatto [10].

(10) Un problema che si prospetta interessante è quello del tenore enzimatico di Artemie a diverso corredo cromosomico, partenogenetiche ed antigoniche. Abbiamo eseguito dei dosaggi su singoli naupli di 12-15 giorni di Capo d'Istria (tetraploidi) e di S. Fran-

RIASSUNTO E CONCLUSIONI. – Le presenti osservazioni mostrano che nei germi incistati di *Artemia salina* L. in vita latente dal 1939, 1942, 1945, 1951 è presente un enzima proteolitico capace di idrolizzare la caseina.

L'enzima è inattivato con l'ebollizione per 20–30 minuti. Sono state studiate alcune caratteristiche di azione di questa proteinasi.

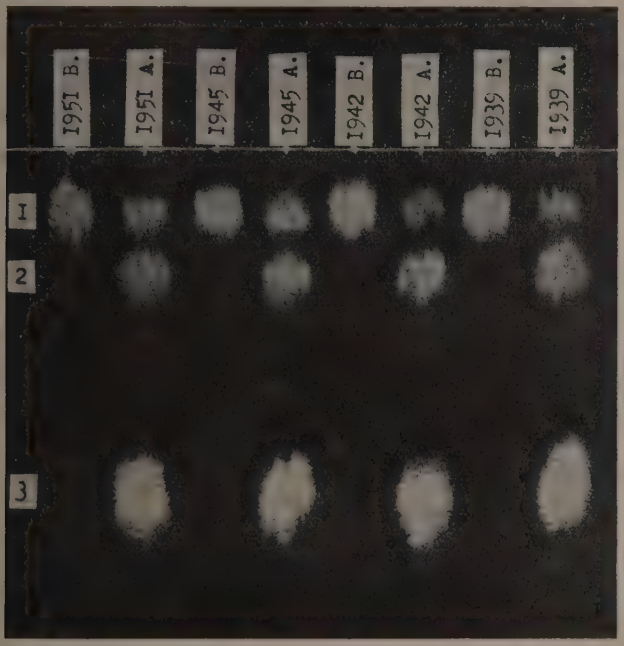


Fig. 5. – Cromatografia della alanilglicina-dipeptidasi. Solvente butanolo 100 pp. acqua 10 pp. cromatografia discendente per 50 ore. In posizione I si è fermata l'alanilglicina non idrolizzata dagli estratti inattivati (B) e il residuo di alanilglicina non idrolizzata dagli estratti attivi (A). In posizione 2 la glicina e in 3 l'alanina risultanti dalla idrolisi enzimatica del dipeptide.

È evidente che l'enzima resta conservato nell'organismo in anabiosi ed è capace di idrolizzare il substrato non appena un omogenato acquoso di germi incistati venga messo in contatto con questo in condizioni opportune di pH e di temperatura.

cisco (diploidi). I risultati ottenuti mostrano che il tenore in proteinasi è leggermente superiore nei tetraploidi, che hanno però una mole maggiore. Solamente pesando i nauplii, prima del dosaggio, con la bilancia a diavoletto di Cartesio, sarà possibile dare una precisa risposta quantitativa a questo interessante problema dei rapporti tra enzimi e genoma.

Biologia. — *Sul determinante germinale in «Spadella cephaloptera» Busch* (*). Nota di ELVEZIO GHIRARDELLI, presentata (**) dal Socio G. COTRONEI.

È noto che nei Chetognati la segregazione degli elementi della linea germinale è assai precoce. Già nell'uovo insegmentato si osserva al polo vegetativo un corpicciolo rotondeggiante fortemente colorabile con la ematossilina ferrica, descritto per la prima volta nel 1909 da Elpatiewsky [1] e da lui denominato « besondere Körper ».

Il particolare corpicciolo o « determinante germinale » passa indiviso in uno solo dei blastomeri fino alla V divisione. In seguito ad essa il blastomero in cui si trova il d.g. dà origine a due cellule di grandezza diversa, la più piccola delle quali riceve ancora indiviso il determinante germinale e può essere considerata la cellula germinale primitiva; l'altra, di dimensioni maggiori, è la prima cellula dell'entoderma.

In seguito alla sesta divisione anche la cellula germinale originaria si divide dando a sua volta le due cellule germinali primitive. Queste si distinguono dalle cellule somatiche sia perché in esse passano dei frammenti del d.g., sia per le maggiori dimensioni, sia per avere il nucleo molto grosso, vescicoloso, e spesso con cromatina fortemente contratta quasi come nei nuclei metafasici e riferibile al 3° tipo di nuclei in riposo secondo la classificazione di Barigozzi (1952) [2].

A gastrulazione compiuta queste due cellule si ritroveranno in fondo alla cavità archenterica dove per la prima volta furono osservate da Bütschli (1873) [3]. Dividendosi ulteriormente daranno origine ai primi quattro gonociti che nella larva si disporranno: due anteriormente al setto caudale, gli oogoni; due posteriormente al setto medesimo, gli spermatogoni.

L'origine del d.g. è incerta. Secondo alcuni AA. si tratterebbe di una formazione puramente citoplasmatica (Vasiljev, 1925 [4]). Secondo altri e cioè Elpatiewsky, Stevens 1910 [5], Buchner [6 7], l'origine del determinante sarebbe nucleare. Non è però possibile stabilire sulla base dei dati della letteratura se il d.g. sia di origine nucleare (Elpatiewsky, Stevens oppure nucleolare (Bordas, 1920 [8]). Secondo Buchner l'origine nucleare del determinante sa-

(*) Ricerche eseguite presso l'Istituto di Zoologia della Università di Bologna e la Stazione Zoologica di Napoli.

(**) Nella seduta del 10 gennaio 1952.

(1) W. ELPATIEWSKY, « Zool. Anz. », XXXV, 226 (1909).

(2) C. BARIGOZZI, « Experientia », VIII, *4*, 133 (1952).

(3) C. BÜTSCHLI, « Z. wiss. Zool. », *23*, 408 (1873).

(4) A. VASILJEV, « Biol. Generalis », *1*, 249 (1925).

(5) N. M. STEVENS, « Journ. Morph. », XXI, 279 (1910).

(6) P. BUCHNER, « Anat. Anz. », XXXV, 433 (1910).

(7) P. BUCHNER, « Fest. f. R. Hertwig », *1*, 233 (1910).

(8) M. BORDAS, « Trab. Mus. Nac. Ciencias », Madrid. Ser. Zool., 42 (1920).

SCANNED

rebbe estranea al nucleo dell'oocite. Egli pensa infatti che questa particolare formazione derivi da una delle cellule di fecondazione accessorie che connettono l'uovo alla parete dello ovispermidutto. Il nucleo di questa cellula, degenerando, darebbe luogo al d.g.

Scopo di queste mie prime ricerche sul d.g. dei Chetognati è stato prevalentemente quello di indagare la natura del d.g. stesso.

Mi sono servito per questo di uova di *Spadella cephaloptera* Busch. nei primissimi stadi della segmentazione, fissate prevalentemente in Carnoy, alcool a 100°, alcool acetico, alcool 95°. Le sezioni di 8–10 μ sono state colorate con la miscela verde di metil–pironina o col blu di toluidina con controlli trattati con ribonucleasi cristallizzata o con N/HCl a 60°. Altre sezioni sono state colorate con l'ematossilina ferrica o con la Feulgen.

Nelle sezioni colorate con l'ematossilina ferrica il d.g. appare come ho detto sotto forma di una inclusione citoplasmatica sferoidale del diametro di circa 8–10 μ e che si presenta un poco granulosa solo se si differenzia a lungo.

Colorando con la miscela verde di metil–pironina il d.g. appare sempre di forma rotondeggiante, uniformemente ed intensamente colorato dalla pironina.

La pironinofilia scompare trattando il d.g. con ribonucleasi cristallizzata o con l'acido cloridrico N/1. In quest'ultimo caso resta talvolta ancora debolmente pironinofila la regione di contorno del determinante germinale.

Risultati analoghi si ottengono impiegando per la colorazione il blu di toluidina.

Il d.g. è ossidabile con l'acido perjodico, e presenta pertanto una spiccata positività alla reazione di Hotchiss, per i polisaccaridi solubili ed insolubili.

Il d.g. in *Spadella* è fortemente osmiofilo come i granuli di vitello. È invece del tutto negativo alla reazione di Feulgen.

Posso pertanto concludere che almeno limitatamente agli stadi di segmentazione considerati il d.g. in *Spadella* è una formazione ricca di RNA e nella quale non è rivelabile la presenza di DNA.

Contiene con molta probabilità una frazione lipidica e quasi certamente un componente glucidico.

La presenza di RNA nel d.g. di *Spadella* concorda con ciò che recentemente ha osservato Stich (1950)[9] in *Cyclops*. L'autore citato ha infatti potuto dimostrare la presenza di RNA negli ectosomi.

L'RNA sembra dunque essere un costituente fondamentale di tutte quelle formazioni citoplasmatiche considerate come determinanti germinali (*Spadella*, *Cyclops*) ed anche nei casi di precoce differenziamento della linea germinale come nel plasma polare di *Acanthoscelides obtectus* (Mulnard, 1948[10]), e nel blastomero germinale di *Ascaris* (Pasteels, 1948[11]).

(9) H. STICH, «Arch. f. Entw. Meck.», *144*, 364 (1950).
(10) J. MULNARD, «C. R. Ass. Anat.», 35, 301 (1948).
(11) J. PASTEELS, «Arch. Biol.», *59*, 406 (1948).

RNA è pure presente nella fascia vitellogena di *Antedon* che presenta spiccate ed interessanti analogie con l'oosoma di *Litomastix* (Cotronei, 1911 [12], 1949 [13], 1950 [14,15]; Urbani, 1949 [16,17]). La presenza di RNA è stata pure dimostrata da Urbani (1950) [18] nella massa di Giardina del *Dytiscus* che per quanto presente soltanto negli ovociti viene considerato giustamente come un particolare d.g. (Urbani, loc. cit.).

Date le conoscenze che attualmente possediamo sulla natura dei plasmageni non è privo di rilievo il constatare che i fatti riferiti si accordano con la suggestiva ipotesi del Cotronei (1949–1950) secondo la quale tutti i determinanti citoplasmatici ricchi di RNA potrebbero essere considerati dei plasmageni.

La particolare abbondanza di polisaccaridi a livello del d.g. fa pensare che quest'ultimo possa avere alcune delle proprietà del nucleolo nella sintesi proteica e nello sviluppo (Dalcq, 1952 [19]).

Non posso per ora dire se vi siano nei Chetognati meccanismi di « protezione » della cromatina delle cellule germinali ad opera dello RNA del determinante come stato provato in *Ascaris* (Pasteels, loc. cit.).

Resta per ora insoluto il problema della origine del d.g. per quanto le ipotesi degli Autori precedenti possano essere prospettate sotto nuovi aspetti.

Buchner, ripeto, ritiene che il d.g. si origini da una delle cellule di fecondazione accessoria inglobata dall'ovocite. Ora nei primi stadi di segmentazione dell'uovo di *Spadella* si possono osservare una o due inclusioni Feulgen positive con l'aspetto di nuclei in degenerazione, che colorate con la ematossilina ferrica assumono taluni aspetti del d.g. descritti da Buchner (1910) [6,7].

Nel caso in cui queste inclusioni Feulgen positive siano veramente originate dalle cellule accessorie di fecondazione è difficile ammettere che siano queste a dare origine al d.g. perché si trovano nello stesso uovo in segmentazione contemporaneamente al d.g. già perfettamente costituito.

Non si può però escludere l'ipotesi di Buchner perché se veramente una delle cellule di fecondazione accessoria resta nell'uovo e vi degenera prima che questo venga deposto, l'acido timonucleico della cromatina del nucleo delle cellule accessorie stesse potrebbe essersi trasformato come è ammesso da parecchi Autori nell'RNA del determinante (Vitagliano e

(12) G. Cotronei, « Arch. Zool. It. », V, 41 (1911).
(13) G. Cotronei, « Riv. Biol. », XLI, 387 (1949).
(14) G. Cotronei, « Rend. Adunanze Solenni Acad. Lincei », 4 giugno 1950, V, 5 (1950).
(15) G. Cotronei, « Rend. Acad. Lincei », VIII, 5, 514 (1950).
(16) E. Urbani, « Riv. Biol. », XLI, 63 (1949).
(17) E. Urbani, « Riv. Biol. », XLI, 331 (1949).
(18) E. Urbani, « Riv. Biol. », XLII, 413 (1950).
(19) A. Dalcq, *Initiation à l'Embryologie générale*. Masson, Paris 1952.

De Nicola, 1948 [20]; Painter e Taylor, 1942 [21]; Pollister e Lavin, 1944 [22]; Battaglia B., 1950 [23]; Urbani, 1950 [18]).

In questo caso però le cellule di fecondazione accessorie non sarebbero identificabili con le inclusioni Feulgen positive.

Il d.g. potrebbe anche aver origine da materiale nucleare o nucleolare (Stevens, Elpatiewsky, loc. cit.) espulso dal nucleo dell'oocite.

Infine Vasiljev non ammette una origine nucleare del d.g. che si formerebbe *ex novo* nel citoplasma dell'uovo fecondato. Le modalità con le quali il d.g. compare sembrerebbero avvalorare questa ipotesi.

Ho in corso ulteriori ricerche allo scopo di apportare nuovi contributi alle conoscenze attuali di questo problema.

Biologia. — *Azione femminizzante di estratti vegetali nel differenziamento sessuale di «Rana esculenta»* [*]. Nota di ARMANDO SABBADIN e GRAZIELLA MENGARDA, presentata [**] dal Corrisp. U. D'ANCONA.

Riferiamo, in via preliminare, alcune osservazioni sulla azione estrogena di estratti acquosi di due piante, *gin-seng* (*Panax Ginseng* Meyer-Fam. *Araliaceae*) e *sumbul* (*Euriangium Sumbul* Kaufm.-Fam. *Umbelliferae*) [1]. Tali osservazioni dimostrano che gli estratti di queste piante sono capaci di influenzare il primo differenziamento sessuale di girini della razza differenziata di *Rana esculenta* di Padova.

La presenza di sostanze estrogene negli estratti acquosi di *gin-seng* fu già dimostrata da In Su Sun (1933), che in ratte castrate osservò una azione follicolinosimile e, in pesci, la comparsa dell'abito di nozze. Il *sumbul*, di cui non era ancora nota l'azione estrogena, fu da noi scelto in base alla presenza di steroli nell'estratto [2].

Furono usati diversi lotti di girini schiusisi in laboratorio. Ciascun lotto comprendeva, all'inizio dell'esperimento, 60 girini allevati in 2 litri d'acqua cambiata periodicamente. Le sostanze venivano aggiunte a gocce all'acqua degli allevamenti, secondo il metodo di somministrazione degli ormoni sterolici divenuto ormai classico.

(20) G. VITAGLIANO e M. DE NICOLA, «Nature», *162*, 965 (1948).

(21) TH. PAINTER e A. N. TAYLOR, «Proc. Nat. Acad. Sc. USA», *28*, 311 (1942).

(22) A. W. POLLISTER e R. LAVIN, «Anat. Rec.», *89*, 557 (1944).

(23) B. BATTAGLIA, «Riv. Biol.», XLII, 27 (1950).

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Zoologia e Anatomia Comparata della Università di Padova, diretto dal prof. U. D'ANCONA.

(**) Nella seduta del 10 gennaio 1953.

(1) Gli estratti ci furono gentilmente forniti dalla Ditta dott. Inverni & Della Beffa di Milano, che ringraziamo vivamente, unitamente al Direttore Scientifico della stessa prof. Renzo Benigni, che si è interessato alle nostre ricerche.

(2) R. BENIGNI, C. CAPRA, P. E. CATTORINI, *Manuale di Fitoterapia*, a cura della Ditta dott. Inverni & Della Beffa, 3ª edizione, Milano 1951.

Il *gin–seng* fu somministrato ad un primo lotto (Lotto A) a cominciare da 12 giorni dopo la schiusa, nella dose di 2 gocce giornaliere per i primi 8 giorni, di 3 gocce per i seguenti 10, successivamente di 4 gocce fino alla fine dell'esperimento, quando i girini avevano un'età di 75 giorni, ed erano in fase avanzata di metamorfosi. Per i primi 15 giorni dell'esperimento l'acqua veniva cambiata ogni 5 giorni, successivamente ogni 2. Un secondo lotto (Lotto B) ricevette giornalmente 1 gr. (54 gocce) di estratto. Questa dose si dimostrò fortemente tossica e, a causa dell'alta mortalità, il lotto si esaurì quando i girini avevano un'età di 40 giorni. Da ciascun lotto venivano prelevati periodicamente alcuni individui per l'esame istologico delle gonadi.

Un terzo lotto d'animali (Lotto C) servì da controllo.

Il *sumbul* fu somministrato a due lotti (Lotti D , E) rispettivamente nella dose di 4 e di 2 gocce giornaliere. Entrambe le dosi risultarono fortemente tossiche. I girini del lotto D morirono rapidamente, mentre quelli del lotto E arrivarono all'età di 48 giorni. Un altro lotto (Lotto F) ricevette giornalmente 1 goccia di *sumbul* per i primi 10 giorni, successivamente 2 gocce. L'acqua veniva cambiata ogni 3 giorni. In questo lotto la mortalità fu relativamente bassa; i girini furono allevati fino all'età di 63 giorni. Anche per questi lotti fu fatto un prelevamento periodico di girini per l'esame istologico delle gonadi.

Il materiale riferentesi ad altri lotti, cui le sostanze furono somministrate tardivamente, a differenziamento sessuale ormai avvenuto, è in corso di esame e sarà descritto nel lavoro per esteso, in cui verrà data anche la documentazione fotografica complessiva.

La tossicità del *gin–seng* e del *sumbul*, nelle dosi più forti, si riflette anche sullo sviluppo delle gonadi, sia della serie maschile che femminile. Una degenerazione intensa di cellule germinali porta ad ovari poco sviluppati, in cui i nidi di ovociti sono formati da un numero di elementi minore che nelle gonadi degli esemplari di controllo. Nei testicoli si notano vuoti centrali da degenerazione, che si fanno sempre più ampi col progredire dell'età. In qualche esemplare più giovane, essi potrebbero simulare un inizio di femminizzazione per distensione dello strato periferico della gonade, con comparsa di cavità ovarica. L'esame complessivo di 18 maschi, in stadi diversi di sviluppo (5 del lotto B trattato con *gin seng* e 13 del lotto E trattato con *sumbul*), farebbe tuttavia escludere una azione femminizzante delle sostanze impiegate a dosi tossiche. L'inibizione, di cui risente lo sviluppo della gonade *in toto*, impedirebbe la manifestazione di un'azione stimolante su un componente potenzialmente femminile del testicolo in formazione, quale sarebbe necessaria per l'inversione sessuale.

Femminizzazione di maschi genetici si osserva invece con le basse dosi, rispettivamente nel lotto A trattato con *gin seng* e nel lotto F trattato con *sumbul*. L'esame istologico è stato compiuto su 42 individui del primo lotto e su 35 individui del secondo. Nel lotto A, 5 individui presentano gonadi ancora indifferenti, 24 sono femmine con ovari nei diversi stadi di sviluppo,

13 sono maschi genetici di cui 4 presentano testicoli a struttura normale e 9 gonadi in fasi diverse di inversione. Nel lotto F si hanno rispettivamente: 1 individuo a gonadi indifferenti, 23 a gonadi femminili, 11 maschi genetici, di cui 7 con testicoli in fase di femminizzazione. Indicando con ♂♀ tutti i maschi genetici in corso di inversione, il rapporto sessi nei due lotti è quindi rispettivamente di 24 ♀♀ : 4 ♂♂ : 9 ♂♀, e di 23 ♀♀ : 4 ♂♂ : 7 ♂♀.

Le modalità della femminizzazione sono simili nei due trattamenti. Esse variano secondo che l'azione femminizzante interviene quando il differenziamento sessuale è appena avvenuto, o quando si è completato già da lungo tempo.

Nei più giovani esemplari che si stanno invertendo, si ha una distensione di tutta la formazione testicolare in senso centrifugo; compare una cavità, omologabile a tasca ovarica primaria, che isola la formazione testicolare, divenuta periferica, da una medulla centrale di più recente penetrazione, che rimane sterile. Nella regione testicolare distesasi, si costituiscono rapidamente i primi nidi di ovogoni. Il giovane testicolo acquista così l'aspetto di ovaia all'inizio del differenziamento sessuale, in cui però la zona corticale presenta inizialmente struttura testicolare. Appare quindi realizzato sperimentalmente un tipo di differenziamento sessuale opposto a quello che si verifica spontaneamente nei maschi genetici delle razze indifferenziate: ad una breve fase maschile succede, con l'inversione, il differenziamento in senso femminile. Nel corso dell'inversione si ha una certa degenerazione di cellule germinali. Per il resto la femminizzazione del testicolo sembra completarsi normalmente, con la formazione di una cavità ovarica secondaria.

Negli individui colpiti un po' più tardi dalla femminizzazione, non tutta la struttura testicolare è passibile di inversione. Essa infatti si scinde in una porzione periferica che si evolve rapidamente in senso femminile e in una porzione centrale che conserva l'aspetto maschile, separata dalla precedente da una fessura più o meno ampia. La coesistenza delle due opposte strutture, ovarica e testicolare, avvicina maggiormente questi individui agli intersessi descritti da Padoa [3] in trattamenti con diidrofollicolina, e interpretati dall'Autore sulla base di una « azione ambosessuale » dell'ormone. Qui però il mantenersi della struttura testicolare, accanto ad una struttura femminile indotta, appare semplicemente dovuto alla persistenza dell'azione dei fattori genotipici di mascolinità.

Quando infine l'azione femminizzante si fa sentire su individui che da più lungo tempo hanno completato il differenziamento sessuale, essa non è più in grado di invertire neppure parzialmente le strutture testicolari, ma solo si manifesta con una femminizzazione di singole cellule germinali prevalentemente localizzate alla periferia della gonade. Tali cellule

[3] E. PADOA. *Il differenziamento del sesso invertito mediante la somministrazione di ormoni sessuali e corticosurrenali. Ricerche con diidrofollicolina, progesterone e acetato di desossicorticosterone in « Rana esculenta ».* « Pubbl. Staz. Zool. Napoli » vol. 19 (1943 -

iniziano la profase meiotica e spesso degenerano o appaiono bloccate in una fase di transizione verso l'auxocitosi. La comparsa di ovociti in seno a testicoli è già stata descritta da molti Autori.

Queste modalità del processo di femminizzazione saranno più ampiamente trattate, e la loro interpretazione discussa, in una Nota a parte.

La presenza di maschi normali nei due lotti indica che gli estratti, nelle dosi usate, hanno un contenuto in sostanze femminizzanti piuttosto basso, che non è stato titolato. Alcuni individui forse sfuggono del tutto all'azione femminizzante. Tuttavia, poiché essa può colpire la gonade in momenti diversi dello sviluppo, e le sue manifestazioni tardive sono forse molto transitorie, è possibile che in singoli esemplari, al momento della fissazione, essa non sia ancora intervenuta o sia già stata superata.

Le piccole dosi di sostanza attiva appaiono comunque particolarmente adatte allo studio del meccanismo delle inversioni sessuali, come quelle che turbano in minor grado l'azione normale dei fattori genici di sessualità.

COMMEMORAZIONI

Commemorazione del Corrispondente Luigi Volta

tenuta (*) dal Socio Luigi Carnera

Vorrei, che la semisecolare amicizia e la lunga consuetudine di vita, che mi aveva legato allo Scomparso, avessero la virtù di darmi parole e frasi adatte, a rievocare degnamente la vita esemplare, la mente aperta ad ogni genere di studi e la perenne attività, con la quale egli diresse per lunghi anni gli Istituti affidati alle sue cure, insegnando instancabile ai suoi collaboratori l'arte dell'osservare, ed a numerose accolte di giovani nelle aule universitarie la scienza, alla quale aveva dedicata tutta la sua vita, ma temo che alla mia innata incapacità, verrà ad aggiungersi lo stato dell'animo mio depresso in questo momento per me particolarmente penoso.

Luigi Volta, bisnipote del grande Alessandro, ebbe i natali a Milano, il 27 luglio 1876, ed ivi trascorse infanzia e giovinezza compiendo gli studi secondari classici, dimostrando spiccate attitudini sia per le lettere quanto per le scienze, tanto da essere ancora al momento di iscriversi all'università, incerto sulla via da seguire. Decisosi per le matematiche e conseguita che ebbe con onore la laurea a Pavia, subito dopo aver soddisfatti gli obblighi militari ottenne, al principio dell'anno accademico 1899-900, di esser accolto quale assistente volontario del prof. Vito Volterra alla cattedra di meccanica nella Facoltà di Torino, e nell'anno seguente, essendosi reso libero il posto di assistente per le osservazioni astronomiche nell'Osservatorio universitario,

(*) Nella seduta del 10 gennaio 1953.

di esser chiamato nel gennaio 1901 a coprirlo. Dovendo succedermi in quel posto, stringemmo fin da allora quell'amicizia, che anni e vicende, dovevano rinsaldare fino a rendere una vera fratellanza. Ma se preparazione di studi, doti e qualità fisiche, coadiuvate da desiderio ardente di apprendere, lo sospingevano al lavoro, lo stato in cui versava la Specola Torinese era quanto di meno adatto si possa immaginare, per consentirgli una estrinsecazione qualsiasi, e non dico, con produzione scientifica autonoma, ma pur anche per la semplice prima indispensabile scuola agli strumenti. Alle scarse e limitate risorse dell'Osservatorio, si aggiungeva l'infelicissima ubicazione, ed ancor più la tensione di rapporti fra la Facoltà ed il direttore prof. Porro, che sempre più si andava acuendo, e rendeva palese come per il personale non vi fosse da attendersi possibilità di utile lavoro.

Fortunatamente, già dopo pochi mesi, il Porro chiamato dalla Facoltà di Genova, lasciava Torino, e per la Specola si iniziava un'era nuova, nella quale era data al personale una certa libertà per tentare delle osservazioni o ricerche, nell'ambito ristretto consentito dagli strumenti e dalla loro ubicazione. Approfittando di ciò il Volta, in unione al collega suo Balbi, messo alla meglio in sesto il vecchio Cerchio meridiano, col quale quasi un secolo prima aveva osservato il Plana, iniziò una serie di osservazioni di passaggi in meridiano del lembo lunare e del cratere Moesting A, pubblicandone i risultati negli Atti dell'Accademia di Torino. Ma fu proprio durante il corso di queste osservazioni, e nel successivo lavoro di calcolo, che gli si rese manifesta la necessità di una scuola, senza la quale gli sarebbe riuscito estremamente difficile conchiudere con profitto qualsiasi lavoro. Decise pertanto, al principio dell'estate 1902, cogliere l'occasione, che gli si offriva, di esser accolto temporaneamente come ospite all'Osservatorio astrometrico di Heidelberg, e di venire così vicino a me.

Accolto fin dal primo giorno con la più viva simpatia e con largo spirito di cameratismo, ebbe dai colleghi dottori Courvoisier e Jost il primo avviamento alle osservazioni al Cerchio meridiano, ed in brevissimo, resosi pieno padrone dello strumento e dei metodi di osservazione e calcolo, fu in grado di fare delle ottime determinazioni di ascensioni rette e di declinazioni, tanto da indurre il direttore dell'Osservatorio prof. Valentiner ad offrirgli, se si fosse voluto trattenere, un posto di assistente. La prospettiva di rimanere a lungo lontano dalla famiglia e dalla patria lo distolsero dall'accettare l'offerta lusinghiera, e non poco dovette influire in questo senso la parola del prof. Celoria, che stava cercando proprio allora un giovane capace e di buona volontà per rimpiazzare a Carloforte il Bianchi, sul punto di lasciare la Sardegna, per venire, chiamato dal Millosevich, al Collegio Romano. Alla fine del 1902 il Volta diede l'addio alla vecchia specola di palazzo Madama per recarsi in Sardegna, non immaginando che dopo poco più di un ventennio, vi avrebbe fatto ritorno in veste di Direttore, ma intuendo, molto più probabilmente, di trovarsi sul punto di fare un passo decisivo per la sua vita, e che il sacrificio che stava per compiere, allontanandosi dai suoi, gli avrebbe aperta la via per il suo avvenire.

Sotto la guida del maestro impareggiabile prof. Ciscato, allora direttore della Stazione Internazionale di Latitudine di Carloforte, il Volta non tardò molto a diventare padrone della tecnica delle osservazioni, acquistando la netta visione della finalità di ogni singolo atto ad esse inerente, comprese l'indispensabilità delle osservazioni sussidiarie, senza le quali viene a mancare il controllo continuo degli organi di misura del telescopio, e gli si rese chiara la ragione, per la quale non si dovevan neppur perder di vista le indicazioni degli strumenti sismici e meteorologici. Diventato in brevissimo un osservatore perfetto e completo, la Stazione non ebbe ad avvertire danno dalla partenza del già provetto Bianchi, ed anzi, essendo poi partito più tardi (nel settembre) anche il prof. Ciscato, per merito, ben si può dire, esclusivamente suo, in quel 1903 si ebbe il più alto numero di osservazioni con il più alto grado di precisione, che sia stato mai possibile raggiungere in tutto il mezzo secolo di vita della Stazione.

E qui mi sia ancora concesso ricordare un episodio, rimasto ignorato a tutti o quasi, ma non a me, che dovetti occuparmene. Trovandomi nei primi mesi del 1903 all'Osservatorio dell'Università di Strasburgo, ebbi un giorno dal mio Direttore prof. Becker l'incarico di offrire al Volta il posto vacante di secondo assistente, nella speranza, forse, che collaborando uniti ed in buona amicizia, si avesse a portare a termine facilmente e rapidamente il catalogo stellare di posizioni assolute, che da tempo si trovava in lavoro. Ma il Volta pienamente soddisfatto del lavoro, che stava compiendo in Sardegna, come aveva rifiutato l'offerta per Heidelberg, declinò pure quella più lusinghiera per Strasburgo, e sfumò l'occasione di un lavoro fatto con la nostra collaborazione. Era però destino, che ben presto ci si dovesse riunire ed attendere uniti ad un lavoro comune, ché se non doveva essere sotto il cielo dell'Alsazia e per determinare posizioni stellari, sarebbe stato sotto, il nostro bel cielo limpido ed azzurro, e per determinare l'altezza del Polo. Nell'estate del 1903 essendo imminente la partenza del Ciscato dalla Sardegna, il Celoria si rivolse a me, e conoscendo l'amicizia che mi legava al Volta, mi fece cortese e gentile pressione, perché lo andassi ad aiutare, ed avendo dato ascolto a quell'invito, già nel novembre successivo ero in Sardegna, e si iniziava, con la fraterna convivenza, la più stretta collaborazione, origine e fondamento di uno dei periodi più fecondi di attività, e nel tempo stesso dei più lieti e sereni, in quanto paghi del lavoro coscienziosamente compiuto, sapevamo trovare svago e distrazione sufficiente nella vita libera, che mare e natura largamente ci consentivano.

Ci eravamo fissati, per assolvere il nostro compito, di seguire fedelmente la strada tracciata dal Ciscato, ma mentre non perdevamo, anche una sola occasione propizia per eseguire buone osservazioni e non dimenticavamo gli insegnamenti avuti, perché riuscissero ineccepibili, ci si industriava a migliorare il complesso delle osservazioni ausiliari, che, non comprese nel programma ufficiale, erano lasciate allo zelo ed iniziativa dei singoli osservatori, e che noi moltiplicavamo, incuranti se con ciò ci si andava a sobbarcare nuovi e più pesanti lavori. Ogni più piccolo scostamento dai metodi in uso prima di

allora, era oggetto di lunghe discussioni, ed era adottato solo quando ci si era convinti dei vantaggi, che ne sarebbero derivati. Non bisogna però credere, che l'opera del Volta si limitasse ai soli compiti derivanti dalla Stazione, ché proprio in quel periodo ad esempio, oltre ad aver collaborato eseguendo molti calcoli per l'Annuario astronomico dell'Osservatorio di Torino, in seguito ad invito fattogli dal prof. Jadanza, ebbe a compilare la bella monografia sui diversi metodi fino ad allora proposti e provati per determinare la latitudine servendosi della fotografia a partire dai più antichi fino a quelli recentissimi sperimentati a Gottinga dallo Schwartzschild. A quell'epoca risale pure un altro notevole lavoro, che se rimasto non ultimato, ho ragione di credere, come vedremo in seguito, non fosse stato abbandonato del tutto. Si era proposto riprendere e completare certi punti delle ricerche del Seeliger sulla distribuzione spaziale delle stelle, ma la mancanza di una sufficiente biblioteca, per le indispensabili consultazioni, e forse ancor più l'isolamento in cui si viveva, e che non acconsentiva né facili scambi di vedute, né consigli da parte di studiosi, dovevano averlo distolto dal proseguire e finire il lavoro.

Ma ad interrompere questa nostra vita di lavoro giunse inattesa, nella primavera del 1905, una notizia, che se portando un ben favorevole apprezzamento del nostro lavoro, ci doveva render lieti, recando pur con sè la prospettiva di un forzato distacco, ci addolorava non poco. In quel torno di tempo era stato deciso dall'Associazione geodetica Internazionale creare nell'emisfero australe due nuove stazioni di Latitudine, onde chiarire la realtà e natura del fenomeno, che dava origine nell'espressione, che rappresenta la Polodia, ad un terzo termine lineare, e l'Ufficio Centrale si era rivolto al prof. Celoria per ottenere, che con i suoi buoni uffici presso gli astronomi di Carloforte, uno dei due volesse accettare di recarsi in Argentina ad erigere la nuova stazione, ed a trattenersi colà per un triennio. L'offerta era invero troppo allettante per lasciarcela sfuggire, anche se doveva derivare la fine di quella vita, che tanto ci era cara. Trattenuto da maggiori legami famigliari rimase in Italia il Volta, che per la prosecuzione dei lavori nella Stazione, prima ancora ch'io lasciassi la Sardegna, ebbe un giovane di grandissimo valore, il quale sotto nessun riguardo doveva poi far rimpiangere l'amico allontanato: era il nostro collega qui presente il prof. Giovanni Silva. Con esso il Volta per oltre tre anni seguitò il suo lavoro, senza mostrare mai stanchezza o noia, senza mai risparmiarsi, pur di veder conservata la Stazione a quel grado di primato, al quale l'opera del Ciscato e del Bianchi l'avevano innalzata, e che per opera sua era stata conservata, anzi maggiormente innalzata. Ma dopo sei anni trascorsi in Sardegna, richiamato dall'affetto per la Mamma adorata, colpita proprio allora dalla perdita del Marito, nel novembre 1908, ritornò nella sua Milano per iniziare a Brera la sua nuova attività.

In sulle prime non seppe, né volle, abbandonare il campo delle ricerche, che per anni lo avevano tenuto occupato, e primo frutto fu la notevole ed ampia Memoria, che comprende lo studio minuzioso e completo degli organi di misura del telescopio zenitale di Carloforte, basato sulla discussione di molte e molte migliaia di osservazioni. E senza scostarsi troppo dall'argo-

mento nei «Rendiconti dell'Istituto Lombardo» e nei Verbali delle sedute della Commissione geodetica italiana, ebbe a pubblicare in quell'epoca due Note, fra di loro analoghe, ma di non piccolo interesse, nelle quali vien fatta rilevare l'importanza, che assume il riferimento a posizioni stellari dedotte da cataloghi di alta precisione, quando si voglia ottenere buone latitudini, e conoscerne il grado di attendibilità. Né più tardi ebbe ad abbandonare questo campo di attività, ché dopo aver rideterminato col Forni la latitudine di Brera, volle pur fissare quella della nuova Specola di Merate, e prima di lasciar Milano, dopo aver partecipato alle operazioni promosse dai professori Antoniazzi ed Alessio per determinare radiotelegraficamente le differenze di longitudine fra le specole di Padova, Milano, Genova e Napoli, volle pur assumersi il compito della deduzione definitiva dei risultati e ricavarne il grado della loro attendibilità. Né lasciò intentato, durante la permanenza a Milano, il campo geodetico della gravimetria, ché in unione all'amico Silva, fece il collegamento delle stazioni di Padova e Milano, determinando in quella occasione pure il valore della riduzione al vuoto delle durate di oscillazione dei pendoli usati. Infine ricorderò come compiesse, durante la prima permanenza a Brera, numerose osservazioni di posizione di comete e piccoli pianeti e non perdesse neppur di vista questioni di geofisica, come lo provano le due indagini accurate sulle variazioni di livello delle acque nei tre laghi lombardi.

Chiamato alla cattedra di Astronomia dell'Università di Torino, ed alla direzione dell'Osservatorio, lasciò nel febbraio 1925 Milano, per tornare colà, ove aveva fatto le sue prime prove, e trovare il vecchio istituto trasportato in sede nuova ed adatta, e valorizzato con nuovi strumenti, e con appropriate modifiche apportate ai vecchi.

Lo vedemmo allora con foga ed entusiasmo giovanile, por mano successivamente ai diversi strumenti, cercando trarre da ognuno il miglior frutto, ostacolato, troppo spesso, dalla insufficienza di mezzi e personale, e talvolta anche dalla limitata volontà dei collaboratori, che, trovando pesante la vita a Pino, avrebbero preferita ancora la vecchia sede in Piazza Castello. Approfittando del modesto, ma ottimo, equatoriale fotografico, pensò utilizzarlo per la ricerca dei piccoli pianeti, e per ottenere negative, che facilitassero poi le osservazioni all'equatoriale visuale. Attendendo a questo lavoro ebbe la ventura di scoprire due nuovi pianetini, che ebbero i numeri 1115 e 1107, ed i nomi di Sabauda e Littoria. E questo campo di attività del suo Osservatorio doveva essere ulteriormente completato e sviluppato con ricerche teoriche e pratiche di misure di lastre, e col calcolo di orbite, da eseguire, forse, in una specie di seminario connesso alla cattedra, come si intuisce dai lavori dei suoi allievi e collaboratori inseriti fra le pubblicazioni dell'Osservatorio. Aveva pur pensato, eseguire, o far eseguire, allo stesso strumento fotografie a posa molto lunga di particolari regioni del cielo, ed è in questo proposito, che mi sembra indovinare un suo ritorno agli studii, iniziati a Carloforte e poi abbandonati, sulla distribuzione spaziale delle stelle.

Scomparso nel 1941 il Bianchi, chiese ed ottenne esser trasferito a Milano. Gli fu dato ritrovarsi così un'altra volta fra le vecchie mura di Brera,

ove aveva visto svolgersi tanta parte della sua vita, e formarsi la sua famiglia, ma ove non poteva più ricondurre la sua Eugenia, immaturamente tolta al suo affetto. Ritornava però in anni ben difficili, e particolarmente per dirigere istituti del genere degli Osservatori astronomici. Ci si avviava ai momenti più disastrosi della guerra, ed a quelli peggiori, che dovevano immancabilmente seguire la guerra perduta, quando non sarebbe stato lecito sperare o contare su mezzi o personale adeguato per sviluppare l'attività, che egli vagheggiava, per un Osservatorio, quale quello di Merate. Tuttavia efficacemente coadiuvato da due giovani collaboratori, già nel 1945 poté veder realizzato a Merate il primo convegno degli astronomi italiani, e fu agevole constatare allora, come pur attraverso a difficoltà, che potevan sembrare insuperabili, fosse già ben avviato il lavoro di ripresa. Subito dopo ebbe la soddisfazione di veder accolte dal Genio Civile le sue domande, perché oltre a parziale restauro dei vecchi edifici, in modo da avere nuovi e più comodi uffici, e maggiore disponibilità di abitazioni, fosse provveduto alla costruzione della sede per un laboratorio, ove eseguire le più moderne e delicate indagini di astrofisica stellare. Ed a questo primo passo seguì ben presto un secondo quando il Consiglio Nazionale delle Ricerche, accogliendo le sue domande, decise creare il Centro di Astrofisica stellare, con sedi a Merate ed Asiago, e concesse mezzi e personale, che difficilmente si sarebbero potuti ottenere per altra via.

Penso sia lecito pertanto affermare, che il Volta, con questi due successi, conseguiti, in anni estremamente difficili, ma grazie alla sua iniziativa ed operosità, si sia assicurato un titolo della più alta benemerenza nei riguardi dell'Osservatorio di Merate, tanto da dover esser ricordato accanto all'indimenticabile fondatore prof. Emilio Bianchi.

Non mi dilungherò a parlare dei molti altri suoi lavori intesi a rievocare grandi scomparsi, o per ricordare eventi storici della nostra scienza, o anche semplicemente ad illustrare, con la sua facile parola fenomeni od avvenimenti celesti, ma non potrei dimenticare la collaborazione, data per anni, alla pubblicazione degli scritti e dell'epistolario del suo grande Bisavo.

Questa a gran tratti la vita di studioso, che gli valse ad esser chiamato a far parte di questa Accademia, come lo era pur stato in quella di Torino, e nell'Istituto lombardo, e come corrispondente anche nella Pontificia. Fu membro effettivo della Commissione Geodetica Italiana, che vedeva in lui il più degno rappresentante degli astronomi dell'epoca d'oro della Stazione di Carloforte, e fu Presidente della Società Astronomica Italiana ove venne rieletto con votazioni unanimi allo scadere della carica.

Ma quanti ebbero la ventura di avvicinarLo e conoscerLo, se anche per la Sua estrema modestia, non seppero sempre misurare il valore dello scienziato, non vi è dubbio, che avvertirono la grandezza e nobiltà dell'animo generoso, e l'alta rettitudine, per effetto delle quali restava contrassegnato ogni atto della sua vita. E noi, che spesso gli fummo al fianco, sentivamo come fosse sufficiente la sua presenza, per darci garanzia, che quanto si stava per fare o decidere, non sarebbe stata suscettibile di appunto o rimprovero. Col suo ca-

rattere dolce aveva saputo accattivarsi dovunque l'affetto; e ben lo vedemmo due anni or sono quando tornato, dopo quaranta anni di assenza, a Carloforte, venne salutato calorosamente dagli anziani e vecchi, che ancora ricordavano il giovane pieno di vita ed energia, sempre egualmente pronto recarsi ad una partita di caccia, ad una vogata, ovvero magari ad una semplice partita di bocce, ma sempre, ovunque, e con tutti, ugualmente benevolo e cordiale. E ricordo più vivo ed incancellabile conserveranno certamente quanti, come il collega Silva, si sentono onorati di esser stati suoi allievi, e mentre ad essi sembrerà sempre doverlo rivedere, e risentire la sua cara voce, e saranno invece portati a pensare all'immatura sua fine, quando avrebbe potuto dare ancora tanto e alla Famiglia, e alla Scienza ed alla Patria, per la quale aveva combattuto all'Isonzo, trepidato alla Piave, e gioito nei giorni della Vittoria nella mia Trieste.

COMUNICAZIONI VARIE

Il Presidente comunica che sono presenti alla seduta i proff. Hans Hörnick, del Politecnico di Graz, che si trova a Roma per collaborare con il Socio Picone e con gli altri studiosi dell'Istituto Nazionale del Calcolo e il prof. M. Haissinsky, dell'Institut du Radium di Parigi, che si laureò nella nostra città nel 1927 e che vi è ora ritornato, avendo accettato l'invito del Consiglio della Fondazione « Guido Donegani » di tenere un ciclo di conferenze sulla « Chimica nucleare. Isotopi ed applicazioni ».

Il Presidente porge il cordiale saluto della Classe e suo personale ai due illustri ospiti e, anche a nome della predetta Fondazione, rivolge al prof. Haissinsky un vivo ringraziamento.

Il prof. Giordani comunica che il Socio Colonnetti ha già organizzato, con la più alta competenza, la prossima discussione sul tema: « Recenti progressi della scienza delle costruzioni », che avrà inizio venerdì 13 marzo p. v. Verranno svolte le seguenti relazioni:

Prof. A. Caquot, Presidente de l'« Académie des Sciences » di Parigi: « Sur la limite élastique dans son domaine total aussi bien pour les corps isotropes que pour les corps anisotropes ».

Prof. Franco Levi del Politecnico di Torino: « Fenomeni di adattamento e calcoli a rottura ».

Prof. Giulio Pizzetti del Politecnico di Torino: « Evoluzione e possibilità future delle strutture a guscio ».

Prof. P. Cicala del Politecnico di Torino: « Recenti sviluppi di una teoria limite, non lineare, sul comportamento elastico della piastra sottile curva ».

Prof. P. L. Nervi dell'Università di Roma: « Possibilità e tecnica delle strutture cementizie sottili ».

Prof. A. Giacomini dell'Università di Trieste: « Nuovi metodi per la determinazione sperimentale delle costanti elastiche ».

Il Presidente desidera porgere il suo più vivo ringraziamento al Socio Colonnetti e, con l'occasione, informa la Classe che il Collega Krall, al quale era stato affidato l'incarico di collaboratore con il predetto Socio per l'organizzazione della citata discussione, ha pregato la Presidenza di essere dispensato da tale incarico.

Il Presidente, riferendosi alla nota iniziativa del comando presso il Consiglio Nazionale delle Ricerche di Professori universitari per compiti di ricerca scientifica, comunica che il Comitato Nazionale per la Biologia del predetto Consiglio ha prescelto, come tema di sperimentazione da prendere come base di un provvedimento di comando, il seguente: « Elettrofisiologia del sistema nervoso ».

Il Consiglio pertanto ha richiesto all'Accademia di designare una terna di studiosi scelti tra i cultori della disciplina predetta, fra i quali sarà prescelto il professore da comandare.

Il prof. Giordani aggiunge che poiché l'argomento interessa tutta la Categoria V, egli ha ritenuto opportuno pregare i Colleghi di detta Categoria di studiare la questione e di presentare alla Classe proposte in merito. Prega pertanto il Socio Rossi di comunicare le proposte formulate dalla Categoria.

Il predetto Collega dà lettura in una relazione con la quale si propone la seguente terna composta di due soli nomi:

GIUSEPPE MORUZZI

GIULIO CESARE PUPILLI.

Il prof. Rossi aggiunge che gli accordi circa la terna sono stati presi soltanto da alcuni Colleghi che erano presenti in Accademia nella mattinata.

Il Socio Perucca osserva che la designazione della terna ha il fine di perseguire un risultato che deve onorare gli studi e l'Italia e ritiene opportuno che tutti gli appartenenti alla Categoria debbano essere consultati e debbano avere il tempo di manifestare il loro giudizio. Pensa pertanto che sia necessario informare tempestivamente i Soci delle Categorie interessate al loro domicilio prima delle sedute nelle quali si deve procedere alla designazione delle terne.

Il Presidente risponde che era già suo intendimento studiare per il futuro una regolare procedura, in considerazione della frequenza delle richieste del Consiglio Nazionale delle Ricerche di procedere alla designazione di terne, ma desidera ora che si decida su una questione pregiudiziale, se cioè si debba oggi soprassedere alla designazione e inviare la relativa richiesta al domicilio dei Soci della Categoria V o se, per questa volta, si possa procedere senza necessità di tale richiesta a domicilio.

Il Socio Perucca risponde che la procedura ha una importanza secondaria e che il punto essenziale è che la Classe disponga di un deliberato dell'intera Categoria.

Il Presidente propone allora di scindere la questione nei due seguenti argomenti e di sottoporli al voto della Classe:

a) se si possa oggi procedere alla designazione, previa consultazione dei membri della Categoria V che potrebbe aver luogo mediante una breve sospensione della seduta;

b) se si debba porre all'ordine del giorno di una delle prossime sedute lo studio di una procedura intesa a disciplinare la collaborazione tra l'Accademia e il Consiglio Nazionale delle Ricerche per i comandi.

La Classe si pronuncia favorevolmente su entrambi gli argomenti messi in votazione e il Presidente pertanto sospende la seduta.

Ripresi i lavori, il Socio Rossi, a nome di tutti i membri della Categoria V presenti alla seduta, che si sono consultati nel frattempo, conferma la relazione già letta con la quale si propone una terna composta dei due seguenti nomi in ordine alfabetico:

GIUSEPPE MORUZZI
GIULIO CESARE PUPILLI.

Messa ai voti, la terna è approvata dalla Classe.

Il Presidente comunica quindi che alcuni Soci residenti a Roma hanno rivolto alla Presidenza la preghiera di voler esaminare la possibilità di convocare le sedute della Classe per le ore 17, anziché per le ore 16, giustificando la loro richiesta con il fatto che, essendo impegnati nel loro consueto lavoro fino ad oltre le ore 14, riesce loro disagevole trovarsi alle 16 in Accademia.

Il Socio Armellini ritiene che tale spostamento non sia opportuno e osserva anzi che nel passato le sedute avevano luogo alle 15 anziché alle 16. Anche numerosi altri Soci si dichiarono contrari allo spostamento d'orario. Dopo breve discussione, il Presidente mette ai voti la proposta di convocare le sedute di Classe alle ore 17 la quale è respinta a grande maggioranza.

PERSONALE ACCADEMICO

Il prof. Giordani dà la parola al Socio Carnera che pronuncia l'orazione commemorativa del compianto Collega Luigi Volta, ricordandone la nobile figura di Uomo e di Scienziato.

Il Presidente ringrazia l'oratore per le sue elevate parole e rinnova ai familiari del prof. Volta, presenti alla commemorazione, l'espressione del più vivo cordoglio dell'Accademia e suo personale per la scomparsa dell'insigne Astronomo.

PLICHI SUGGELLATI

Il prof. Giordani presenta un plico suggellato del prof. Guido Finzi dell'Università di Milano, consegnato all'Accademia il 23 dicembre 1952

e un plico del sig. Achille Cornacchia pervenuto in data 30 dello stesso mese.

La Classe, constatata l'integrità dei sigilli, delibera che i due plichi siano conservati a disposizione degli interessati, nell'archivio accademico.

Il Socio Sergi chiede se sia opportuno menzionare nei verbali pubblicati nei « Rendiconti » anche i titoli dei lavori presentati in plico suggellato e il Presidente risponde che quando detti titoli risultino da annotazioni degli autori sulle buste dei plichi stessi e quando dette annotazioni vengano comunicate alla Classe, è necessario farne menzione nei verbali, dovendo gli stessi fedelmente rispecchiare ogni modalità e particolarità delle varie presentazioni.

PRESENTAZIONE DI LIBRI

Il Socio Perucca offre in omaggio il 2° dei 5 volumi dell'opera da lui diretta dal titolo: « Dizionario d'Ingegneria » e ricorda che tale lavoro, anche se volutamente limitato ad una precisazione ed illustrazione dei concetti della tecnica, ha richiesto uno sforzo non lieve da parte dei numerosissimi collaboratori ed egli, come Direttore dell'opera, desidera rinnovare loro, anche in questa autorevolissima sede, il suo ringraziamento. Desiderava inoltre confermare, con questa presentazione che, se lunghissimo (circa otto anni) fu il periodo di gestazione, perché relativo all'elaborazione preliminare del testo dell'opera intera, molto può ridursi l'attesa dei volumi successivi al primo; egli ha infatti l'onore di presentare il 2° volume, uscito a soli circa 11 mesi dal primo, mentre ha già avuto inizio la stampa dei primi fogli del 3° volume. Di fronte ai volumi ormai a disposizione del pubblico, egli è certo che tutti siano convinti di quanto il contenuto scientifico e concettuale delle scienze tecniche sia poderoso; questo fatto è reso ancora più difficile con nomenclature o non sistematiche o illogiche o mal conformate e spesso tutt'altro che univoche nei riguardi della corrispondenza tra termini e concetti. Il prof. Perucca confida che il « Dizionario » possa assolvere le finalità che esso si propone, di dare cioè un fondamentale aiuto per rispondere ad una infinità di interrogativi che si presentano alla mente degli ingegneri, dei tecnici, degli studiosi e, in genere, delle persone colte.

Il Socio Dore offre in omaggio il « Verbale della 49ª Sessione della Commissione Geodetica Italiana », tenuta a Roma il giorno 9 marzo 1951, che illustra i lavori eseguiti nel 1950 e quelli in programma per il 1951.

Il Presidente ringrazia i Soci Perucca e Dore e dà quindi la parola al Segretario Accademico il quale presenta le pubblicazioni inviate in omaggio all'Accademia, mettendo in particolare evidenza il « Tomo II del Libro Jubilar, 1849-1949 » dell'Instituto Geològico y Minero de España e un estratto dalla rivista di « Ingegneria », n. 12 del dicembre 1952, del dott. ing. Guido Ucelli, dal titolo « Il Museo Nazionale della Scienza e della Tecnica e la Mostra a celebrazione del V centenario della nascita di Leonardo ».

PRESENTAZIONE DI NOTE E MEMORIE.

Presentano Note per la pubblicazione nei «Rendiconti» i Soci: Chiarugi, Negri, Boaga, Picone, Perucca, Signorini, Montalenti, Tricomi, Cotronei, Cambi e Marotta.

Viene letto e approvato l'elenco delle Note pervenute alla Cancelleria.

Le seguenti Note saranno pubblicate in fascicoli successivi:

BOAGA G. – Profilo gravimetrico fra il Tirreno e lo Jonio lungo il parallelo 40°.

MONTALENTI G., SILVESTRONI E. e BIANCO I. – Nuove indagini sul problema della microcitemia (pres. dal Corrisp. G. MONTALENTI).

BORDONI P. G. – Su certe proprietà generali del raggio di girazione delle figure piane convesse (pres. dal Socio A. SIGNORINI).

CORTI R. – Su *hypericum elodes* Huds., relitto eu-atlantico della Selva di S. Rossore (pres. dai Soci A. CHIARUGI e G. NEGRI).

DEMICHELIS F. e MALVANO R. – Coincidenze nel $^{214}_{84}Po$ (pres. dal Socio E. PERUCCA).

MARIANI A. e TOSCHI G. – Elettroforesi su carta di proteine muscolari (pres. dal Socio D. MAROTTA).

MESSERI A. – Alcuni dati sulla struttura submicroscopica delle fibre di tensione di un campione di legno di pioppo (pres. dal Socio A. CHIARUGI).

STORCHI E. – Determinazione dei potenziali nei campi elettromagnetici generalizzati (pres. dal Corrisp. B. FINZI).

URBANI-MISTRUZZI L. e GALASSO R. – Osservazioni citologiche sulla ghiandola dell'albume di *Eobania vermiculata* (Mueller) (pres. dal Socio G. COTRONEI).

Il Socio Chiarugi, nel presentare la Nota di R. Corti dal titolo: «Su *hypericum elodes* Huds., relitto eu-atlantico della Selva di S. Rossore», richiama l'attenzione dei Colleghi sulla tenuta di S. Rossore Pisa che costituisce un patrimonio di bellezze naturali e di interesse scientifico e forestale di straordinaria importanza che è necessario salvaguardare ad ogni costo da sfruttamenti che possano pregiudicarla in modo radicale e irrimediabile. Prega quindi il Collega Negri di voler illustrare più particolarmente l'argomento.

Il Socio Negri, dopo aver confermato quanto detto dal Collega Chiarugi in merito all'importanza scientifica e artistica della tenuta di S. Rossore, fa presente che essa è l'unico magnifico residuo della foresta sublitorale ed è oggetto di grande ammirazione da parte di tutti gli studiosi stranieri che hanno occasione di visitarla. Riafferma la necessità che tale importante patrimonio sia salvaguardato da danni o distruzioni che ad esso potrebbero arrecare le realizzazioni dei vari progetti, dei quali si è avuto recentemente notizia, riguardanti la sistemazione della tenuta di S. Rossore.

Il Socio Negri ricorda che egli, sia come Presidente della Società Botanica Italiana, sia come membro della Commissione per la tutela del paesaggio

del Consiglio Nazionale delle Ricerche, si è già attivamente occupato di tale grave problema, ma ritiene opportuno che esso sia presentato all'Accademia in modo che la stessa possa intervenire, con la sua autorità presso il Parlamento ed il Governo, affinché, come in tutti gli altri Paesi d'Europa, anche in Italia, quei pochissimi monumenti naturali, che ancora qui sussistono, siano debitamente tutelati. A nome anche del Collega Chiarugi presenta il seguente ordine del giorno:

La Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali dell'Accademia Nazionale dei Lincei, nella sua adunanza del giorno 10 gennaio 1953;

avuta notizia dei vari progetti riguardanti la sistemazione della tenuta di S. Rossore (Pisa), già costituente dotazione della Corona, e tendenti tutti, più o meno, ad uno sfruttamento che compromette in modo radicale e irrimediabile quel patrimonio di bellezze naturali e di interessi scientifici e forestali che essa ancora rappresenta;

considerando che la tenuta di S. Rossore è l'unico magnifico residuo, in molte parti ancora intatto, della foresta sublitorale che, nelle altre zone della costa tirrena, è stata straziata, stroncata, sradicata, senza alcun rispetto, e che è ancora rifugio di specie vegetali e animali, documenti insostituibili per la storia della vegetazione e purtroppo in via di estinzione, e di ricca selvaggina naturale;

fa voti:

che il Parlamento ed il Governo vogliano provvedere a conservare intatto il patrimonio di bellezza naturale che la tenuta di S. Rossore, da millenni ininterrottamente protetta dal demanio romano, da Imperatori, Re e Repubbliche, ancora rappresenta, in armonia con la legge 11 giugno 1922, n. 778, pubblicata nella *Gazzetta Ufficiale* del 24 giugno 1922, n. 148 e istituiscano il *Parco Nazionale di S. Rossore*, destinato a mantenere questo venerando residuo della Selva Pisana, questo Monumento Naturale, indiviso sotto l'amministrazione unitaria di un *Ente* che escluda la speculazione urbanistica e che garantisca, invece, con la rigorosa tutela dell'equilibrio biologico, l'integrità del patrimonio forestale e dell'ambiente naturalistico.

Il Socio Sergi si associa pienamente e così pure il Collega Beccari il quale, nella sua qualità di cultore di Zoologia, mette in evidenza il grande interesse zoologico che la tenuta di S. Rossore presenta, specialmente per la microfauna di notevolissima importanza che in essa vive.

Il Socio Crocco condivide pienamente il pensiero dei Colleghi ma ritiene che la Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali possa occuparsi del problema soltanto dal lato scientifico, e che, per la parte concernente la bellezza artistica, sia competente l'altra Classe dell'Accademia.

Dopo breve discussione, alla quale partecipano il Socio Cassinis e il Presidente, questi propone che il voto presentato dai Colleghi Negri e Chiarugi sia messo in votazione e, se approvato, trasmesso all'altra Classe in modo che possa essere inviato agli organi competenti come voto dell'intera Accademia.

L'ordine del giorno è messo in votazione e approvato per acclamazione.

OPERE PERVENUTE IN DONO ALL'ACCADEMIA

presentate nella seduta del 10 gennaio 1953.

COMMISSIONE GEODETICA ITALIANA. — *Verbale della 49ª sessione tenuta in Roma il giorno 9 marzo 1951*. Bologna, Azzoguidi, 1952. Pp. 35, in-4°, con tavv.

Dizionario d'Ingegneria diretto da Eligio Perucca. Vol. II (Cer–For.). Torino, U.T.E.T., 1952. Pp. VIII–1087, in-4°, con figg. e tavv.

INSTITUTO GEOLÓGICO Y MINERO DE ESPAÑA. — *Libro jubilar (1849–1949)*. Tomo II. Madrid, 1951. Pp. 437, in-8°, con tavv.

PERUCCA Eligio. — Vedi: *Dizionario d'Ingegneria*.

ROSSINI Angelo. — *Determinazione della massa del corpuscolo che trasmette la luce*. Vetralla (Viterbo), 1952. Pp. 6 dattiloscritte.

ROSSINI Angelo — *Dialogo sopra il sistema relativistico*. II ed. provvisoria. Vetralla, 1952. Pp. 13 in ciclostile. Con appendice dattiloscritta: *La relatività e l'esperimento del microscopio*.

— *Simplicio e la geometria non-euclidea ovvero l'aggiramento del V postulato di Euclide sulle parallele*. Viterbo, Tip. Unione, 1952.

UCELLI Guido. — *Il Museo Nazionale della Scienza e della Tecnica e la Mostra a celebrazione del V Centenario della nascita di Leonardo*. Estr. da « Rivista di Ingegneria », 1952, n. 12.

D. DE BLASI e U. AMALDI.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

Seduta del 14 febbraio 1953

Presiede il Presidente FRANCESCO GIORDANI

NOTE DI SOCI

Astronomia. — *Sulla opportunità di direttive generali nella ricerca di leggi di coordinamento fra i moti stellari.* Nota III (*) del Corrisp. VITTORIO NOBILE.

Nelle Note I e II, dopo aver precisato ciò che bisogna intendere per « coordinamento » delle velocità stellari, ho indicato un procedimento il quale non solo permette di stabilire con semplici verifiche numeriche se per le stelle prossime al Sole quel coordinamento sussista, ma porta nel modo più diretto ad una razionale classifica dei varî casi che possono presentarsi nel movimento, relativo al Sole, del predetto gruppo di stelle.

È facile e interessante ora il chiarire anzitutto come il procedimento medesimo, fondato sulla determinazione dei valori numerici che assumono gli elementi della matrice dell'omografia di deformazione $d\boldsymbol{v}/d\mathrm{P}$ corrispondente alla posizione occupata dal Sole, possa facilmente essere applicato anche in regioni della Galassia esterne al predetto intorno, in quanto che i dati necessarî allo scopo possono essere ottenuti, in tal caso, senza complicazioni sensibilmente maggiori di quelle che presenta il caso precedente, ma solo con accresciute (non però insuperabili) difficoltà di osservazione.

Notiamo infatti che la relazione fondamentale indicata nella Nota II con (3) rimane egualmente valida nell'intorno di qualsiasi stella dell'ammasso ed è solo da supporsi che possano variare (non può dirsi *a priori* entro quali limiti) gli elementi della matrice già considerata. Detta allora Σ_0 la stella nel cui intorno sono comprese quelle dell'altro gruppo da esaminare e Σ una generica fra queste ultime, sussisterà fra le velocità relative $\boldsymbol{v}_\Sigma - \boldsymbol{v}_{\Sigma_0}$ delle Σ rispetto a Σ_0 e i vettori $\Sigma - \Sigma_0$ una relazione sostanzialmente identica alla (3) della Nota II e pel calcolo degli elementi della nuova

(*) Presentata nella seduta del 14 febbraio 1953.

matrice non occorrerà conoscere altro che le componenti dei vettori anzidetti: dati determinabili senza difficoltà per via indiretta, poiché, rispetto ad un triedro con l'origine in Σ_0 e con gli assi paralleli a quelli del triedro *solare*, le componenti delle velocità relative delle Σ e le coordinate delle medesime stelle si deducono senz'altro: le prime per differenza fra le componenti delle velocità $\boldsymbol{v}_\Sigma - \boldsymbol{v}_S$ e $\boldsymbol{v}_0 - \boldsymbol{v}_S$ di Σ e Σ_0 rispetto al Sole e le altre analogamente per differenza fra le coordinate di Σ e Σ_0 rispetto allo stesso.

2. Riguardo ai dati di osservazione occorrenti è chiaro che questi non possono essere gli stessi che si sono considerati come tali nella trattazione teorica del problema e che è invece necessario, per considerazioni molto ovvie dal punto di vista astronomico–pratico, sostituire al sistema delle coordinate cartesiane e loro derivate temporali un sistema di coordinate polari con le loro corrispondenti derivate (moti proprî angolari e radiali). Scelto dunque un sistema di coordinate polari (r, λ, β) legato al triedro cartesiano in modo che sussistano le relazioni

$$\xi = r \cos\lambda \cos\beta \quad , \quad \eta = r \operatorname{sen}\lambda \cos\beta \quad , \quad \zeta = r \operatorname{sen}\beta ,$$

basterà eguagliare le derivate temporali di queste variabili rispettivamente alla espressione

$$(1) \qquad a_{11}\xi + a_{12}\eta + a_{13}\zeta$$

e analoghe per giungere, a calcoli fatti, a tre relazioni fra le a_{rs} [1] le quali possono scriversi, indicando con un punto le derivate rispetto al tempo,

$$(2) \quad \begin{cases} \dot{r}/r - (\dot{\beta}\,\operatorname{tg}\beta + \dot{\lambda}\,\operatorname{tg}\lambda) = a_{11} + a_{12}\operatorname{tg}\lambda + a_{13}\operatorname{tg}\beta\sec\lambda \\ \dot{r}/r - (\dot{\beta}\,\operatorname{tg}\beta - \dot{\lambda}\cot\lambda) = a_{21}\cot\lambda + a_{22} + a_{23}\operatorname{tg}\beta\operatorname{cosec}\lambda \\ \dot{r}/r + \dot{\beta}\cot\beta = \cot\beta\,(a_{31}\cos\lambda + a_{32}\operatorname{sen}\lambda) + a_{33} . \end{cases}$$

Queste equazioni valgono, come si è già detto, se i moti proprî si intendono riferiti ad un triedro di orientamento assoluto. Se il triedro di cui si è avvalso l'osservatore per la determinazione dei moti proprî ha una rotazione non nulla $\omega(p, q, r)$ [2] e di questa l'osservatore non ha tenuto conto,

(1) Le incognite a_{rs} sono grandezze di dimensione $[t^{-1}]$; i loro valori numerici dipendono quindi soltanto dalla unità di tempo, che il calcolatore sceglierà nel modo per lui più conveniente.

(2) Riguardo alla scelta di tale triedro, questa può opportunamente esser fatta, come ho rilevato più volte in passato, all'infuori di ogni collegamento *terrestre*, ciò che porta a varie considerevoli semplificazioni. L'asse delle x può farsi coincidere con la congiungente il Sole con una stella Σ_1 sicuramente «vicina», il piano Sxy con quello individuato da S, Σ_1 e da un'altra stella Σ_2 e l'asse Sz sarà poi disposto normalmente al piano predetto e opportunamente orientato. Tale triedro avrà una rotazione certamente non nulla, la quale potrà essere determinata direttamente con procedimenti ai quali ho fatto cenno nella Nota I.

gli elementi da lui determinati corrisponderanno a movimenti puramente *relativi* e pertanto, dette $\dot{\xi}_r$, $\dot{\eta}_r$, $\dot{\zeta}_r$ le componenti cartesiane di questi, le proiezioni sugli assi mobili delle velocità assolute, da eguagliarsi alla espressione (1) e successive, saranno

$$\dot{\xi}_r + q\zeta - r\eta \quad , \quad \dot{\eta}_r + r\xi - p\zeta \quad , \quad \dot{\zeta} + p\eta - q\xi .$$

Si avranno dopo ciò tre equazioni le quali potrebbero egualmente servire alla determinazione delle a_{rs} purchè si fosse pervenuti *per altra via* alla conoscenza della rotazione ω. Tali equazioni, cioè

$$(3) \qquad \left| \begin{array}{l} \dot{\xi}_r = a_{11}\,\xi + (a_{12} + r)\,\eta + (a_{13} - q)\,\zeta \\ \dot{\eta}_r = (a_{21} - r)\,\xi + a_{22}\,\eta + (a_{23} + p)\,\zeta \\ \dot{\zeta}_r = (a_{31} + q)\,\xi + (a_{32} - p)\,\eta + a_{33}\,\zeta \end{array} \right.$$

ci mostrano che anche le velocità relative $\boldsymbol{v}_r$ sono legate ai vettori $\Sigma - S$ da una omografia vettoriale e che questa è $d\boldsymbol{v}_r/d\Sigma$, mentre la prima era $d\boldsymbol{v}_a/d\Sigma$. La matrice di $d\boldsymbol{v}_r/d\Sigma$, cioè

$$(4) \qquad \left\| \begin{array}{ccc} a_{11} & a_{12} + r & a_{13} - q \\ a_{21} - r & a_{22} & a_{23} + p \\ a_{31} + q & a_{32} - p & a_{33} \end{array} \right\|$$

mette poi in evidenza come le dilatazioni delle due omografie coincidano e pertanto tutti gli elementi cinematici in relazione con la *deformazione pura* possono essere conosciuti dall'astronomo *senza che questi abbia ad occuparsi della rotazione assoluta del suo triedro di riferimento*. Naturalmente anche il moto d'insieme dell'aggruppamento considerato gli rimarrà ignoto finché egli non abbia determinato per altra via il vettore $\omega\,(p\,,q\,,r)$. Infatti l'astronomo potrà conoscere dalla matrice (4) (prendendo le differenze dei termini simmetrici rispetto alla diagonale principale) i valori numerici delle quantità

$$(5) \qquad \frac{1}{2}(a_{32} - a_{23}) - p \quad , \quad \frac{1}{2}(a_{13} - a_{31}) - q \quad , \quad \frac{1}{2}(a_{21} - a_{12}) - r$$

le quali rappresentano le componenti della rotazione d'insieme del gruppo nel moto *relativo* al triedro mobile, ossia $1/2$ rot $\boldsymbol{v}_r$. Egli potrà allora immediatamente determinare le analoghe componenti corrispondenti al moto assoluto, cioè le prime parti delle (5), appena sia riuscito in altro modo ad ottenere i valori di $p\,,q\,,r$ [3].

(3) Queste conclusioni si possono esprimere più semplicemente in forma vettoriale. Infatti dalla relazione $\boldsymbol{v}_a = \boldsymbol{v}_r + \omega \times \Sigma - S$, valida per movimenti relativi al Sole, si ha $d\boldsymbol{v}_a\,d\Sigma - d\boldsymbol{v}_r\,d\Sigma = \omega \times$, se s'intendono le differenziazioni $d\boldsymbol{v}_a$ e $d\boldsymbol{v}_r$ fatte in relazione

3. In quanto alla effettiva utilizzazione delle equazioni (2) o di altre ad esse equivalenti al fine delle determinazioni delle a_{rs} e della conseguente risoluzione degli importanti problemi che dipendono dalla conoscenza di quei parametri, va anzitutto notato che in ciascuna di quelle equazioni le distanze stellari r e le velocità radiali $\dot{r}$ appaiono nella formazione $\dot{r}/r$. La sottrazione membro a membro di una delle dette equazioni dalle due altre dà luogo allora alla simultanea eliminazione di r e $\dot{r}$ e alla deduzione di due equazioni fra le coordinate angolari λ e β e le loro derivate temporali $\dot{\lambda}$ e $\dot{\beta}$ e da ciò parrebbe potersi pensare alla possibilità di conoscere le a_{rs} sulla base di misure *di soli moti proprî angolari, prescindendosi completamente da ogni conoscenza sulle distanze*. Si vede però che nelle equazioni dedotte per differenza i termini a_{11}, a_{22}, a_{33} figurano soltanto con le loro mutue differenze, cosicché i valori singoli dei tre parametri considerati rimarrebbero indeterminati.

In forma più concreta, notiamo che con la maniera qui accennata di adoperare le equazioni (2) – la quale risponde al concetto di eliminare preventivamente quei dati dei quali la esatta determinazione a mezzo delle osservazioni si presenta difficile ad ottenersi con precisione – si perviene alle equazioni

$$(6)\quad \begin{cases} a_{22} - a_{11} + a_{21}\cot\lambda - a_{12}\operatorname{tg}\lambda + \operatorname{tg}\beta\,(a_{23}\operatorname{cosec}\lambda - a_{13}\sec\lambda) = \dot{\lambda}\,(\operatorname{tg}\lambda + \cot\lambda) \\ a_{33} - a_{11} + \cot\beta\,(a_{31}\cos\lambda + a_{32}\operatorname{sen}\lambda) - a_{13}\operatorname{tg}\beta\sec\lambda - a_{12}\operatorname{tg}\lambda = \\ \qquad = \dot{\beta}\,(\operatorname{tg}\beta + \cot\beta) + \dot{\lambda}\operatorname{tg}\lambda, \end{cases}$$

ciascuna delle quali, potendo essere riferita ad una qualunque delle stelle del gruppo, potrà fornire una serie di equazioni il cui numero è solo limitato, per ogni serie, da considerazioni di indole pratica. Si formeranno quindi due sistemi di cinque equazioni normali fra le cinque incognite distinte che ciascun sistema contiene e dalla risoluzione dei due sistemi si avranno i valori più probabili delle incognite a_{rs}, con la indicazione degli errori dai quali queste possono ritenersi affette.

Si vede intanto che non potendosi per tal via conoscere i valori singoli dei tre elementi ad indici eguali (quelli della diagonale principale della matrice) ma solo le loro mutue differenze, bisogna completare il sistema (6), parzialmente indeterminato, e rinunciare al vantaggio di una totale esclusione dai dati relativi alle *distanze*. Bisogna insomma ritornare alle (2) e

a spostamenti puramente locali di Σ. Le due omografie differiscono dunque per una *omografia assiale* e le loro dilatazioni non possono che coincidere.

Si ha poi dall'ultima relazione, per la definizione di rot, l'altra

$$\frac{1}{2}\operatorname{rot} v_r = \frac{1}{2}\operatorname{rot} v_a - \omega,$$

che mette in luce l'impossibilità di decomporre il vettore della rotazione relativa del gruppo negli altri due a secondo membro se ω non viene determinato direttamente.

si vede allora che, potendosi fra queste eliminare $\dot{\lambda}$ e $\dot{\beta}$, il rapporto $\dot{r}/r$ si rende esprimibile in funzione delle sole coordinate sferiche, e che pertanto, nei limiti dell'intorno e in corrispondenza di ciascuna direzione, esiste fra le distanze stellari dal Sole e le velocità radiali una proporzionalità il cui coefficiente è immediatamente conoscibile in funzione dei coseni di direzione o delle due coordinate sferiche [4]. Per ogni stella di cui si sia riusciti a conoscere con sufficiente precisione la distanza e si sia determinata la velocità radiale si disporrà di una relazione fra le incognite a_{rs}, analiticamente distinta dalle precedenti, con che ogni indeterminazione potrà essere rimossa. Singolarmente si presta a tale scopo la prima delle (2), perchè se supponiamo che l'osservatore si avvalga, direttamente o indirettamente, di un triedro mobile disposto come è qui innanzi indicato (Nota II), sarà per la stella Σ_1, in ogni tempo $\lambda = \beta = 0$ e la prima delle (2) dà allora $\dot{r}/r = a_{11}$. Basterà dunque che *di quella sola stella* si conosca con sufficiente precisione la distanza e si possa determinare con tutta esattezza la velocità radiale perchè possa non solo aversi il valore di a_{11} e dalle già note differenze quelli di a_{22} e di a_{33}, ma anche conoscere, successivamente, il rapporto $\dot{r}/r$ corrispondente a qualsiasi altra stella del gruppo in questione e quindi, *senza altre operazioni, le distanze di tutte quelle stelle delle quali sia stata misurata la velocità radiale relativa.*

Tali sono i risultati che possono raggiungersi sulla base di una ipotesi che preveda semplicemente l'esistenza di un campo vettoriale delle velocità stellari e risponda in tal modo ad una ben naturale e generale concezione del coordinamento. Ma è da notare che, se le equazioni (2), dedotte dalla sola predetta ipotesi, non permettono di risolvere il problema fondamentale della determinazione degli elementi a_{rs} senza introdurre incerti dati relativi alle distanze stellari, il sistema delle (6), dedotto dalle (2) e insufficiente da solo, può bene esser completato da qualcuna delle equazioni (8) della Nota II, le quali esprimono una condizione che deve essere *necessariamente* verificata perchè il campo vettoriale previsto possa coesistere, in ogni tempo, con un sistema di forze conservative quale quello delle mutue attrazioni newtoniane. Quelle equazioni complementari, che qui è bene richiamare e che vengono a mancare nel solo caso dei moti irrotazionali

$$(a_{22} + a_{33})(a_{32} - a_{23}) + a_{12}a_{31} - a_{13}a_{21} = 0$$
$$(a_{11} + a_{33})(a_{13} - a_{31}) + a_{23}a_{12} - a_{21}a_{32} = 0$$
$$(a_{11} + a_{22})(a_{21} - a_{12}) + a_{31}a_{23} - a_{32}a_{13} = 0,$$

offrono il mezzo per raggiungere in modo assai semplice la risoluzione completa dei nostri problemi.

[4] Alla stessa relazione può pervenirsi più direttamente notando che se si indicano con l, m, n i coseni direttori predetti $(\xi/r, \eta/r, \zeta/r)$, si ha, tenendo conto delle (4), della Nota II,

$$\dot{r}/r = \frac{\xi\dot{\xi} + \eta\dot{\eta} + \zeta\dot{\zeta}}{r^2} = a_{11}l^2 + a_{22}m^2 + a_{33}n^2 + (a_{12} + a_{21})lm + (a_{13} + a_{31})ln + (a_{23} + a_{32})mn.$$

Per meglio precisare i termini della questione si noti che tali equazioni sono algebricamente superflue ai fini della determinazione degli elementi a_{rs} quando non si rifugga dall'includere fra i dati *distanze* stellari. Esse sono inoltre stabilite in base a considerazioni di carattere dinamico, mentre le (2) e quindi le (6) e le equazioni normali che da queste si ottengono traducono fatti geometrici e cinematici e ciò crea una certa eterogeneità fra i due gruppi di equazioni, per cui parrebbe naturale il mantenerli disgiunti, facendo poi intervenire le equazioni qui trascritte in ultimo per controllo finale del complesso delle operazioni, essendo quelle condizioni sicuramente *necessarie*. Ma poiché ai vantaggi puramente formali e algoritmici che la detta seperazione offrirebbe farebbero riscontro, per la inevitabile introduzione di dati malsicuri sulle distanze stellari, inconvenienti ben gravi e sostanziali, cioè rilevanti errori nella determinazione delle incognite a_{rs}, appare chiara la necessità di associare alle predette equazioni normali qualcuna delle tre del gruppo « dinamico ».

Si vede subito che basta avvalersi della prima, ciò che permette di adoperare le due rimanenti ai fini del controllo di cui sopra.

Detta allora w la somma $a_{22} + a_{33}$, il cui valore è deducibile dall'accennata equazione (tutti gli altri elementi essendo già noti, come si è visto) e indicate rispettivamente con u e v le differenze, egualmente note, $a_{22} - a_{11}$ e $a_{33} - a_{11}$, si ha senz'altro

$$2\,a_{11} = w - (u + v) \quad , \quad 2\,a_{22} = w + u - v \quad , \quad 2\,a_{33} = w + v - u .$$

La determinazione delle distanze stellari – nei confini dell'intorno considerato – può, dopo ciò, aver luogo *senza la preliminare conoscenza di una distanza « campione »*, ma solo in base alla relazione qui innanzi indicata in nota. L'osservatore che si accinga a siffatte determinazioni dovrà solo occuparsi di misurare con la precisione massima le velocità radiali e poter fare completo assegnamento sulla esattezza dei dati che assume da operazioni anteriori, cioè sulla precisione con cui risultano ottenuti gli gli elementi fondamentali a_{rs} e quindi sulla perfetta esecuzione di tutto il complesso lavoro di osservazione e di calcolo che il non facile compito richiede.

Ulteriori necessarî sviluppi dei concetti esposti in queste Note sul coordinamento dei moti propri stellari saranno esposti in altra trattazione a parte.

Geodesia. — *Profilo gravimetrico fra il Tirreno e lo Jonio lungo il parallelo 40°.* Nota (*) del Corrisp. G. BOAGA.

L'Istituto di Geodesia e Topografia della Facoltà di Ingegneria della Università di Roma collabora con il « Servizio Geologico d'Italia » nella determinazione delle gravità nell'Italia meridionale, secondo un progetto della « Commissione Geodetica » formulato per addivenire alla costruzione della carta gravimetrica di tutto il Paese entro il 1954, epoca nella quale si svolgerà a Roma l'Assemblea Generale della Unione Geodetica e Geofisica internazionale.

Fra le diverse centinaia di misure finora eseguite sono state estratte una quindicina distribuite lungo la strada statale n. 104 da Sapri a Nova Siri, fra i mari Tirreno e Jonio. Le misure sono state eseguite dal geofisico dott. Gaetano Zaccara con il gravimetro Western n. 49 della Geophysical Company, appartenente al « Servizio Geologico d'Italia », e che già in precedenti lavori aveva dato ottima prova di funzionamento e di stabilità (1). Quale stazione di riferimento si considerò la stazione fondamentale di Roma, e da questa stazione si trasportò la gravità a Capitello, da dove ha inizio la poligonale gravimetrica prelevata, come si disse, da una più larga distribuzione di stazioni, tutte battute due volte secondo le norme fissate dalla C.G.I. Alla fine delle misure di campagna, durate dal 31 luglio al 6 novembre 1952, si riportò il valore gravimetrico da Capitello a Roma, secondo opportuno itinerario, lungo il quale, per controllo, alcune stazioni erano già state collegate alla stazione di riferimento in occasione di precedenti lavori.

I nominativi delle località assieme alle rispettive ubicazioni e indicazioni sommarie circa la natura geologica del terreno circostante le stazioni, si trovano raccolte nella tabella I. In essa si è voluto pure indicare per ogni stazione la *densità media superficiale terrestre* (δ), ricavata, col consueto procedimento ponderale, dalla Carta Geologica di Italia, nonchè le coordinate geografiche (la longitudine riferita al meridiano fondamentale passante per M. Mario Roma) ricavate dalle Carte dell'I.G.M. e le quote per tutte le stazioni dedotte mediante livellazioni geometriche da quelle dei caposaldi altimetrici delle livellazioni dell'Istituto Geografico Militare o di altri Enti, oppure da quelle dei vertici delle reti geodetiche.

Nella tabella II sono riportati i valori g delle *gravità osservate*, quelli g_0 e g_0'' delle *gravità relative al livello del mare* ricavate con le riduzioni di Faye e di Bouguer (questa ultima senza correzione topografica) rappresentate dalle

$$g_0 - g = 0{,}30858 \cdot H^{(m)}$$
$$g_0'' - g_0 = -0{,}0412 \cdot H^{(m)} \cdot \delta$$

(*) Presentata nella seduta del 10 gennaio 1953.

(1) Cfr. G. TRIBALTO, G. ZACCARA, E. BENEO, *Misure gravimetriche nella Valle Latina (Lazio), con deduzioni geologiche*. « Boll. Servizio Geologico d'Italia », vol. LXXIII, 1952.

TABELLA I.

N.	Località	Ubicazione	Natura del terreno	Densità media	Latitudine	Longitudine	Quot (m)
1	Staz. ferr. Capitello	Piazzale esterno, ingresso, al livello del p.f.	Scisti argillosi	2,15	40° 04'39"	3° 06'03"	20.0
2	Idem Sapri	Idem, alla quota 0,15 m. del p.f.	Alluvioni	1,60	04 40	10 29	8.8
3	S. Costantino	C. C. al Km. 9 quota —2.15 m. del c.s. dello I.G.M.	Calcari	2,20	04 06	13 07	349.0
4	Rivello	Al bivio per Trecchina (c.s. I.G.M. casa di Ambrosio)	Idem	2,20	04 47'	18 33	403.0
5	Lago Sirino	C. C. del Serino (c.s. I.G.M.)	Argille scagliose	2,15	05 30	21 51	801.3
6	Lauria	Cappella S. Ferdinando. ingresso alla quota + 0.09 m. dal c.s. I.G.M.	Idem	2,15	02 56	23 29	551.7
7	Fiume Cagliardino	Nella curva (c. s. I.G.M.)	Idem	2,15	05 38	28 20	682.3
8	Latronico	C. s. I. G.M. alla quota —1,05 m. dallo stesso	Idem	2,15	05 15	33 24	838.2
9	Episcopio	Portone casa Salvo alla quota —0,29 m. dal c.s. I.G.M.	Idem	2,15	04 20	38 48	525.6
10	Bivio Teana	Alla quota —1,04 m. da quella del c.s. dello I.G.M.	Idem	2,15	06 52	42 12	742.4
11	Bivio per Francavilla	C. s. n. 66	Sabbie su argille	2,00	07 30	46 42	584.1
12	Idem Senise	C. s. n. 54	Idem	2,00	08 50	50 12	360.1
13	Idem Santore Angelo	C. s. n. 45	Idem	2,00	10 48	53 47	202.1
14	Idem Calobraro	C. s. n. 37	Idem	2,00	10 08	57 37	251.0
15	C. C. Tascisca	Casa Cantoniera di fronte all'ingresso	Agille scagliose	2,15	11 55	4° 03 23	124.3
16	Stazione ferr. Novi Siri	Piazzale esterno alla quota —0.16 m. del c. s. I. G. M.	Alluvioni	1,60	07 50	11 38	6.1

TABELLA II.

N.	Gravità osservata	Gravità ridotte al livello marino		Gravità normale	Anomalie	
	g	g_0	g_0''	γ	$g_0 - \gamma$	$g_0'' - \gamma$
1	980,219.14 gal	980,225.32 gal	980,223.55 gal	980,187.36 gal	+ 37.96 mgal	+ 36.19 mgal
2	215.11	217.84	217.26	187.39	+ 30.45	+ 29.87
3	146,46	254.17	222.55	186.55	+ 67.62	+ 36.00
4	125.94	250.30	213.79	187.56	+ 62.74	+ 26.23
5	037.79	285.07	214.09	188.63	+ 96.44	+ 25.46
6	085.69	256.55	207.50	184.82	+ 71.73	+ 22.68
7	051.39	261.92	201.48	188.83	+ 73.09	+ 12.65
8	015.01	273.68	199.43	188.26	+ 85.42	+ 11.17
9	064.16	226.35	179.79	186.89	+ 39.46	— 7.10
10	979,999.64	228.73	162.97	190.64	+ 38.09	— 27.67
11	980,010.86	191.12	142.99	191.59	— 0.47	— 48.60
12	052.19	166.10	135.68	193.56	— 27.45	— 57.88
13	105.15	167.51	150.86	196.47	— 28.96	— 45.61
14	105.79	183.24	162.56	195.49	— 12.25	— 32.93
15	142.20	180.57	169.56	198.13	— 17.56	— 28.57
16	155.49	157.43	157.01	192.08	— 34.65	— 35.07

i cui risultati sono espressi in *milligal* se le quote (delle stazioni) $H^{(m)}$ vengono espresse in *metri*. Seguono poi i valori della *gravità normale* determinati con la formula internazionale:

$$\gamma = 980{,}049\,(1 + 0{,}52884\ \text{sen}^2\,\varphi - 0{,}0000059\ \text{sen}^2\,2\,\varphi)$$

con φ latitudine della stazione che si considera e quelli delle *anomalie* di Faye e di Bouguer definite dalle:

$$g_0 - \gamma \qquad g_0'' - \gamma\,.$$

Dall'esame di queste ultime anomalie si vede che procedendo da occidente verso oriente, la anomalia di Faye aumenta di valore gradatamente, fino ad un massimo per la stazione n. 5, indi decresce, raggiungendo valore pressochè nullo nella stazione n. 11, dopo di che l'anomalia decresce per un certo tratto e poi tende ad aumentare segnando nettamente un andamento sinussoidale.

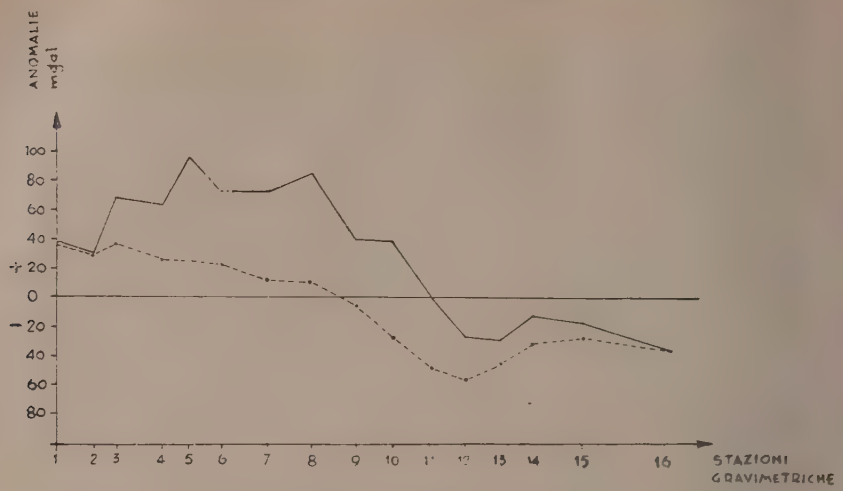


Fig. 1. – Profilo gravimetrico tra il Tirreno e lo Jonio lungo il parallelo 40°.

Questo fatto è meglio messo in luce dall'andamento delle curve delle anomalie di Bouguer; difatti esso indica una costante diminuzione della anomalia stessa fino alla stazione n. 12 raggiungendo il valore nullo fra le stazioni n. 8 e n. 9. Dalla stazione n. 12 l'anomalia di Bouguer aumenta, riproducendo ancora andamento sinussoidale.

I profili individuati dalle due serie di anomalie: di Faye e di Bouguer, sono rappresentati nella figura riportata: dal punto di vista geologico essi mettono in luce lungo il parallelo 40° la presenza di una notevole struttura geologica.

Geologia. — *Analogie geologiche tra la Sardegna e l'Africa Minore.* Nota II (*) del Corrisp. Silvio Vardabasso.

Un'altra importante questione riguarda le metallizzazioni come particolare aspetto del magmatismo o del migmatismo.

Nelle moderne ricerche petrografiche sul massiccio cabilico la questione è stata un po' accantonata. Su quello numidico abbiamo invece un buon studio recente [1], forse anche per il maggiore interesse economico dei giacimenti di questo settore, alcuni conosciuti e valorizzati già per iniziativa dei Romani, i quali – come è noto – hanno lasciato in terra d'Africa, specialmente poi in Algeria, un'ammirabile testimonianza della loro poliedrica civiltà.

In confronto con la Sardegna però il cristallino antico dell'Algeria è meno ricco di giacimenti metalliferi. Nel Gebel Aissa Mimun abbiamo visto una vecchia ricerca abbandonata di blenda con tracce di galena entro strati di

(*) Presentata nella seduta dell'8 novembre 1952.

marmo grigio in parte brecciati intercalati nei micaschisti, altrove qualche indizio di calcopirite, nei gneiss poco a nord di Michelet un paio di filoncelli di magnetite, nella valle del Ksari a nord di Dra-el-Mizam una miniera di barite. Beninteso, questo non è tutto, ma ad ogni modo si tratta sempre di manifestazioni piuttosto modeste.

Nel massiccio numidico invece, a prescindere da scarsi adunamenti di stagno e di cromo, banchi di calcari cristallini intercalati negli schisti sono stati largamente sostituiti da minerali di ferro, in prevalenza magnetite associata ad ematite ed in profondità a pirite. Questo è l'importante e rinomato giacimento di Ain Mokra (Mokta el Hadid) presso Bona, attualmente però in difficoltà di sfruttamento per la presenza della pirite.

Per il resto i giacimenti a solfuri (Zn, Pb, Ag, Sb, Hg, ...) esplorati, coltivati, abbandonati e ripresi con alterne vicende appartengono – o quanto meno sono attribuiti globalmente – al ciclo magmatico terziario (graniti, rioliti, ecc. del settore litoraneo di Collo).

Al riguardo però va rilevato che anche nell'Atlante Telliano, per esempio entro il flysch cretaceo molto disturbato, si conoscono giacimenti a solfuri. Avendolo visitato, ricorderò qui quello blendoso a ganga calcitica di Sakamody, una buona concentrazione filoniana poco lontana dalla strada a sud dell'Arba.

Per questo ed altri giacimenti del genere riesce difficile stabilire la provenienza. Un'interpretazione oggi autorevolmente prospettata li attribuisce ad un fenomeno di mobilitazione « alpina » di sottostanti giacimenti ercinici [13]. Si tratterebbe cioè di giacimenti « idrotermali secondari » dovuti a processi di smistamento e deposito selettivo; in altri termini un fenomeno di rigenerazione, non già di distillazione magmatica da un focolaio terziario.

Anche a prescindere dalla minore estensione degli affioramenti dei massicci cabilico e numidico, la maggior ricchezza di minerali metalliferi nel massiccio ercinico sardo può essere dipesa da una concentrazione favorita dal diverso svolgimento del plutonismo. Il movimento ascendente che ha portato a differenziare morfologicamente dal grande batolito sardo le cupole granitiche minori (ellissoidi dell'Arburese, del Sarrabus, ecc.) può bene avere operato – in certo qual modo – un richiamo, cioè una specie di drenaggio verso l'alto, seguìto da un deposito dei minerali metalliferi sia per riempimento di spaccature entro gli schisti silurici impermeabili attorno alle cupole stesse (tipo Montevecchio) che per sostituzione dei calcari attorno ai nuclei anticlinali delle arenarie cambriche (tipo Monteponi).

E per brevità tralascio di soffermarmi su altre giaciture (contatti fra granito e rocce incassanti, metasomatismi vari nei giacimenti a solfuri misti, ecc.) tutti riferibili al ciclo ercinico, rimandando a qualche trattazione sintetica recente [2].

Voglio però ricordare che al contrario dell'Algeria in Sardegna il vulcanismo terziario, pur così importante, ha dato origine a giacimenti di scarso interesse. Forse ciò è dipeso, oltre che dal diverso stile tettonico, dalla man-

canza di intrusioni granitiche terziarie paragonabili a quelle della Cabilia di Collo; per quanto – a rigore – non si potrebbe escludere la presenza, forse anche a piccola profondità, di un granito recente in qualche zona marginale (Sulcis) dell'antico massiccio sardo proprio di fronte alla costa africana. Penso in particolare alle eruzioni delle commenditi sull'Isola di S. Pietro.

Si ripresenta naturalmente la questione se anche in Sardegna questi piccoli giacimenti terziari non siano un fenomeno di rigenerazione da quelli ercinici; idea del resto non nuova, che potrebbe essere discussa specialmente nei riguardi delle sporadiche manifestazioni di Cu, Zn, Pb, ecc. entro le trachiti oligoceniche e rocce affini del Logudoro e zone attigue.

Valutati i limiti entro i quali crediamo di intravedere qualche analogia geologica di carattere costituzionale fra la Sardegna ed i massicci cristallini litoranei dell'Africa Minore, diamo un rapido sguardo ai rapporti paleogeografici fra queste antiche terre.

Qui si affaccia subito il problema dell'estensione della « Tirrenide », che non è possibile sottoporre ad una critica in queste poche righe.

Entro l'area trapezoidale del Mediterraneo occidentale avente *grosso modo* per vertici a nord gli affioramenti paleozoici della Sardegna e delle Baleari, a sud i punti estremi della costa algerina, si è esercitata la capacità di sintesi dei più qualificati geologi con una serie di combinazioni intese a tracciare collegamenti più o meno verosimili fra le strutture dell'Europa meridionale e dell'Africa mediterranea [7, 8, 12, 14].

Le formazioni paleozoiche tanto lungo le coste sarde e spagnole che in quelle africane sono interrotte per sprofondamento in epoca geologica recente, come lo dimostrano anche i centri vulcanici terziari e quaternari entro le rispettive zone litoranee.

Si aggiunga che la testimonianza di coperture sedimentari marine mesozoiche sugli antichi massicci è scarsa e molto lacunosa. Perciò in un primo tempo si ammetteva una originaria continuità territoriale fra questi massicci al posto del mare attuale. L'interpretazione era convalidata dalla distribuzione del Permico in *facies* continentale (Rotliegend) tanto nella Spagna e nella Sardegna che nell'Africa Minore, esclusa la Tunisia. Ulteriori ricerche però hanno dovuto postulare qui un passaggio [15] al mare già durante il Carbonifero superiore per poter collegare con le aree orientali il Carbonifero marino del Marocco. Più tardi poi anche il collegamento di singole aree a *facies* marina del Trias alpino entro il Mediterraneo occidentale a Trias germanico prevalente (Sardegna, ecc.) richiedeva l'esistenza di un canale fra i nostri massicci ercinici, i quali dovevano così venir ridotti col progressivo affondarsi della geosinclinale, matrice delle catene montuose circummediterranee.

Ma essendo ovvio il raccordo fra il sistema dell'Atlante e quello degli Appennini, sembrava che la geosinclinale coincidesse con l'Africa Minore in modo da lasciare più a nord nel Mediterraneo occidentale spazio sufficiente per una grande Tirrenide.

Mesozoico iberico
zona calcarea subbetica
Baleari
zona metamorfica betica
Massiccio Betico-Algerino
Massicci Cabilico e Numidico
Mitigia
Galita
Massiccio Sardo sbloccato
Nurra
Iglesiente
Sulcis
Cambidano
zona corsa metamorfica
zona calcarea sarda (elvetica)
Appennino
Is. Ponziane
Zona autoctona pugliese
Fossa Bradanica
Massiccio Tirrenico
Ustica
Is. Eolie
zona calcarea palermitana
Egadi
zona caotica p.p. alloctona
Massiccio Calabro
Appennino alpino africano
Sabbie e argille avampaese
Algeri
Bona
Cagliari
Napoli
Orano
Palermo
Tunisi
Pantelleria
Cerrone ercinico
zona autoctona
Linosa
Malta
Fossa Pre-Appennino
Atlante
Altopiani
Grande Flessura Sahariana
BLOCCO AFRICANO
AFRICA MINORE
100 200 300 400 km
Massicci Ercinici
Catena Alpina
Arabia
Sahara
BLOCCO AFRICANO
Rift
km 1000 2000
Equatore
Vulcanismo terziario e quaternario
Colmate depressioni tettoniche
Pieghe Meso-cenozoico (Atlante)
Diapirismo Trias gessoso (Atlante)
Tavolati Mesozoico (Sahara)
Schisti, ecc. Graniti
Massicci ercinici, ecc.
Assi delle pieghe (Atlante)
Fronte d. ricoprimenti tettonici
Zone di frattura sprofondamento e vulcanismo
PROFILI GEOLOGICI della SARDEGNA e dell'AFRICA MINORE
GALLURA BARBAGIA SARRABUS
LOGUDORO IGLESIENTE SULCIS CAMPIDANO
MASSICCIO ERCINICO SARDO
GRANDE CABILIA
Giurgiura
Tellliano
Atlante
Saharlano
Flessura Saharlana
Deserto del Sahara
Daya
Hamada
MITIGIA
Altopiani
Geosinclinale Mediterranea
MASSICCIO ALGERINO
Canale orogenetico principale
Geosinclinali intracratoniche Parageosinclinali
BLOCCO AFRICANO
Km 50 100 150 200 250
N
S

Fig. 1.

D'altra parte la convenienza di raccordare il Pennidico, ecc., delle Betiche nella Penisola Iberica (Sierra Nevada) all'analoga zona delle Alpi attraverso la Corsica orientale ha suggerito l'idea di far passare l'asse della zona abissale della geosinclinale a sud della Sardegna, escludendo con ciò implicitamente la continuità territoriale tra i massicci sardo ed algerino durante il Mesozoico.

Questa interpretazione – sia pure con varianti – è oggi quasi generalmente accettata, per quanto andrebbe riveduta da nuovi punti di vista [7]. Sta il fatto che nell'Atlante le *facies* mesozoiche non sono di mare profondo, ad eccezione forse del Giurese, prevalendo per il resto alternanze di sedimenti clastici da arenaceo-conglomeratici ad argilloso-marnosi con dolomie e calcari subordinati, come risulta dalle accurate ricerche stratigrafiche di una numerosa schiera di valenti geologi francesi (5) [5, 6, 10].

È accertato cioè che nell'Atlante le condizioni di sedimentazione hanno dato luogo a rapide variazioni di *facies* e di potenze, spiegabili con l'accumulo entro depressioni geosinclinali intracratoniche (« parageosinclinali » di Stille) intervallate da rilievi anticlinali (« bourrelets geoanticlinaux » di Glangeaud) cioè da dorsali grossolanamente parallele, qua e là talvolta appena emergenti dal mare, sopra la platea continentale fra la zona assiale della geosinclinale principale ed una presunta flessura profonda del rigido blocco africano. In altri termini l'asse principale del grande Mediterraneo mesozoico doveva passare a nord dell'Africa Minore nei 200 Km. in media di mare, ridotti a circa 150, fra il Capo Teulada in Sardegna ed il piccolo arcipelago della Galita al largo della costa tunisina.

Le formazioni mesozoiche depositatesi sui bordi degli opposti massicci sardo ed algerino in questo spazio di mare, che allora – accettata l'esistenza della depressione geosinclinale – sarà stato alquanto più ampio, non si presentano però in *facies* analoghe. È evidente infatti il contrasto fra le piccole zolle calcaree del Sulcis (Giurese fossilifero di M. Sarri e Cretaceo ippuritico dell'Isola di S. Antioco) ed il flysch cretaceo discordante sul versante marino del massiccio della Grande Cabilia.

E la *facies* di flysch lungo questa fascia costiera africana continua, sia pure con discordanze, anche attraverso il paleogene, mentre nella Sardegna meridionale l'Eocene discordante sul Mesozoico e sul Paleozoico ha ben altro sviluppo sia nel bacino lignitifero di Carbonia che nel Gerrei e nel Salto di Quirra (6).

(5) Nel Trias in particolare, fatta eccezione per il tratto più prossimo ai massicci ercinici (catene calcaree a scaglie tipo Giurgiura) si sono formati importanti depositi gessoso salini, successivamente iniettati per la loro plasticità (diapiri) nelle serie sovrastanti oppure funzionanti da lubrificante tettonico, che ha favorito gli scorrimenti e ricoprimenti così caratteristici nella struttura dell'Atlante Telliano e ben diversi dal meccanismo delle ultrapieghe alpine. Nell'Atlante Sahariano invece le deformazioni per pieghe con accavallamenti e stiramenti ricordano un po' alla lontana la struttura del Giura svizzero.

(6) Più che in Sardegna, come è ovvio, analogie del genere vanno ricercate nella Sicilia orientale ed in Calabria, dove l'infrastruttura cristallina (Peloritani, massiccio della Sila, ecc.) e le sue coperture sono da considerarsi in continuazione della zona costiera algerina, con la quale infatti vengono incorporate. Il cosidetto « promontorio africano » risultante da questa fusione si spingerebbe, secondo una ardita visione che va per la maggiore, fino nell'infrastruttura dell'Adriatico, appena velata dal Mesozoico delle Puglie e del Gargano.

Da ultimo, e forse si sarebbe dovuto incominciare da qui trattandosi di somiglianze formali riconoscibili a prima vista, accenno a talune analogie morfologiche tra i massicci cristallini della Sardegna e dell'Algeria, soprattutto nei loro rapporti con le formazioni terziarie. L'identità è quasi perfetta. Così ad esempio, il piccolo rilievo del Gebel Aissa Mimum, che sorge isolato dai sedimenti clastici burdigaliani del bacino del Sebau, fa pensare alle « isole fossili » della Trexenta [7]. Ed in generale i rapporti stratigrafici e morfologici fra il massiccio, peneplanato, inciso da profonde valli e sbandato ad ovest, della Grande Cabilia da una parte con le depressioni mio–plioceniche dall'altra, sono paragonabili a quelli fra il Sarrabus ed il Campidano di Cagliari, anche se i contatti in Algeria sono spesso fagliati e seguìti da un sollevamento molto recente per impulso dell'assestamento isostatico dell'Atlante.

Un'apparente somiglianza può essere riconosciuta poi fra le pianure del Campidano e della Mitigia, per quanto le due depressioni tettoniche sieno avvenute in modo diverso: tra due frammenti cristallini con i bordi marcati da uno spiccato vulcanismo la prima, tra un antico frammento cristallino (Buzarea) da una parte ed una catena montuosa recente (Atlante Telliano) dall'altra la seconda; nella quale il vulcanismo è molto meno accentuato, nonostante la sua colmata di maggiore potenza.

Naturalmente, alla magnifica riviera algerina, tutta a piccole insenature piene di vita, si può paragonare dal lato genetico e geo-morfologico (alternanza di Quaternario marino e continentale, terrazzamenti, ecc.) la frastagliata costa di sommersione, purtroppo ancora pressoché disabitata, della Sardegna meridionale.

Nel chiudere questa rapida rassegna delle caratteristiche strutturali e delle vicende geologiche degli antichi massicci, che si affacciano sulle opposte sponde del Mediterraneo occidentale, parmi di poter sottolineare – nonostante le questioni prospettate alla ricerca di una spiegazione plausibile delle molteplici diversità – una somiglianza intrinseca, di fondo, che forse un esperto paletnologo saprà estendere anche ai rispettivi sostrati etnici delle due regioni.

Nota bibliografica

Gli argomenti sfiorati richiederebbero una serie di richiami bibliografici troppo lunga. Per brevità sono costretto a limitarmi soltanto a qualcuna delle ultime pubblicazioni, per lo più comprese nella pregevole collana di monografie regionali, distribuita in occasione del Congresso Geologico Internazionale di Algeri. Ho aggiunto solo qualche altra precedente opera d'insieme, particolarmente corredata di una esauriente letteratura.

[1] Bolfa J., *Contribution a l'étude des gites métallifères de la Kabylie de Collo et de la Région de Bône*. « Bull. Serv. Geol. Algerie », VI, 1 (1948).

[2] Cavinato A., *Depositi minerari* (per i giacimenti della Sardegna). Torino 1952.

[3] Desio A., *Uebersicht über die Geologie Libiens*. « Geol. Rund. », 33 (1942).

[4] Flandrin J., *La chaine du Djurdjura*. « Monogr. Région. Algerie », I, 19. XIX Congress. Géol. Int., Alger 1952.

(7) La piccola placca oligocenica sul cristallino del Gebel può servire a datare meglio questo isolamento avvenuto solo per l'invasione marina miocenica.

[5] Flandrin J., *Les chaînes atlasiques et la bordure Nord du Sahara.* Ibid., I, 14, Alger 1952.
[6] Glangeaud L., *Histoire géologique de la Province d'Alger.* Ibid., I, 25, Alger 1952. (Collaboratori: Aymè A., Caire A., Mattauer M., Muraour P.).
[7] Glangeaud L., *Interprétation tectonophysique des caractères structuraux et paléogeographiques de la Méditerranée occidentale.* « Bull. Soc. Géol. Fr. », Paris 1951.
[8] Kober L., *Das Alpine Europa.* Berlin 1931.
[9] Krenkel E., *Durch die Alten Massen Algeriens,* « Geol. Rund. », 33 (1942).
[10] Soc. Nat. « Repal », *Régions sud-teliennes et Atlas Saharien.* (Soc. Nation. Rech. Exploit Pétrol. Alg.: numerosi collaboratori) « Monogr. Région. (Algerie) », I, 20, XIX Congr. Géol. Int., Alger 1952.
[11] Royer L., *Les terrains cristallophylliens des massifs d'Alger et de la Grande Kabylie* « Bull. Serv. Géol. Algerie », V, 2, Alger 1937.
[12] Russo P., *Contribution a l'étude tectonique de la Méditerranée occidentale.* « Bull. Soc. Géol. Fr. », Paris 1947.
[13] Schneiderhöhn H., *Genetische Lagerstättengliederung auf geotektonischer Grundlage.* « N. Jb. f. Min. », Stuttgart 1952.
[14] Von Seidlitz W., *Diskordanz und Orogenese der Gebirge am Mittelmeer.* Berlin 1931.
[15] Stille H., *Das mitteleuropäische variszische Grundgebirge im Bilde des gesamteuropäischen.* « Beih. Geol. Jb. », 2, Hannover 1951.
[16] Thiebaut J., *Étude géologique des terrains métamorphiques de la Grande Kabylie.* « Bull. Serv. Géol. Algerie », V, 6, Alger 1951.
[17] Thiebaut J., *Socle métamorphique en Grande Kabylie.* « Monogr. Région. (Algerie) », I, 4, XIX Congr. Géol. Int., Alger 1952.
[18] Vardabasso S., *Tentativo di sintesi grafica della geologia della Sardegna.* « Rend. Acc. Lincei », VIII, 9, Roma 1951.
[19] Vardabasso S., *Guida alle escursioni in Sardegna* (2 voll.), 56° Congr. Soc. Geol. It., Cagliari 1952.

Nel disegno della tavola allegata, oltre ai grafici degli autori citati sono state utilizzate: per l'Appennino e la Sicilia la sintesi di R. Fabiani e A. Segre (1951) e quella di R. Staub (1951); per le Baleari la sintesi di J. S. Hollister (1934).

I profili dell'Atlante e del Sahara sono stati costruiti tenendo conto specialmente dei sondaggi della « Repal » (1952).

Genetica. — *Nuove indagini sul problema della microcitemia.* Nota di Giuseppe Montalenti, Ezio Silvestroni e Ida Bianco, presentata(*) dal Corrisp. G. Montalenti.

In vari precedenti lavori (1) si è data notizia delle ricerche eseguite sulla microcitemia. È questa un'anomalia ereditaria individuata, in soggetti sani, da Silvestroni e Bianco, e caratterizzata da un complesso di caratteri ematologici (microcitosi vera, lieve iperglobulia, ipocromia, resistenza globulare aumentata). Silvestroni e Bianco, con estesissime ricerche statistiche, hanno recato la conferma all'ipotesi, già emessa da precedenti autori, che la

(*) Nella seduta del 10 gennaio 1953.

(1) Per la bibliografia cfr. I. Bianco, G. Montalenti, E. Silvestroni, M. Siniscalco, « Annals of Eugenics », *16* 1951), p. 299; E. Silvestroni, « 50° Congr. della Società di Med. interna, Roma », *3*, p. 108 (1949).

microcitemia sia un carattere monomendeliano, controllato cioè da una sola coppia genica. Il genotipo *mm*, secondo la notazione da noi usata, corrisponde agli individui normali. Gli eterozigoti *Mm* presentano l'anomalia microcitemica che è rilevabile all'esame del sangue: sono individui generalmente sani e solo raramente affetti da una leggera forma di anemia (anemia microcitica costituzionale). Gli omozigoti *MM* sono invece affetti dal morbo di Cooley, che reca a morte nei primi mesi di vita.

Era noto che questa anomalia è particolarmente diffusa nelle regioni circummediterranee, tanto che gli autori americani, che l'hanno studiata prevalentemente in individui di origine siciliana, l'hanno chiamata *Thalassemia*. Silvestroni e Bianco nel corso delle loro estesissime indagini, hanno rilevato che la percentuale dei microcitemici è molto differente in diverse regioni italiane. È piuttosto elevata (5–6 %) nell'Italia meridionale, in Sicilia e in Sardegna, bassa (1–2 %) sul resto della penisola, ad eccezione di una zona, il Ferrarese, in cui è elevatissima (dal 10 al 20 %).

Questa singolare distribuzione del gene *M* apre molti interessanti problemi, in particolare i seguenti: donde e in quale epoca storica il gene sia pervenuto nelle popolazioni italiane [2], e per quale meccanismo compensatore un gene di cui una frazione notevole viene eliminata ad ogni generazione (attraverso gli omozigoti *MM*, che muoiono) possa trovarsi in così alta frequenza in talune popolazioni.

Quest'ultimo quesito, già posto da Neel e Valentine [3], è stato da noi sottoposto ad analisi [1]. Le ipotesi che si possono formulare sono le seguenti: *a*) la frequenza genica è in decremento, quella che noi troviamo attualmente è molto più bassa di quella originaria; *b*) la frequenza genica si mantiene più o meno costante nelle successive generazioni, perchè l'eliminazione del gene può essere contrastata da uno dei seguenti fattori: 1° selezione matrimoniale; 2° valore selettivo positivo del gene in condizione eterozigote; 3° alta mutabilità dall'allelo *m* all'allelo *M*.

L'ipotesi *a*) è indimostrabile e ci sembra poco probabile, almeno come sola causa dell'equilibrio. Un semplice calcolo ci dice che se la frequenza è andata regolarmente declinando, la frequenza dei microcitemici di una popolazione che oggi ne conta il 18 % doveva essere del 66 % solo otto generazioni addietro. Il che sembra assurdo.

Le possibilità 1° e 2° dell'ipotesi *b*) sono suscettibili di essere sottoposte a verifica. E questo abbiamo fatto con dati che sono stati raccolti in varie campagne di ricerche eseguite da due di noi (E. Silvestroni ed I. Bianco) durante gli ultimi anni.

Intendiamo riferire in questa Nota i risultati dell'ultima campagna (estate 1952), sommandoli con quelli delle campagne precedenti.

(2) Cfr. E. Silvestroni, I. Bianco, N. Alfieri, « Medicina » (Parma), p. 187 (1952).

(3) J. V. Neel and W. N. Valentine, « Genetics », *32*, p. 38 (1947).

Segregazione mendeliana. – I dati statistici finora raccolti, come abbiamo detto, sono in buon accordo con l'ipotesi monomerica.

Nelle campagne del 1951 e 1952 abbiamo ancora raccolto dati relativi alle famiglie in cui tutti e due genitori sono eterozigoti, scoperte attraverso l'esame di un genitore. Nella tabella I sono indicati il numero dei figli viventi, che appartengono ai due genotipi *mm* e *Mm*, e il numero dei figli morti per morbo di Cooley (sicuramente diagnosticato). Questi ultimi (genotipo *MM*) dovrebbero essere 1/4 del totale dei figli esaminati, e si vede che la frequenza osservata è molto prossima a quella teorica. Questi dati, pertanto, vengono ad ulteriore conferma dell'ipotesi monomerica.

Tabella I.

Frequenza dei casi di morbo di Cooley nella figliolanza dei matrimoni di tipo Mm × Mm.

(Somma dei dati del 1951 e del 1952). Fra parentesi le frequente teoriche.

N. famiglie esaminate	N. figli viventi	N. figli morti per morbo di Cooley	Figli deceduti precedentemente	Totale dei figli
155	369 (372)	127 (124)	90	586

$\chi^2 = 0{,}9677$; $n = 1$; $P > 0.3$.

Cause dell'equilibrio genico. – L'ipotesi N. 1 che i matrimoni tra eterozigoti e omozigoti normali non avvengano a caso è stata esaminata paragonando le frequenze osservate dei tre tipi di matrimoni con le rispettive frequenze teoriche. Queste sono state calcolate, separatamente per ogni località, in base allo sviluppo del binomio $(a + b)^2$, dove a è la frequenza dei microcitemici nella popolazione esaminata, costituita dall'insieme delle coppie di coniugi; $b = 1 - a$ è la frequenza degli omozigoti normali.

La tabella II riporta i dati ultimamente raccolti insieme con quelli precedentemente pubblicati. Si vede dall'ispezione della tabella e del relativo χ^2, che l'ipotesi di una selezione matrimoniale non è confermata. Infatti nessun valore di χ^2 corrisponde ad una probabilità inferiore a 0,05 e la probabilità per il χ^2 di tutta la tabella è di circa 0,40. I matrimoni avvengono a caso, per quanto riguarda il carattere microcitemia, in tutte le popolazioni esaminate.

Tabella II.

Frequenza dei tre tipi di matrimoni in 7222 famiglie di diverse località del Ferrarese (dati raccolti negli anni 1948, 1951, 1952).

Località	N. delle famiglie esaminate	Frequenze dei microcitemici	Frequenze dei tre tipi di matrimonio (in parentesi le frequenze teoriche)			χ^2	P
			mm × *mm*	*mm* × *Mm*	*Mm* × *Mm*		
Ostellato (1948)	199	15.07	145 (143.523)	48 (50.955)	66 (4.522)	0.6560	> 0.3
Portomaggiore (1948) .	590	11.78	459 (459.180)	123 (122.629)	8 (8.189)	0.0055	> 0.95
S. Giovanni (1948). . .	104	5.77	92 (92.345)	12 (11.310)	0 (0.346)		
Rovereto (1948)	191	10.90	151 (151.310)	38 (37.380)	2 (2.310)	0.0470	> 0.7
Gambulaga (1948) . . .	374	7.22	323 (321.950)	48 (50.101)	3 (1.949)		
Codigoro (1951)	1791	15.41	1.286 (1281.540)	458 (466.930)	47 (42.530)	0.6521	> 0.3
Mezzogoro (1951) . . .	779	14.50	571 (569.388)	190 (193.220)	18 (16.392)	0.2160	> 0.7
Caprile (1951)	609	16.75	425 (422.071)	164 (169.843)	20 (17.086)	0.9012	> 0.3
Pomposa (1951)	249	18.67	167 (164.683)	71 (75.633)	11 (8.684)	1.2209	> 0.2
Serravalle (1952) . . .	254	18.50	168 (175.275)	78 (71.445)	8 (7.280)	0.9745	> 0.3
Porto Tolle (1952) . .	158	18.67	102 (104.510)	53 (47.982)	3 (5.508)	*	
Berra (1952)	328	19.05	213 (214.617)	105 (101.405)	10 (11.978)	0.4662	> 0.5
Mesola (1952)	488	19.16	313 (318.913)	163 (151.172)	12 (17.915)	2.9879	~ 0.05
Bosco Mesola (1952) . .	144	20.14	90 (91.838)	50 (46.322)	4 (5.840)	* 2.5641	> 0.1
Lagosanto (1952) . . .	964	19.60	616 (623.053)	318 (303.892)	30 (37.055)	2.0780	> 0.1
Totali	7.222	15.80	5.121 (5.134,196)	1.919 (1.900,219)	182 (187.584)	12.7784	> 0.3

N. B. – Il numero dei gradi di libertà è $n = 1$ per ciascuna località; in totale $n = 12$, perchè i dati relativi a Porto-Maggiore, S. Giovanni e Rovereto, e, rispettivamente Porto Tolle e Bosco Mesola sono stati sommati perchè vi erano frequenze di valore inferiore a 5.

Le frequenze teoriche sono state calcolate in base alla frequenza di microcitemici nella popolazione costituita dalle coppie di coniugi esaminate. Nei dati precedentemente pubblicati (del 1948 e del 1951) si era invece presa come base la frequenza dei microcitemici in tutta la popolazione delle rispettive località, compresi gli individui isolati. Ciò spiega la lieve divergenza fra le frequenze teoriche qui riportate e quelle precedentemente pubblicate. La quale non modifica il risultato dell'analisi statistica, cioè la conclusione che non vi è selezione matrimoniale.

L'ipotesi N. 2 deve tradursi in una maggiore prolificità dei matrimoni in cui uno o entrambi i coniugi sono eterozigoti. I dati raccolti in un primo tempo sembravano render probabile questa ipotesi [4]. La sua validità è invece resa molto dubbia dai dati recentemente raccolti. I quali, per evitare incertezze ed errori, sono stati vagliati (diversamente da quelli pubblicati nel lavoro citato) in modo da tener conto soltanto delle famiglie in cui la madre avesse raggiunto o superato i 40 anni di età. In questo modo si tiene conto soltanto delle famiglie in cui il ciclo riproduttivo è praticamente finito. I dati presentati nella tabella III dimostrano che non si può parlare di fecondità differenziale, perchè il numero medio dei figli nati per famiglia non presenta differenze significative per i tre tipi di matrimoni. Pertanto le indagini finora condotte lasciano aperto il problema, scartando alcune delle più ovvie soluzioni.

Tabella III.

Prolificità dei diversi tipi di matrimoni.

(Famiglie in cui la madre ha 40 o più anni di età).
(Dati del 1951 e del 1952).

	Tipo di matrimonio		
	$mm \times mm$	$mm \times Mm$	$Mm \times Mm$
N. famiglie	1886	793	79
N. figli nati (esclusi gli aborti)	9217	3978	394
N. medio dei figli nati per famiglia, con relativo errore medio.	4.8871 $\pm$ 0.1382	5.0164 $\pm$ 0.2175	4.9870 $\pm$ 0.7491
N. medio dei figli viventi per famiglia.	3.6458	3.6621	2.9490
N. medio dei figli deceduti per famiglia.	1.2413	1.3543	2.0380
N. medio degli aborti per famiglia.	0.6177	0.6595	0.7089

$4.887 - 5.016 = -0.129 \pm 0.257$
$5.016 - 4.987 = 0.029 \pm 0.789$
$4.987 - 4.887 = 0.100 \pm 0.761$

Nessuna delle tre differenze è significativa.

(4) I. Bianco, G. Montalenti, E. Silvestroni, M. Siniscalco, «Annals of Eugenics», *16*, p. 309 (1951).

La terza possibilità sopra considerata, alta frequenza di mutazione da m a M, non sembra molto plausibile. Infatti la frequenza di eliminazione del gene da una popolazione con una frequenza di microcitemia del 10 % sarebbe del 0.25 % per generazione; in una popolazione con frequenza iniziale di microcitemici del 20 % sarebbe dell'1 %. Ora per compensare una simile perdita occorrerebbe che la frequenza di mutazione dal gene normale al microcitemico fosse nel primo caso di 2.5×10^{-3}, nel secondo caso di 1×10^{-2}, per gene per generazione. Queste frequenze sembrano enormemente elevate rispetto alle stime che finora si hanno delle frequenze di mutazione di alcuni geni umani [5]. Tale altissima mutabilità di un gene dovrebbe poi essere limitata ad alcune popolazioni, mentre nelle popolazioni limitrofe la mutabilità avrebbe valori molto più bassi. Ciò aprirebbe nuovi difficili problemi.

Rimane la possibilità che parecchi fattori contribuiscano a determinare il fenomeno del mantenimento dell'alta frequenza genica nelle popolazioni in esame, e precisamente potrebbe esservi: lieve diminuzione della concentrazione nelle generazioni che si succedono; azione compensatoria dei fattori esaminati, tanto lieve da non rivelarsi attraverso il numero relativamente limitato delle osservazioni eseguite; mutabilità leggermente più elevata.

I risultati delle presenti indagini e le ipotesi che ora si possono formulare indicano la via per ulteriori ricerche, che speriamo di potere eseguire.

Fisiologia. — *La funzione essenziale del liquido cerebro-spinale.* Nota (*) del Corrisp. Rodolfo Margaria.

Comunemente dai trattatisti la funzione del liquido cerebro spinale consisterebbe in:

a) un'azione di cuscinetto liquido (fluid buffer) per gli organi contenuti nella cavità cefalorachidiana;

b) riserva di liquido per la regolazione del volume delle strutture contenute nella cavità cefalorachidiana;

c) un'azione nutritiva simile a quella esercitata dal liquido interstiziale dei tessuti.

Se non che nessuna di queste funzioni mi pare soddisfacente in quanto:

a) agisce come cuscinetto liquido un recipiente a pareti elastiche, come ad esempio una vescica di gomma ripiena di liquido, la cui parete, essendo flaccida, si adatta sulla parete degli oggetti che vengono posti sul cuscino; si ottiene allora una distribuzione della pressione *a* uniforme e *b* su un'ampia superficie, sì da proteggere sia la struttura degli oggetti che vengono posti sul cuscino, come di quelli che possono eventualmente trovarsi nell'interno di esso.

(5) J. B. S. Haldane, « Proc. Roy. Soc., B », *135*, p. 147 (1948).

(*) Presentata nella seduta del 14 febbraio 1953.

Essendo invece ossee, e cioè rigide, le pareti della cavità cefalorachidiana ed essendo i liquidi incompressibili, non si comprende come tale azione di « cuscinetto » si possa svolgere. Ed infatti ogni variazione brusca di volume della cavità cranica, come ad esempio quella dovuta a trauma violento apportato sulla testa o ad ingresso di un proiettile d'arma da fuoco, ecc., anzichè essere smorzata, conduce ad una elevatissima variazione di pressione che viene istantaneamente trasmessa a tutte le strutture contenute nella cavità cefalorachidiana, come vedremo appresso; e questa può avere conseguenze disastrose appunto per la mancanza di potere smorzante, implicito nel concetto di « cuscinetto », e per la rigidità del sistema considerato complessivamente;

b) il costituire una riserva di liquido per le variazioni del volume dei tessuti nervosi o del sangue che li irrora non mi pare possa essere considerato una funzione vera e propria: ed infatti la stessa funzione avrebbe una raccolta di aria, anzichè di liquido, nello spazio subaracnoideo e nei ventricoli.

Piuttosto la presenza del liquido cerebrospinale è una conseguenza del fatto che il volume degli organi contenuti nella cavità cefalorachidiana è minore della cavità stessa.

D'altra parte la stessa funzione può essere attribuita, sotto questo punto di vista, al liquido interstiziale del cervello;

c) la funzione nutritizia che il liquor può avere è poi del tutto trascurabile di fronte a quella del sangue, e ciò appare evidente considerando che, il volume del liquor non è che circa 110 ml (Gardner 1950), distribuito su una superficie relativamente piccola, che il liquor non viene a contatto diretto con il tessuto nervoso, essendone separato dalla pia madre, una membrana relativamente spessa, resistente e compatta, attraverso la quale non è concepibile che materiali possano diffondere con velocità utile, rispetto all'attivo metabolismo delle cellule del tessuto nervoso.

Non mi risulta invece sia mai stata richiamata l'attenzione su una funzione molto più importante del liquor, che si può riassumere nel concetto che il liquor riduce enormemente la *massa effettiva* del cervello, e perciò questo è molto meno soggetto a subire l'azione di forze meccaniche, quali quella di gravità o altre di qualsiasi genere.

Ed infatti la forza F che agisce su un corpo di massa M, densità δ e volume V, essendo a l'accelerazione è

$$F = Ma = \delta V a \tag{1}$$

se il corpo stesso è immerso in un liquido di densità δ_1, sarà:

$$F_1 = (\delta - \delta_1) V a. \tag{2}$$

Se $a = g$, l'accelerazione di gravità, il peso del corpo non immerso o immerso sarà F o rispettivamente F_1.

Dalla (1) e (2) abbiamo:

$$F_1 = \frac{\delta - \delta_1}{\delta} = F \tag{3}$$

la riduzione della forza alla quale il corpo è soggetto, per effetto dell'immersione, è dunque rappresentata dal coefficiente $\delta - \delta_l/\delta$; il valore di questo coefficiente non cambia se ai valori di densità si sostituiscono i corrispondenti valori di peso specifico.

Non mi è stato possibile trovare nella letteratura dati attendibili sul peso specifico del cervello: ma si può valutare in via approssimativa a 1.048, sulla base della sua composizione chimica, tenendo conto sopra tutto del suo elevato contenuto in lipidi.

Ponendo uguale a 1.008 il peso specifico del liquor, il coefficiente della (3) è circa 1/26. La presenza del liquor riduce quindi a 1/26 il peso effettivo del cervello estratto dall'organismo.

Se il cervello estratto dall'organismo pesa 1300 grammi (Chiarugi 1921), esso «in vivo» graverà sulla base del cranio per soli 50 grammi circa: e questo è straordinariamente importante, data la particolare fragile consistenza del tessuto cerebrale, la irregolarità della base del cranio, le delicate strutture vascolari e nervose che qui si trovano, e la necessità che particolarmente le strutture vascolari non vengano compresse.

Della stessa entità è ridotta qualsiasi altra forza che agisce sul cervello, quale ogni forma di accelerazione, lineare, o angolare, o centrifuga.

Le strutture vascolari e nervose, queste ultime particolarmente rappresentate dall'uscita dei nervi cranici, vengono sottoposte a stiramento ad ogni movimento brusco del capo, che implichi una notevole accelerazione positiva o negativa: sono specialmente gli urti ai quali il capo può essere soggetto che implicano un elevato valore di accelerazione.

Si può considerare che il valore massimo di accelerazione che si raggiunge negli urti del capo contro un oggetto qualsiasi, senza che si giunga alla frattura del cranio, sia dell'ordine di grandezza di 20 g. In tali condizioni la massa dell'encefalo viene sottoposta ad una forza di $1300 \times 20 \times 1/26 = 1000$ grammi, tuttavia inferiore cioè al suo peso, mentre se il liquido cerebrospinale fosse sostituito da aria, la forza alla quale l'encefalo verrebbe sottoposto sarebbe di $1300 \times 20 = 26.000$ grammi, certamente sufficiente, data la sua fragile consistenza, a distruggere l'organizzazione del tessuto.

Persino nei rapidi movimenti lineari o di rotazione del capo si produrrebbero, come è facile calcolare, trazioni di parecchi chilogrammi sulle strutture con le quali il cervello è collegato, quali i nervi cranici ed i vasi dell'encefalo, e urti, che non potrebbero essere senza effetto, delle strutture molli della base dell'encefalo contro le irregolarità ossee della base del cranio. Anche l'entità di queste forze è ridotta ad 1/26 come per il peso, e diventano tali da non essere lesive per il tessuto cerebrale.

Nell'accelerazione centrifuga, quale si può manifestare nei voli in aeroplano, il massimo valore tollerabile, per un tempo molto breve, inferiore a 0.1 sec., è di 20 g: è questo un valore limite al quale si ha la frattura delle vertebre del tratto toraco lombare, che non sono più capaci di sostenere il peso della parte superiore del corpo (ved. Gagge e Shaw 1950). Ma a questi valori di g non è stato riscontrato sperimentalmente negli ani-

mali alcuna alterazione anatomopatologica dell'encefalo, malgrado che alterazioni traumatiche notevoli si possano mettere in evidenza a carico di altri organi viscerali, strutturalmente molto più robusti dell'encefalo.

Nell'uomo, in seguito a sollecitazioni corrispondenti a 5–6 *g* per qualche secondo, quali si verificano durante una picchiata in aereoplano o nel lancio con paracadute, non si hanno sintomi attribuibili a lesione meccanica (contusione) dell'encefalo, mentre si possono manifestare alterazioni imputabili alla lesione meccanica di altri organi quali i reni, il fegato ecc., sotto forma di albuminuria, ittero, dolori addominali ed altri. Le alterazioni funzionali che si possono avere a carico dell'encefalo sono soltanto di ordine circolatorio, e dovute al fatto che il sangue, per l'aumento del suo peso specifico, corrispondente all'aumento di *g*, non può più venire spinto dal cuore al cervello, e la circolazione cerebrale si arresta o è insufficiente ai bisogni.

Se l'accelerazione o l'urto, anzichè avere luogo nella direzione testa–piedi, come è più frequente, avviene in direzione trasversale, valori molto più elevati di *g* possono essere tollerati, fino a 100, per alcuni millesimi di secondo, secondo De Haven (1942): in tale evenienza la forza che agisce sul cervello, sospeso nel liquido cefalorachidiano sarà di $100 \times 1300 \times 1/26 = 5000$ grammi, mentre sarebbe di 1,30 quintali in assenza di liquor!

Malgrado il forte abbassamento della massa effettiva del cervello dovuto al fatto che esso è sospeso al liquido cerebrospinale, è tuttavia possibile che negli urti particolarmente violenti, anche senza lesione del cranio, l'accelerazione imposta al cervello sia di entità tale da alterarlo strutturalmente.

È forse questo il meccanismo patogenetico della « concussione » ben nota in medicina legale, o almeno uno dei fattori che contribuiscono a determinarla.

Supponiamo ad esempio che la testa, del peso di 2 kg venga urtata da un sacchetto di sabbia del peso di 2 kg che si muove alla velocità di 30 m/sec: poiché l'urto del sacchetto di sabbia è distribuito su una larga superficie della scatola cranica, non si avrà frattura del cranio.

L'energia dell'urto, esprimendo la massa in grammi, la distanza percorsa in cm, e il tempo in sec, sarà espressa da:

$$1/2 \times 2000 \times (3000)^2 = 9 \times 10^9 \text{ gcm} \equiv 90.000 \text{ kgm}.$$

Poiché la massa della testa è uguale a quella del corpo che la urta, l'energia verrà ad essere ripartita in parti uguali fra la testa ed il corpo urtante. La testa acquisterà cioè un'energia di 4.5×10^9 gcm ed una velocità v, che è facilmente calcolabile dalla

$$1/2\, Mv^2 = 4.5 \times 10^9, \text{ da cui: } v = 2120 \text{ cm/sec}.$$

Supponendo che siano occorsi 6 cm di percorso, e cioè 0.002 sec, al corpo urtante per adattare la sua superficie a quella della testa, e cedere a questa parte della sua energia, l'accelerazione media alla quale la testa sarà

stata sottoposta può essere calcolata in 2120/0.002 = 1060.000 cm/sec², corrispondente a circa 1080 *g*.

Moltiplicando questo valore per il peso effettivo del cervello, 50 grammi, si ottiene il valore di 54 kg, che rappresenta la forza effettiva che ha agito sull'encefalo. Non è da meravigliare se l'encefalo non può sopportare una forza di 54 kg, senza alterarsi strutturalmente in maniera profonda.

Se questo è probabilmente il meccanismo più importante nel determinare la concussione cerebrale, altri meccanismi possono entrare in gioco, quali ad esempio le vibrazioni della parete cranica in conseguenza dell'urto: queste vibrazioni vengono trasmesse al cervello integralmente, non smorzate, proprio per la presenza del liquido interstiziale, che separa le pareti ossee del cranio dal tessuto cerebrale. Esse si manifestano come oscillazioni di pressione che possono essere di ampiezza molto notevole, e che si trasmettono a onda: per effetto della riflessione di queste onde si possono originare « nodi » e « ventri » di vibrazione nei quali la pressione può raggiungere valori difficilmente prevedibili, date le irregolarità di struttura e di forma del cranio, ma certamente molto elevati.

Sotto quest'ultimo punto di vista la presenza del liquor è di svantaggio, e più opportuno sarebbe la presenza tra il cervello e le pareti del cranio, di un gas che, per il suo carattere di compressibilità e di elasticità, potrebbe effettivamente agire come smorzatore.

L'incompressibilità del liquido cefalorachidiano ha un altro svantaggio, che si manifesta appunto nella mancanza di un'azione di smorzamento quando un oggetto, ad esempio un proiettile d'arma da fuoco, entri nella cavità cranica perforandone la parete a perfetta tenuta, come effettivamente si verifica quando la velocità del proiettile sia molto elevata.

In questo caso basterà una penetrazione del proiettile in cavità di ordine anche piccolissimo per avere un aumento molto grande di pressione nella cavità cranica.

Questo è dovuto al fatto che nell'istante di entrata del proiettile non può uscire un volume equivalente di liquido (sangue o liquor) dal cranio, perché, per la sua viscosità, questo liquido non può raggiungere una velocità uguale a quella del proiettile che entra: né possono, per la stessa ragione, cedere i tessuti molli in corrispondenza dei fori craniali.

Essendo validi i presupposti che il proiettile perfori il cranio a perfetta tenuta, e che in questo istante non muti il volume delle formazioni liquide o parenchimatose contenute nella cavità cefalorachidiana, è possibile calcolare l'aumento della pressione endocranica dall'energia del proiettile.

Ed infatti le dimensioni dell'energia e della pressione, essendo L la lunghezza e *t* il tempo, sono, come è noto:

$$\text{Energia} = ML^2 t^{-2}$$

$$\text{Pressione} = ML^{-1} t^{-2}$$

da cui:

$$\frac{\text{Energia}}{\text{Pressione}} = \frac{ML^2 t^{-2}}{ML^{-1} t^{-2}} = L^3 \tag{4}$$

$$\text{e Pressione} = \frac{\text{Energia}}{L^3}. \tag{5}$$

L'energia rappresentata da un proiettile del peso di 20 grammi, che all'ingresso nella cavità cranica abbia una velocità di 30.000 cm/sec, essendo 980 cm/sec² l'accelerazione di gravità, sarà:

$$\frac{1}{2} \times \frac{20}{980} \times 30.000^2 = 9{,}2 \times 10^6 \text{ gcm}.$$

Dividendo questo valore per L^3 secondo la (5), e cioè per il volume della cavità cranica espresso in cm³ o ml, che poniamo essere 1500, otterremo

$$\frac{9{,}2 \times 10^6}{1500} = 6{,}1 \times 10^3 \text{ g/cm}^2 \equiv \text{ca. } 6 \text{ Atm}.$$

Si comprende come questo valore di pressione possa essere superiore alla soglia di resistenza delle ossa della cavità cranica, particolarmente di quelle che si trovano nella parte anteriore inferiore, che sono comuni al viso: e come questo subitaneo aumento di pressione possa dare ragione del carattere esplosivo che spesso assumono le lesioni da arma da fuoco al cranio, con distruzione del viso.

Anche questa possibilità è da attribuire alla presenza nella cavità cefalorachidiana del liquido cerebrospinale. Se questo fosse sostituito da gas, oppure se le pareti del cranio anzichè rigide fossero cedevoli, una ferita d'arma da fuoco al cervello non produrrebbe, dal punto di vista meccanico, alterazioni diverse da quelle prodotte su qualsiasi altro tessuto molle dell'organismo, e funzionalmente dello stesso tipo di quelle che il chirurgo provoca oggigiorno a scopo terapeutico, ad esempio nella leucotomia.

BIBLIOGRAFIA.

G. CHIARUGI, *Anatomia dell'uomo*, vol. IV, Soc. ed. Lib., Milano (1921).

H. DE HAVEN, « War Med. », *2*, 586 (1942).

A. P. GAGGE e R. S. SHAW, in O. GLASSER'S, « Medical Physics », vol. II, The Year Book Publ., Chicago (1950).

W. J. GARDNER in O. GLASSER'S, « Medical Physics », vol. II, The Year Book Publ., Chicago (1950).

NOTE PRESENTATE DA SOCI

Analisi. — *Il fenomeno di Gibbs nell'interpolazione delle funzioni discontinue.* Nota II di LUIGI MERLI, presentata (*) dal Corrisp. G. SANSONE.

3. – Per studiare ora il comportamento di $H_r(x)$, per $r \to \infty$, nell'intorno dell'origine, consideriamo la funzione

$$f(x) = |x|/x \quad , \quad \text{per } x \neq 0 \quad , \quad f(0) = 0 .$$

Il relativo polinomio di *Hermite* sarà

$$H_r(x) = \sum_{k=1}^{2r} h_k^{(r)}(x) - \sum_{k=2r+2}^{4r+1} h_k^{(r)}(x). \tag{12}$$

È facile vedere che è

$$-1 \leq H_r(x) \leq 1. \tag{13}$$

Infatti, è

$$1 - H_r(x) = 1 - \sum_{k=1}^{2r} h_k^{(r)}(x) + \sum_{k=2r+2}^{4r+1} h_k^{(r)}(x),$$

per cui, tenuto conto che è $\sum_{k=1}^{4r+1} h_k^{(r)}(x) \equiv 1$, sarà

$$1 - H_r(x) = h_{2r+1}^{(r)}(x) + 2 \sum_{k=2r+2}^{4r+1} h_k^{(r)}(x) \geq 0.$$

Analogamente è

$$1 + H_r(x) = h_{2r+1}^{(r)}(x) + 2 \sum_{k=1}^{2r} h_k^{(r)}(x) \geq 0.$$

Il polinomio interpolante $H_r(x)$ resta così compreso nella striscia limitata dalle ordinate -1 e $+1$, in tutto l'intervallo $-1 \leq x \leq 1$.

Osserviamo ora che è $H_r'(0) = H_r''(0) = 0$.

È infatti $H_r'(0) = 0$, essendo l'origine un *punto fondamentale* dell'interpolazione. D'altra parte, siccome per $x = 0$ è

$$h_k''(0) = 2 \frac{1 + 2\lambda x_k^2}{1 - x_k^2} \left[\frac{P_r'^{(\lambda)}(0)}{x_k P_r'^{(\lambda)}(x_k)} \right]^2 ,$$

(*) Nella seduta del 13 dicembre 1952.

per la simmetria degli zeri di $P_r^{(\lambda)}(x)$ rispetto all'origine sarà

$$H_r''(0) = \sum_{k=1}^{2r} h_k''(0) - \sum_{k=2r+2}^{4r+1} h_k''(0) = 0.$$

Ora, $H_r'(x)$ deve annullarsi nei $2r$ punti a destra dell'origine, $x_1, x_2, \cdots, x_{2r}$, dove il polinomio raggiunge il valore massimo 1, e nei $2r$ punti a sinistra dell'origine $x_{2r+2}, x_{2r+3}, \cdots, x_{4r+1}$, dove assume il valore minimo -1; $H_r'(x)$ dovrà quindi annullarsi in altri $4r-2$ punti rispettivamente compresi negli intervalli $(x_1, x_2), (x_2, x_3), \cdots, (x_{2r-1}, x_{2r})$ e $(x_{2r+2}, x_{2r+3}), \cdots, (x_{4r}, x_{4r+1})$, ossia in totale in $8r-1$ punti.

Ma il polinomio $H_r(x)$ ha il grado $8r+1$ ed essendo $H_r'(0) = H_r''(0)$, l'origine è un punto di flesso; non ci saranno quindi punti in cui $H_r'(x)$ risulti uguale a zero, compresi rispettivamente negli intervalli $(x_{2r+2}, 0)$ e $(0, x_{2r})$.

Si ha così che, a destra dell'origine, il polinomio $H_r(x)$ ha costantemente il massimo uguale ad 1 nei punti di ascissa $x_1, x_2, \cdots, x_{2r}$ e quindi per $r \to \infty$ il massimo tende ad 1, in particolare tendendo x_{2r} a zero per $r \to \infty$. Analogamente per i minimi a sinistra dell'origine.

Per studiare ora il comportamento dei minimi a destra dell'origine, quando $r \to \infty$, consideriamo il primo intervallo fra due zeri consecutivi, a destra dell'origine, cioè il tratto compreso tra x_{2r} ed x_{2r-1}.

Siccome $H_r(x)$ assume agli estremi del tratto il valore 1, esso assumerà il suo valore minimo in un punto $\bar{x}(r)$ compreso tra x_{2r-1} ed x_{2r}, e tale minimo sarà dato da

$$H_r[\bar{x}(r)] = \sum_{k=1}^{2r} h_k^{(r)}[\bar{x}(r)] - \sum_{k=2r+2}^{4r+1} h_k^{(r)}[\bar{x}(r)]. \tag{14}$$

Vogliamo provare che è

$$\lim_{r\to\infty} H_r[\bar{x}(r)] = 0. \tag{15}$$

A tale scopo osserviamo, in primo luogo, che è $H_r(x) \gtreqless 0$, secondo che è $x \gtreqless 0$.

Infatti, tenuto conto che è $P_n^{(\lambda)}(x) = -P_n^{(\lambda)}(-x)$ e della conseguente simmetria degli zeri rispetto all'origine, è

$$H_r(x) = \sum_{k=1}^{2r} \frac{4 x x_k \left[1 - \left(\lambda + \frac{1}{2}\right) x^2 + \left(\lambda - \frac{1}{2}\right) x_k^2\right]}{(x - x_k)^2 (x + x_k)^2} \cdot \frac{[P_r^{\lambda} x]^2}{(1 - x_k^2)[P_n'^{(\lambda)}(x_k)]^2},$$

e quindi, essendo $1 - (\lambda + 1/2) x^2 + (\lambda - 1/2) x_k^2 > 0$ per $0 \leq x_k < 1$, $x \leq 1$, $0 < \lambda < 1/2$, è

$$H_r(x) \gtreqless 0 \quad , \quad \text{per } x \gtreqless 0. \tag{16}$$

Sarà in particolare

$$H_r[\bar{x}(r)] > 0$$

e quindi

$$\lim_{r\to\infty} H_r[\bar{x}(r)] \geqq 0. \tag{17}$$

Proveremo ora che è

$$\overline{\lim_{r\to\infty}} H_r[\bar{x}(r)] \leqq 0; \tag{18}$$

e a questo scopo basterà provare che se $\bar{x}(r)$ è un punto opportunamente scelto nell'intervallo (x_{2r-1}, x_{2r}), si ha:

$$\lim_{r\to\infty} H_r[\bar{\bar{x}}(r)] = 0. \tag{19}$$

Faremo uso per questo della formula di approssimazione asintotica

$$\begin{cases} P_r^{(\lambda)}(\cos\theta) = (4r+1)^{-1/2} A(\theta) \cos[(4r+1+\lambda)\theta - \lambda\pi/2] + \\ \qquad\qquad + O[(4r+1)^{-3/2}], \\ A(\theta) = \pi^{1/2} 2^{\lambda} (\operatorname{sen}\theta)^{-\lambda}, \end{cases} \tag{20}$$

e delle seguenti limitazioni per gli zeri dei polinomi ultrasferici, valide per $0 < \lambda < 1$,

$$\frac{k-(1-\lambda)/2}{4r+1+\lambda}\pi < \theta_k < \frac{k+\lambda-1/2}{4r+1+2\lambda}\pi, \qquad k = 1, 2, \cdots, 2r, \tag{21}$$

$$\frac{k+\lambda-1}{4r+1+\lambda}\pi < \theta_k < \frac{k}{4r+1+\lambda}\pi, \qquad k = 1, 2, \cdots, 4r+1 \text{ (7)}. \tag{22}$$

Scegliamo il punto $\bar{\bar{x}}(r) = \cos\bar{\theta}(r)$, con

$$\bar{\theta}(r) = \frac{2r-1/2}{4r+1}\pi;$$

tenuto conto della prima delle (21) e della seconda delle (20), si ha subito che è

$$\theta_{2r-1} < \bar{\theta}(r) < \theta_{2r}.$$

Sarà provata la (19) se le due somme:

$$\sum_{k=1}^{2r} h_k^{(r)}[\bar{x}(r)] \quad \text{e} \quad \sum_{k=2r+2}^{4r+1} h_k^{(r)}[x(r)],$$

la cui differenza dà $H_r[\bar{\bar{x}}(r)]$, tendono a zero per $r\to\infty$.

Per la prima si ha:

$$\sum_{k=1}^{2r} h_k^{(r)}[\bar{\bar{x}}(r)] = O(1) \sum_{k=1}^{2r} \frac{\{P_r^{(\lambda)}[\bar{x}(r)]\}^2}{(\bar{x}(r) - x_k)^2 (1 - x_k^2)[P_r'^{(\lambda)}(x_k)]^2},$$

(7) Cfr. Szegö, vol. cit. in (3), pp. 130. 135.

e tenuto conto delle (10), (21) e (22):

$$\sum_{k=1}^{2r} h_k^{(r)}[\bar{\bar{x}}(r)] = O(1)\{P_r^{(\lambda)}[\bar{\bar{x}}(r)]\}^2 \sum_{k=1}^{2r} \frac{k^{2\lambda+2}}{(\bar{x}(r)-x_k)^2 (4r+1)^{2\lambda+3}} =$$

$$= O(1)\{P_r^{(\lambda)}[\bar{\bar{x}}(r)]\}^2 \cdot (4r+1)^{-1} \sum_{k=1}^{2r} \frac{1}{[\bar{\bar{\theta}}(r)-\theta_k]^2} =$$

$$= O(1)\{P_r^{(\lambda)}[\bar{\bar{x}}(r)]\}^2 \cdot O(4r+1).$$

Ma, per la (20), è:

$$P_r^{(\lambda)}[\bar{\bar{x}}(r)] = (4r+1)^{-1/2} A[\bar{\bar{\theta}}(r)] \cos\left\{(4r+1)\left(\frac{2r-1/2}{4r+1}\right)\pi + \right.$$

$$\left. + \lambda\left(\frac{2r-1/2}{4r+1} - \frac{1}{2}\right)\pi\right\} + O[(4r+1)^{-3/2}],$$

ossia

$$P_r^{(\lambda)}[\bar{\bar{x}}(r)] = (4r+1)^{-1/2} A[\bar{\bar{\theta}}(r)] \operatorname{sen} \lambda\left[\frac{2r-1/2}{4r+1} - \frac{1}{2}\right]\pi + O(4r+1)^{-3/2};$$

avremo quindi

$$\sum_{k=1}^{2r} h_k^{(r)}[\bar{\bar{x}}(r)] = O(1)\left|A[\bar{\bar{\theta}}(r)] \operatorname{sen} \lambda\left[\frac{2r-1/2}{4r+1} - \frac{1}{2}\right]\pi + O(4r+1)^{-1/2}\right|^2,$$

e, tenuto conto che

$$\lim_{r\to\infty} \bar{\bar{\theta}}(r) = \lim_{r\to\infty} \frac{2r-1/2}{4r+1}\pi = \frac{\pi}{2},$$

e che $\lim_{r\to\infty} A[\bar{\bar{\theta}}(r)] = \pi^{1/2} 2^{\lambda}$, sarà

$$\lim_{r\to\infty} \sum_{k=1}^{2r} h_k^{(r)}[\bar{\bar{x}}(r)] = 0. \tag{23}$$

Analogamente si prova che

$$\lim_{r\to\infty} \sum_{k=2r+2}^{4r+1} h_k^{(r)}[\bar{\bar{x}}(r)] = 0. \tag{24}$$

Dalle (23) e (24) segue la (19) e quindi la (18). Tenuto conto delle (17) e (18) segue infine la (15).

La stessa dimostrazione fatta per l'intervallo (x_{2r-1}, x_{2r}), vale se si considerano i valori di $H_r(x)$ quando x varia tra (x_{2r-l-1}, x_{2r-l}) con l fisso.

Si può quindi concludere che i polinomi $H_r(x)$, positivi per $x > 0$, a destra dell'origine compiono delle oscillazioni mantenendosi sempre ≤ 1 e, mentre i massimi sono costantemente uguali ad 1, i minimi, le cui ascisse tendono a zero per $r \to \infty$, tendono a zero.

Analogamente si studia il comportamento a sinistra dell'origine.

Analisi matematica. — *Sul problema di Cauchy per le equazioni lineari a derivate parziali* (*). Nota di CARLO PUCCI, presentata (**) dal Socio M. PICONE.

Nella presente Nota si prova un teorema di esistenza ed unicità relativo al seguente problema di Cauchy:

$$(1) \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + a(t)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x,t) \quad \text{per} \quad |x| \leq l, |t| \leq h,$$

$$(2) \qquad u(x,0) = u_0(x) \quad , \quad \left[\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right]_{t=0} = u_1(x) \quad \text{per} \quad |x| \leq l.$$

Si determina uno sviluppo in serie della soluzione la quale in tal modo può essere agevolmente approssimata e, in un caso particolare, determinata in termini finiti. Si svolge inoltre una osservazione relativa al campo di esistenza della soluzione del problema considerato.

Questa Nota è una indicazione qualitativa di risultati più generali relativi all'equazione differenziale

$$\sum_{i_1+\cdots+i_r+s\leq m} a_{i_1,\cdots,i_r,s}(t)\frac{\partial^{i_1+\cdots+i_r+s}u}{\partial x_1^{i_1}\cdots\partial x_r^{i_r}\partial t^s} = f(x_1,\cdots,x_r,t)$$

contenuti in una Memoria in corso di stampa (1).

a) Poniamo $R \equiv [|x| \leq l, |t| \leq h]$ e

$$(3) \qquad \alpha = \sqrt{\max_{[-h,h]} |a(t)|};$$

indichiamo con σ un numero positivo e con Γ_σ la classe delle funzioni $\varphi(x,t)$ dotate in R di derivate parziali rispetto ad x di qualsiasi ordine tali che per qualche coppia di costanti positive M e ρ, con $\rho > \sigma$, risultano verificate le limitazioni

$$(4) \qquad \left|\frac{\partial^n \varphi(x,t)}{\partial x^n}\right| < M\frac{n!}{\rho^n} \quad \text{per} \quad (x,t) \in R, n = 1,2,\cdots.$$

Diciamo che una funzione $u(x,t)$ è soluzione dell'equazione (1) se è continua in R insieme alle sue derivate seconde rispetto ad x e rispetto a t e verifica l'equazione. Ciò posto proviamo il seguente teorema.

Se le funzioni $a(t), f(x,t)$ *sono continue in* R *e se le funzioni* $u_0(x), u_1(x), f(x,t)$ *appartengono alla classe* $\Gamma_{h\alpha}$ *esiste una e una sola funzione della classe* $\Gamma_{h\alpha}$ *soluzione del problema di Cauchy* (1), (2).

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto Nazionale per le Applicazioni del Calcolo.

(**) Nella seduta del 14 febbraio 1953.

1) C. PUCCI, *Il problema di Cauchy per le equazioni lineari a derivate parziali*. «Ann. Mat. pura e appl.» (1953).

Tale soluzione è la somma di una serie di funzioni uniformemente convergente in R:

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} B^n F(x,t), \tag{5}$$

ove

$$F(x,t) = \int_0^t (t-\tau) f(x,\tau)\, d\tau + u_0(x) + u_1(x)\, t, \tag{6}$$

e B *è un operatore integro-differenziale così definito*

$$B\varphi(x,t) = -\int_0^t (t-\tau)\, a(\tau) \frac{\partial^2 \varphi(x,\tau)}{\partial x^2}\, d\tau \ (2). \tag{7}$$

Supponiamo che esista una funzione $u(x,t)$, della classe Γ_{ah}, soluzione del problema considerato. In tal caso esistono due costanti positive L e τ, con $\tau > h\alpha$ e tali che

$$\left| \frac{\partial^n u(x,t)}{\partial x^n} \right| < L \frac{n!}{\tau^n} \quad \text{per} \quad (x,t) \in R, n = 1, 2, \cdots. \tag{8}$$

Dalla (1) otteniamo:

$$\int_0^t (t-\tau) \frac{\partial^2 u(x,\tau)}{\partial \tau^2}\, d\tau = \int_0^t (t-\tau) f(x,\tau)\, d\tau - \int_0^t (t-\tau)\, a(\tau) \frac{\partial^2 u(x,\tau)}{\partial x^2}\, d\tau,$$

e per la (2) e le (6), (7)

$$u(x,t) = F(x,t) + Bu(x,t). \tag{9}$$

Siccome la funzione u ha derivate di qualsiasi ordine rispetto ad x limitate in R risulta definita in R la funzione $B^n u(x,t)$ per $n = 1, 2, \cdots$. Appartenendo le funzioni f, u_0, u_1, alla classe Γ_{eah} anche F appartiene a tale classe e risulta quindi pure definita in R la funzione $B^n F(x,t)$ per $n = 1, 2, \cdots$.

Dalla (9) sostituendo nel secondo membro ad u la sua espressione data dalla (9) stessa otteniamo

$$u(x,t) = F(x,t) + BF(x,t) + B^2 u(x,t),$$

e con analogo procedimento

$$u(x,t) = F(x,t) + BF(x,t) + B^2 F(x,t) + B^3 u(x,t),$$

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{m-1} B^n F(x,t) + B^m u(x,t). \tag{10}$$

Per la (3) e la (7), essendo $|t| \leq h$ si ha in R:

$$|B^m u(x,t)| < \alpha^{2m} \frac{h^{2m}}{(2m)!} \max_R \left| \frac{\partial^{2m} u}{\partial x^{2m}} \right|,$$

(2) Indichiamo con $B^n \varphi(x,t)$ la funzione $B[B^{n-1} \varphi(x,t)]$ per $n = 2, 3, \cdots$, supposto sempre che la funzione $\varphi(x,t)$ sia tale che queste espressioni abbiano significato. Conveniamo $B^0 \equiv 1$.

e dalla (8) segue

$$B^m u(x,t) < L\left(\frac{\alpha h}{\tau}\right)^{2m}.$$

Essendo $\tau > \alpha h$, $B^m u(x,t)$ converge uniformemente a zero in R per $m \to \infty$; dalla (10) segue allora che la serie al secondo membro della (5) è uniformemente convergente in R. Si è quindi provato che se esiste una funzione della classe $\Gamma_{\alpha h}$ soluzione del problema di Cauchy (1), (2) tale soluzione è data dalla (5) ed è perciò unica.

Proviamo ora l'esistenza della soluzione. Appartenendo la funzione F alla classe $\Gamma_{e\alpha h}$ esistono due costanti positive K e δ, con $\delta > e\alpha h$, tali che

$$\left|\frac{\partial^n F(x,t)}{\partial x^n}\right| < K\frac{n!}{\delta^n} \quad \text{per} \quad (x,t) \in R, n = 1, 2, \cdots. \tag{11}$$

Dalle (7), (3), (11) segue

$$\left|B^n \frac{\partial^i F(x,t)}{\partial x^i}\right| < \alpha^{2n}\frac{h^{2n}}{(2n)!}\max_R\left|\frac{\partial^{2n+i} F}{\partial x^{2n+i}}\right| < K\frac{(\alpha h)^{2n}}{\delta^{2n+i}}\frac{(2n+i)!}{(2n)!};$$

essendo $(2n+i)! < (2n)!\, i!\, e^{2n+i}$, (3) si ha pure

$$\left|B^n \frac{\partial^i F(x,t)}{\partial x^i}\right| < K\frac{(\alpha h)^{2n}}{\delta^{2n+i}} i!\, e^{2n+i}. \tag{12}$$

Posto

$$S_i = K e^i \frac{i!}{\delta^i}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{e\alpha h}{\delta}\right)^{2n} \quad \text{per} \quad i = 0, 1, \cdots, \tag{13}$$

essendo $\delta > e\alpha h$ la serie è convergente. La serie al secondo membro della (5) è uniformemente convergente in R poiché per le (12), (13) è minorante in R della serie S_0 che è convergente e a termini costanti. È inoltre

$$\frac{\partial^i}{\partial x^i} B^n F(x,t) = B^n \frac{\partial^i F(x,t)}{\partial x^i} \quad \text{per} \quad n, i = 1, 2, \cdots$$

e tali funzioni sono continue in R. Si può quindi derivare ciascun termine della serie (5) i volte rispetto ad x e la serie così ottenuta è uniformemente convergente in R perché per le (12), (13) risulta minorante della serie convergente S_i. La funzione $u(x,t)$, definita dalla (5), possiede perciò derivate di qualsiasi ordine rispetto ad x che sono continue in R e soddisfano alla limitazione (8) ove

$$L = K\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{e\alpha h}{\delta}\right)^{2n}, \quad \tau = \frac{\delta}{e}. \tag{14}$$

Notiamo che è

$$B\sum_{n=0}^{\infty} B^n F(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} B^n F(x,t),$$

(3) Tale disuguaglianza è provata nella Memoria citata in (1), § 1.

risultando lecita la derivazione per serie rispetto ad x, come si è già provato, e l'integrazione per serie per l'uniforme convergenza; ne segue quindi per la (5)

$$(15) \qquad u(x,t) = F(x,t) + B\sum_{n=0}^{\infty} B^n F(x,t) = F(x,t) + Bu(x,t).$$

Siccome $F(x,t)$, $Bu(x,t)$ possiedono derivata seconda rispetto a t continua, esiste continua la derivata seconda di u rispetto a t ed è per la (15)

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = f(x,t) - a(t)\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2},$$

e cioè $u(x,t)$ è una soluzione dell'equazione differenziale (1). Dalla (15) si ottiene pure

$$u(x,0) = F(x,0) + Bu(x,0) = u_0(x),$$

$$\left[\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right]_{t=0} = \left[\frac{\partial F(x,t)}{\partial t}\right]_{t=0} + \left[\frac{\partial Bu(x,t)}{\partial t}\right]_{t=0} = u_1(x),$$

e perciò $u(x,t)$ è la soluzione cercata.

b) Lo sviluppo in serie della soluzione del problema di Cauchy considerato consente il calcolo approssimato di tale soluzione e delle sue derivate.

Consideriamo ad esempio il seguente problema di Cauchy:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \cos t \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = t \operatorname{sen} x,$$

$$u(x,0) = 1 - x \quad , \quad \left[\frac{\partial u}{\partial t}\right]_{t=0} = 0.$$

Per il teorema precedente esiste una e una sola soluzione data dalla (5) ove in tal caso è

$$F(x,t) = 1 - x + \operatorname{sen} x \int_0^t (t-\tau)\tau\, d\tau = 1 - x + \frac{t^3}{3!}\operatorname{sen} x,$$

$$B^n F(x,t) = \int_0^t (t-\tau_1)\cos\tau_1 \int_0^{\tau_1} \cdots \int_0^{\tau_{n-1}} (\tau_{n-1} - \tau_n)\cos\tau_n \frac{\tau_n^3}{3!}(-1)^n \operatorname{sen} x\, d\tau_n \cdots d\tau_1.$$

Ne segue

$$|B^n F(x,t)| < |\operatorname{sen} x| \frac{|t|^{2n+3}}{(2n+3)!} \qquad \text{per} \quad n = 1, 2, \cdots,$$

e quindi

$$|u(x,t) - F(x,t) - BF(x,t)| = \left|\sum_{n=2}^{\infty} B^n F(x,t)\right| < |\operatorname{sen} x| \sum_{n=2}^{\infty} \frac{t^{2n+3}}{(2n+3)!},$$

ovverosia

$$u(x,t) \sim 1 - x + \frac{t^3}{3!}\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} x \int_0^t \frac{(t-\tau)\tau^3}{3!}\cos\tau\, d\tau$$

con un errore inferiore a $3|\operatorname{sen} x|\, 10^{-4}$ per $t \leq 1$.

c) Le funzioni $u_0(x)$, $u_1(x)$, $f(x,t)$ siano polinomi in x di grado non superiore ad m. Supposto $f(x,t)$, $a(t)$ continue in R sussiste il teorema precedente. In tale caso $F(x,t)$ è un polinomio in x di grado non superiore ad m e quindi $B^i F(x,t) \equiv 0$ per $i > m/2$ comportando l'operatore B due derivazioni rispetto ad x. Ne segue

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{[m/2]} B^n F(x,t)$$

e cioè la soluzione è somma di un numero finito di termini ciascuno ottenuto con un numero finito di operazioni di integrazione e derivazione sulle funzioni assegnate nel problema.

Consideriamo ad esempio il seguente problema di Cauchy:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{x}{1+q^2 t^2}; \tag{16}$$

$$u(x,0) = 0\ ,\ \left[\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right]_{t=0} = 0. \tag{17}$$

In tal caso $F(x,t)$ è un polinomio di primo grado in x e quindi

$$B^n F(x,t) \equiv 0 \qquad \text{per } n = 1, 2, \cdots,$$

$$u(x,t) = F(x,t) = \int_0^t \frac{(t-\tau)x}{1+q^2\tau^2}\, d\tau = \frac{xt}{q} \operatorname{arctg} qt - \frac{x}{2q^2} \log(1+q^2 t^2).$$

d) Notiamo che nel teorema precedente non si sono fatte ipotesi sul segno di $a(t)$ e quindi l'equazione differenziale (1) può essere indifferentemente di tipo ellittico od iperbolico come anche può cambiare tipo in R.

Osserviamo poi che se le funzioni $u_0(x)$, $u_1(x)$, $a(t)$, $f(x,t)$ sono analitiche in R sussiste sia il teorema di esistenza di Cauchy Kowalewsky sia il teorema precedente con la condizione però che l'altezza h del rettangolo R ove esiste la soluzione deve essere opportunamente determinata in dipendenza delle funzioni assegnate. Ha quindi interesse confrontare in un semplice caso i campi di esistenza assicurati da ciascuno dei due teoremi. Consideriamo ad esempio il problema di Cauchy (16), (2) ove supponiamo che le funzioni $u_0(x)$, $u_1(x)$ siano analitiche e siano verificate le limitazioni

$$|u_0^{(n)}(n)|\ ,\ |u_1^{(n)}(x)| < M^n \quad \text{per } |x| \leq l,\ n = 1, 2, \cdots.$$

Il campo di esistenza per il teorema di Cauchy–Kowalewsky è contenuto nel rettangolo R_q $[|x| \leq l,\ t < 1/q]$ perché impiegando il metodo delle funzioni maggioranti si deve considerare lo sviluppo in serie di $\frac{x}{1-q^2 t^2}$ che risulta convergente appunto per $|t| < 1/q$. Per il teorema precedente la soluzione esiste in $R - [x \leq l,\ t| \leq h]$ comunque si fissi la costante h; il campo di esistenza è quindi tutta la striscia $x \leq l$.

Geometria. — *Esame di singolarità superficiali.* – II. *Massimo numero di punti* $(n-2)$*-pli inflessionali di una superficie algebrica d'ordine* n (*). Nota di GIUSEPPE VACCARO, presentata (**) dal Socio E. BOMPIANI.

6. Ci proponiamo adesso di determinare il massimo numero di punti $(n-2)$-pli inflessionali che può possedere una superficie algebrica di ordine n di S_3, senza che acquisti linee $(n-2)$-ple.

Cominciamo col determinare il massimo di punti del tipo voluto che può possedere una Φ^n algebrica di S_3 con $n \geq 4$ nella condizione che questa acquisti linee $(n-4)$-ple al più. In questa ipotesi detto δ il numero dei punti cercati, mai tre di essi possono essere allineati giacché, in questo caso (I, 3), la loro retta è $(n-3)$-pla per la superficie. Si ha pertanto che la unica configurazione possibile è che il piano armonico di ognuno dei δ punti $(n-2)$-pli inflessionali rispetto alla Φ^n, passi per i $\delta - 1$ rimanenti.

In questo caso si trova subito $\delta = 4$.

Infatti se si considerano 2 dei δ punti $(n-2)$-pli inflessionali, diciamoli A_1 e A_2, i rimanenti $\delta - 2$ debbono appartenere alla retta di intersezione dei piani armonici rispetto a Φ^n dei punti A_1 e A_2 e pertanto $\delta - 2 = 2$ da cui $\delta = 4$.

Nasce ora il problema di vedere se ogni superficie algebrica Φ^n può possedere 4 punti del tipo in esame e nella posizione sopradetta.

Notiamo che se una superficie Φ^n possiede effettivamente 4 punti del tipo voluto e nella configurazione sopraddetta, questi possono sempre supporsi nei vertici del tetraedro di riferimento dello S_3 proiettivo. In questo caso come si è visto (I, 1) l'equazione di una tale Φ^n deve contenere ciascuna variabile al quadrato e quindi ogni termine della equazione deve essere formato dal quadrato del prodotto di k $(k \leq 3)$ variabili. La superficie risulta pertanto di ordine pari $2k \leq 6$.

Si ha così:

Una superficie algebrica Φ^n *per* $n = 4, 6$ *può possedere al massimo 4 punti* $(n-2)$*-pli inflessionali, senza acquistare linee* $(n-3)$*-ple, e i 4 punti sopraddetti risultano in posizione tale che il piano armonico di ognuno di essi rispetto alla superficie passa per i tre rimanenti* (8).

(*) La numerazione segue quella della Nota I (ved. questi « Rendiconti », vol. XIII, fasc. 6, pp. 373-378 (1952).

(**) Nella seduta del 13 dicembre 1952.

(8) Le superficie del 4° ordine con 4 punti doppi inflessionali tali però che le rette che li congiungono a due a due non appartengono alla superficie, sono state già da me trovate nella Nota citata in (1), come caso particolare di ipersuperficie del 4° ordine con $r - 1$ punti doppi inflessionali. Qui riproducono anzi la stessa dimostrazione fatta per quel caso particolare.

Colgo tuttavia l'occasione per chiarire che in effetti l'enunciato contenuto in quella Nota può dar luogo ad equivoci, giacché in esso non è esplicitamente menzionata la condizione che le rette che congiungono i 4 punti doppi inflessionali a due a due non appartengano alla superficie; tuttavia la dimostrazione chiarisce bene che questa era la mia tesi.

Una superficie di ordine n con $n \neq 3, 4, 6$ può possedere al massimo 2 punti $(n-2)$-pli inflessionali senza acquistare linee $(n-3)$-ple, e di essi uno appartiene al piano armonico dell'altro rispetto alla superficie.

Le equazioni di una Φ^4 e di una Φ^6 con 4 punti multipli del tipo in esame e senza linee $(n-3)$-ple, possono sempre ridursi a:

$$\sum a_{ik} x_i^2 x_k^2 = 0 \qquad (i, k = 1, 2, 3, 4 \; ; \; i \neq k) \tag{6.1}$$

$$\sum a_{ihk} x_i^2 x_h^2 x_k^2 = 0 \qquad (i, h, k = 1, 2, 3, 4 \; ; \; i \neq h \neq k) \tag{6.2}$$

7. Non è forse del tutto privo d'interesse osservare che le equazioni (6.1) e (6.2) si ottengono partendo rispettivamente dalle equazioni di una quadrica passante per i vertici del tetraedro fondamentale e dalla equazione di una superficie cubica passante doppiamente per i vertici del tetraedro fondamentale e sostituendo in esse le variabili con i rispettivi quadrati.

Notiamo esplicitamente che la superficie del 6° ordine (6.2) possiede 4 punti quadrupli inflessionali: il cono osculatore per esempio in $O(0, 0, 0, 1)$ è dato, posto $t = 1$, da:

$$a_{12} x^2 y^2 + a_{13} x^2 z^2 + a_{23} y^2 z^2 = 0. \tag{7.1}$$

Esso contiene gli assi, cioè le congiungenti O con gli altri 3 punti quadrupli inflessionali, come rette doppie e precisamente come luoghi di punti biplanari a tangenti 4-punte. La coppia dei piani osculatori nei punti di ciascun asse è fissa.

Lo stesso vale per i coni osculatori negli altri 3 punti quadrupli.

La superficie del 6° ordine (6.2) è una particolarizzazione della ben nota superficie di Enriques. La superficie da noi esaminata, a differenza di quella di Enriques che è di genere geometrico uguale a zero e bigenere uguale a uno, risulta razionale, come si vede facilmente, per esempio, proiettandola da uno dei punti quadrupli inflessionali su un piano doppio che risulta dotato di una conica di diramazione.

8. Osserviamo che la Φ^4 e la Φ^6 di equazioni rispettive (6.1) e (6.2) non possono acquistare altre singolarità.

Inoltre vale il teorema:

Se una Φ^n con $n = 4, 6$ possiede 4 punti $(n-2)$-pli di cui tre inflessionali e tali che il piano armonico di ognuno di essi rispetto a Φ^n contenga i tre punti $(n-2)$-pli rimanenti, anche il quarto è inflessionale.

La dimostrazione di questo teorema, per $n = 4$, trovasi nella mia Nota citata in [1]; per $n = 6$ è del tutto analoga.

9. Se ammettiamo che la superficie Φ^n possa eventualmente acquistare linee $(n-3)$-ple ma non $(n-2)$-ple, il massimo numero δ di punti $(n-2)$-pli inflessionali che si possono imporre alla Φ^n varia ed in generale, come vedremo, aumenta.

Cominciamo col supporre che la Φ^n, sempre per $n > 3$, possieda 3 punti O, O', O'' del tipo vòluto allineati su una retta r e tali che a coppie siano coniugati nella omologia armonica che muta la Φ^n in sè e che ha centro nel rimanente punto. La retta r (I, 3) risulta $(n-3)$-pla per Φ^n.

Se a Φ^n imponiamo un ulteriore punto O''' $(n-2)$-plo inflessionale, questo può: 1) *non* appartenere a nessuno dei tre piani armonici dei punti O, O', O'' rispetto a Φ^n, 2) appartenere ad uno dei tre piani armonici sopraddetti, 3) appartenere a due e quindi ai tre piani armonici sopraddetti.

Nel primo caso, per le omologie armoniche di centri rispettivi, O, O', O'', O''', la Φ^n in definitiva acquista 9 punti $(n-2)$-pli inflessionali, a tre a tre allineati ed appartenenti al piano α di O''' e della retta r. Per quanto visto (I, 3), le rette contenenti due e quindi un terzo di tali punti risultano $(n-3)$-ple per Φ^n: per $n > 3$ quindi, il piano α appartiene a Φ^n che pertanto risulta spezzata.

Se il punto O''' appartiene per esempio al piano armonico di O, la Φ^n acquista di conseguenza sul piano α di r e di O''' almeno altri due punti $(n-2)$-pli inflessionali O^{IV} e O^V coniugati di O''' nelle omologie armoniche di centri rispettivi O' e O''.

La configurazione dei 6 punti così ottenuti è quella costituita dai 4 vertici di un quadrangolo e da due dei suoi punti diagonali, cosicché esistono 4 rette della superficie Φ^n ognuna delle quali contiene tre dei 6 punti sopraddetti e risulta $(n-3)$-pla per la Φ^n stessa.

In questo caso pertanto per $n > 4$ la superficie risulta spezzata.

Verifichiamo analiticamente quanto detto sopra.

Sia

$$t^2 [\theta_0 z^{n-2} + \theta_1 z^{n-3} + \cdots + \theta_{n-2}] + \chi_0 z^n + \chi_1 z^{n-1} + \cdots + \chi_n = 0 \tag{9.1}$$

ove le θ_i e le χ_i sono al solito forme nelle sole x e y di grado uguale all'indice, l'equazione di una Φ^n avente in $O(0,0,0,1)$ un punto $(n-2)$-plo inflessionale, e sia $t = 0$ il piano armonico di O rispetto a Φ^n.

Imponiamo che il punto $O'(0,0,1,1)$ sia anch'esso $(n-2)$-plo inflessionale per la (9.1). Perché O' sia $(n-2)$-plo deve essere intanto:

$$\theta_0 = \chi_0 = 0 \; ; \; \theta_1 \equiv \chi_1 \equiv 0 \; ; \cdots ; \; \theta_{n-4} \equiv \chi_{n-4} \equiv 0 \; ; \; \theta_{n-3} \equiv -\chi_{n-3} .$$

La (9.1) diviene pertanto:

$$t^2 [\theta_{n-3} z + \theta_{n-3}] - \theta_{n-3} z^3 + \chi_{n-2} z^2 + \chi_{n-1} z + \chi_n = 0 . \tag{9.2}$$

Perché O' sia inoltre inflessionale, basta imporre che la sua prima polare (d'ordine $n-1$) rispetto a Φ^n risulti spezzata nel cono osculatore in O' ed in un piano che possiamo sempre supporre passante per il punto $(0,1,0,0)$.

Deve quindi essere:

$$-3 z^2 \theta_{n-3} + 2 z (\chi_{n-2} + t\theta_{n-3}) + t^2 \theta_{n-3} + 2 t\theta_{n-2} + \chi_{n-1} \equiv$$

$$\equiv (\theta_{n-2} + \chi_{n-2} - 2 z\theta_{n-3} + 2 t\theta_{n-3})(ax + cz + dt) ;$$

dal confronto dei coefficienti delle potenze di z si ha:

$$(9.3) \qquad (2c - 3)\,\theta_{n-3} \equiv 0$$

$$(9.4) \qquad 2\chi_{n-2} + 2t\theta_{n-3} \equiv c(\theta_{n-2} + \chi_{n-2} + 2t\theta_{n-3}) - 2\theta_{n-3}(ax + dt)$$

$$(9.5) \qquad \theta_{n-3}t^2 + 2\theta_{n-2}t + \chi_{n-1} \equiv (\theta_{n-2} + \chi_{n-2} + 2t\theta_{n-3})(ax + dt).$$

La (9.3) è soddisfatta o per $\theta_{n-3} \equiv 0$ o per $c = 3/2$; ma per $\theta_{n-3} \equiv 0$, poiché risulta anche $\chi_{n-3} \equiv 0$, si ha che la retta OO' $(x = y = 0)$ risulta $(n-2)$-pla inflessionale per la Φ^n; perché ciò non sia, basta allora prendere:

$$c = \frac{3}{2}.$$

Sostituito questo valore nelle (9.4) e (9.5) risulta:

$$d = \frac{1}{2} \quad , \quad \chi_{n-2} \equiv 3\theta_{n-2} - 4a\theta_{n-3}x \quad , \quad \chi_{n-1} \equiv a(4\theta_{n-2} - 4a\theta_{n-3}x)x.$$

In definitiva l'equazione della Φ^n si scrive:

$$(9.6) \qquad t^2[\theta_{n-3}z + \theta_{n-2}] - \theta_{n-3}z^3 + (3\theta_{n-2} - 4a\theta_{n-3}x)z^2 + \\ + a(4\theta_{n-2} - 4a\theta_{n-3}x)xz + \chi_n = 0.$$

Come si verifica subito, anche il punto $O''(0, 0, -1, 1)$ risulta $(n-2)$-plo inflessionale per la (9.6).

Imponiamo adesso che il punto $O'''(1, 0, 0, 0)$ appartenente al piano armonico di O rispetto a Φ^n (ma non appartenente ai piani armonici rispetto a Φ^n di O' e O''), sia anch'esso $(n-2)$-plo inflessionale per Φ^n. Intanto la (9.6) deve contenere la variabile x al più al secondo grado. Ora, come si verifica subito, se $n > 4$, posti uguali a zero i coefficienti dei termini contenenti la x di grado > 2, la (9.6) si spezza nel piano $y = 0$ ed in una Φ^{n-1}.

10. Supponiamo $n = 4$. La (9.6) si scrive:

$$(10.1) \qquad t^2[\theta_1 z + \theta_2] - \theta_1 z^3 + (3\theta_2 - 4a\theta_1 x)z^2 + \\ + a(4\theta_2 - 4a\theta_1 x)xz + \chi_4 = 0.$$

Perché il punto $O'''(1, 0, 0, 0)$ sia doppio per la (10.1), basta che in χ_4 manchino i termini in x^4 e in x^3 ed inoltre che sia

$$(10.2) \qquad aa_{20} - a^2 a_1 = 0$$

avendo posto

$$(10.3) \qquad \begin{cases} \theta_1 \equiv a_1 x + a_2 y \\ \theta_2 \equiv a_{20} x^2 + a_{11} xy + a_{02} y^2 \\ \chi_4 \equiv b_{13} xy^3 + b_{22} x^2 y^2 + b_{04} y^4. \end{cases}$$

La (10.2), non potendo essere $a = 0$, con che il punto O''' apparterrebbe ai piani armonici dei punti O, O', O'', porta alla condizione

$$a = \frac{a_{20}}{a_1}.$$

Affinché inoltre il punto O''' sia inflessionale, occorre e basta, analogamente a quanto detto nel numero precedente nei riguardi del punto O', che la sua prima polare rispetto a Φ^4 risulti spezzata nel cono osculatore in O''' ed in un piano passante necessariamente per O.

Con facili calcoli si vede che ciò avviene se si pone, come sempre può farsi:

$$(10.4)\quad \begin{cases} a = 1 \quad , \quad a_{20} = a_1 \quad , \quad a_1 b_{22} = 4\,(a_{02}\,a_1 + a_2\,a_{11} - a_{11}^2) \\ a_{20}\,b_{13} = a_{11}\,b_{22}. \end{cases}$$

Per le precedenti la sezione della (10.1) con il piano $y = 0$ (piano per i quattro punti O , O' , O'' , O''') è dato da

$$(10.5)\qquad t^2\,(xz + x^2) - xz^3 - x^2 z^2$$

che si scrive

$$(z - t)\,(z + t)\,(x + z)\,x = 0.$$

La Φ^4 contiene quindi la quattro rette del piano $y = 0$:

$$z - t = 0 \quad , \quad z + t = 0 \quad , \quad x + z = 0 \quad , \quad x = 0$$

ed in definitiva risultano doppi inflessionali per Φ^4 i sei punti:

$$(0\,,0\,,0\,,1) \quad ; \quad (0\,,0\,,-1\,,1) \quad ; \quad (0\,,0\,,1\,,1) \quad ;$$
$$(1\,,0\,,0\,,0) \quad ; \quad (-1\,,0\,,1\,,1) \quad ; \quad (1\,,0\,,-1\,,1)$$

e su ognuna delle 4 rette precedenti stanno tre di essi.

Si ha pertanto:

Se ad una superficie Φ^4 del 4° ordine con tre punti doppi inflessionali allineati si impone un altro punto doppio inflessionale appartenente al piano armonico di uno dei primi tre rispetto a Φ^4, essa ne acquista altri due nel piano dei primi quattro ed essi risultano distribuiti su quattro rette della superficie.

Ad una superficie Φ^4 con 6 punti doppi inflessionali nella configurazione sopra trovata si possono ancora imporre altri punti doppi dello stesso tipo e si determinano così superficie del 4° ordine con 12 punti doppi inflessionali. Tali superficie sono le note superficie desmiche, studiate diffusamente anche dal Ciani [9].

11. Riprendiamo in esame una superficie d'ordine n , Φ^n, con tre punti $(n-2)$-pli inflessionali O , O' , O'' allineati e tali, al solito, che a coppie siano coniugati nella omologia armonica che muta la Φ^n in sè e che ha centro nel rimanente punto.

Imponiamo ad una tale superficie un quarto punto O''' $(n-2)$-plo inflessionale appartenente ai piani armonici dei primi tre. Le rette che congiungono O''' con i tre punti O , O' , O'' (1, 3) risultano $(n-4)$-ple per Φ^n e quindi per $n \geq 6$ il piano dei quattro punti appartiene alla Φ^n.

(9) Cfr. E. CIANI. *Sopra la configurazione desmica.* «Scritti Geometrici Scelti», Cedam. Padova, vol. I, pp. 283-291 (1937).

Si ha dunque, per quanto detto anche nei numeri precedenti:

Una superficie Φ^n *di ordine* $n > 6$ *non può possedere più di tre punti* $(n-2)$*-pli inflessionali. Essi risultano allineati su una retta* $(n-3)$*-pla della superficie e sono tali che a coppie risultano coniugati nella omologia armonica che muta la* Φ^n *in sè e che ha centro nel rimanente punto.*

Una superficie del 6° ordine se possiede tre punti quadrupli inflessionali allineati non può acquistarne altri senza spezzarsi.

12. Supponiamo $n = 4$ e siano $O\,(0,0,0,1)$, $O'\,(0,0,1,1)$, $O''\,(0,0,-1,1)$ tre punti doppi inflessionali, allineati sull'asse z, e supponiamo che i loro piani armonici rispetto alla superficie passino per $O'''\,(1,0,0,0)$. L'equazione di una tale Φ^4 è data dalla (10.1) ove si ponga $a = 0$. Si ha quindi l'equazione:

$$t^2\,[\theta_1 z + \theta_2] - \theta_1 z^3 + 3\,\theta_2 z^2 + \chi_4 = 0. \tag{12.1}$$

Se il punto $O'''\,(1,0,0,0)$ è anch'esso doppio inflessionale per la (12.1) il suo piano armonico deve necessariamente passare per l'asse z. Assunto tale piano come $x = 0$, la (12.1) deve contenere la variabile x solamente al quadrato.

Deve essere pertanto:

$$\theta_1 \equiv a_2\, y$$

$$\theta_2 \equiv a_{20}\, x^2 + a_{02}\, y^2$$

$$\chi_4 \equiv b_{22}\, x^2 y^2 + b_{04}\, y^4.$$

Il piano per l'asse z e per il punto O''' $(y = 0)$ sega allora la superficie, come si verifica immediatamente, nell'asse z contato due volte e nelle due rette

$$t^2 + 3 z^2 = 0 \tag{12.2}$$

e si ha pertanto che esso è il piano tangente fisso nei punti dell'asse z. Da qui risulta che alla superficie del 4° ordine in esame non possiamo imporre ulteriormente altri punti doppi inflessionali appartenenti ai piani armonici di O, O', O'', senza che l'asse z diventi almeno doppia.

Le due rette (12.2) intersecano l'asse z nei punti $\pm i\sqrt{1/3}$ che risultano, come doveva essere, coniugati nelle tre omologie di centri rispettivamente O, O', O''.

In conclusione:

Se una superficie del 4° ordine Φ^4 *possiede 4 punti doppi inflessionali di cui tre allineati su una retta r ed il 4° appartenente ai piani armonici dei primi tre rispetto a* Φ^4*, non può acquistare altri punti doppi dello stesso tipo appartenenti ai piani armonici dei primi tre senza che nascano linee almeno doppie per la superficie. Il piano dei 4 punti doppi inflessionali risulta tangente fisso nei punti della retta r.*

13. Se $n = 5$ con calcoli del tutto analoghi ai precedenti si ricava che ad una Φ^5 che possiede tre punti tripli inflessionali allineati su una retta r possiamo imporre ancora un altro punto triplo dello stesso tipo appartenente ai piani armonici rispetto a Φ^5 dei primi tre.

Si ha pertanto:

Una superficie Φ^5 del 5° ordine, priva di linee triple, può possedere al più 4 punti tripli inflessionali di cui tre allineati e il quarto appartenente ai piani armonici dei primi tre rispetto a Φ^5.

Geometria. — *Sulle molteplicità effettive delle curve polari.* Nota di EDOARDO VESENTINI, presentata (*) dal Corrisp. B. SEGRE.

1. M. Nöther ha affermato che, data una curva algebrica piana, C, passante per un punto, P, con una prefissata singolarità, la generica prima polare di C presenta in ciascuno dei punti multipli di C infinitamente vicini a P, una molteplicità effettiva non inferiore a quella che tale punto ha per C, diminuita di uno.

Questa affermazione vale quando si riferisce alle singolarità *virtuali* anzichè a quelle *effettive* (1), ma, per ciò che riguarda queste ultime, dà luogo ad eccezioni, come ha mostrato recentemente B. Segre (2) costruendo un esempio di curva algebrica piana C la cui polare generica non passa per taluno fra i punti multipli impropri di C. Questo esempio dà luogo ad eccezione anche per un teorema enunciato da Enriques, con il nome di *Legge di alternanza* (3), allo scopo di determinare il comportamento effettivo delle polari nei punti multipli.

Studiando la natura di tali eccezioni, in una Memoria in corso di stampa (4), ho rilevato come il comportamento nel punto singolare P della polare generica di C *dipenda in maniera essenziale dalla particolarità di* C *nell'ideale*, J, *associato a quella singolarità*. A questa conclusione sono giunto mediante considerazioni di carattere aritmetico poggianti sulla teoria delle frazioni continue regolari finite. Fra i principali risultati di tale indagine figurano i seguenti.

Le curve C di J, per le cui generiche prime polari vale la legge di alternanza, sono caratterizzate – tranne in un caso particolare determinato dalla proposizione 3. m) di loc. cit. in (4) – dal fatto che nella loro equazione non

(*) Nella seduta del 14 febbraio 1953.

(1) Cfr. ad esempio F. ENRIQUES–O. CHISINI, *Lezioni sulla teoria geometrica delle equazioni e delle funzioni algebriche*, vol. II, Zanichelli, Bologna, 1918, pp. 410–412.

(2) B. SEGRE, *Sullo scioglimento delle singolarità delle varietà algebriche*. « Ann. di Mat. » (IV), XXXIII, pp. 5–48 (1952).

(3) Loc. cit. in (1), pp. 438–442.

(4) E. VESENTINI, *Sul comportamento effettivo delle curve polari nei punti multipli*, « Ann. di Mat. » (IV), XXXIV (1953).

si annullano certi coefficienti, i quali individuano uno dei due ideali irriducibili contenuti in J. Da un punto di vista geometrico, quelle curve possono caratterizzarsi anche in altro modo, dicendo che esse sono tutte e sole le C per le cui generiche prime polari risulta minimo il numero delle diramazioni riunite in P.

Allorchè C non soddisfa a tali condizioni caratteristiche, le prime polari generiche di C dànno luogo ad un comportamento eccezionale, il quale dipende dalla struttura della singolarità cui J è associato. Fra queste singolarità è possibile caratterizzare quelle per le quali si presenta il fenomeno, segnalato da B. Segre, che nell'ideale ad esse associato esista qualche C le cui polari generiche non passino per taluno dei punti multipli di C infinitamente vicini a P.

2. La dimostrazione originale della legge di alternanza è stata conseguita tenendo conto delle molteplicità virtuali imposte alla generica prima polare di C, ed applicando in conseguenza i principî di scaricamento e di scorrimento [3]. Ma è ben noto che tali principî valgono soltanto per la curva *più generale* fra quelle aventi assegnate molteplicità virtuali. Dunque le condizioni caratteristiche per la validità della legge di alternanza, ottenute in loc. cit. in [4] mediante considerazioni di carattere diofanteo, esprimono le condizioni necessarie e sufficienti, alle quali deve soddisfare in J la curva C, affinché la sua generica curva polare si comporti come la più generale curva fra quelle alle quali siano imposte le molteplicità virtuali sopra dette. Sotto questo aspetto, le eccezioni rilevate da B. Segre sottolineano i limiti di validità dei principî di scaricamento e di scorrimento, e segnalano l'importanza della ricerca di criteri, analoghi a tali principi ma validi sotto ipotesi più ampie, i quali consentano la determinazione delle singolarità effettive della curva generica fra quelle di un dato sistema continuo soggette a prefissate molteplicità virtuali.

A questo problema conto di dedicare un altro lavoro, nel quale verrà approfondito l'esame dei principî di scaricamento e di scorrimento allo scopo, fra l'altro, di precisare in quale misura occorra effettivamente l'ipotesi che le curve alle quali essi si riferiscono abbiano « ordine abbastanza elevato » [5].

3. Non sempre è stato tenuto debito conto dei limiti di validità dei principî di scaricamento e di scorrimento, cui sopra si alludeva. In questo senso a qualche osservazione si presta una diseguaglianza contenuta in una recente Nota di L. Campedelli [6], prefiggentesi di colmare la lacuna segnalata da B. Segre nella trattazione di Nöther, lacuna già in altra guisa eliminata dallo stesso Segre con il Corollario del Teor. 13 a p. 28 del lavoro citato

(5) Loc. cit. in [7], pp. 428.

(6) L. Campedelli, *Sulle singolarità delle curve algebriche*, « Rend. Lincei » (8), XIII, pp. 234–238 (1952).

in [2]. A parte il caso particolare che interessa il Campedelli, esaminerò brevemente le condizioni per la validità della diseguaglianza sopra detta.

A p. 238 del suo lavoro, L. Campedelli, in base al principio di scaricamento, stabilisce la proposizione:

a) *se la molteplicità effettiva di* $P^{(i)}$, *si abbassa di uno rispetto alla virtuale, la somma* S_i *viene a superare la* R_i *di un'unità almeno,*

ove, essendo P un punto di una curva algebrica piana, φ, ed essendo $P^{(1)}, \cdots, P^{(i)}, \cdots, P^{(k)}$, punti di φ infinitamente vicini a P, ciascuno appartenente all'intorno del precedente, S_i e R_i indicano le somme delle molteplicità, rispettivamente, effettive e virtuali, dei punti $P, P^{(1)}, \cdots, P^{(i-1)}$.

Dalla proposizione *a*) nell'ipotesi che i punti $P^{(i)}, \cdots, P^{(k)}$, presentino molteplicità virtuali h e molteplicità effettive $h - 1$, e nelle circostanze che lo interessano, il Campedelli deduce la relazione:

$$S_i \geqq R_i + k - i + 1. \tag{1}$$

A norma delle osservazioni del numero precedente, sia la *a*) che la (1), *a priori* valgono soltanto nell'ipotesi che la φ sia la *più generale* curva fra quelle soddisfacenti al prefissato insieme di molteplicità virtuali. Esse necessitano pertanto di qualche precisazione ove le si voglia applicare alle curve di un particolare sistema lineare, quale è appunto quello delle prime polari; precisazione indispensabile poiché si costruiscono facilmente esempi di sistemi lineari per la generica curva dei quali non risultano soddisfatte né la *a*), né la (1).

Darò un esempio in proposito nel n. 4. E mette conto di rilevare come la (1) possa non sussistere anche nel campo di validità del principio di scaricamento.

Si considerino all'uopo le curve φ (di ordine sufficientemente elevato) passanti per l'origine, P, e per i punti $P^{(1)}, P^{(2)}, \cdots, P^{(k)}$, infinitamente vicini a P sul ramo

$$y = \lambda x^{\frac{k-1}{k}} + \cdots, \qquad (\lambda \neq 0\,;\ k \text{ intero} \geqq 4),$$

con molteplicità virtuali eguali, rispettivamente, a $r\ (> 0)$, ed a $2, 2, \cdots, 2$.

Nell'ipotesi che r soddisfi alle limitazioni $k - 1 \leq r < 2k$ ed a norma del principio di scaricamento, la φ più generale fra quelle considerate presenta in $P, P^{(1)}, P^{(2)}, \cdots, P^{(k)}$ molteplicità effettive eguali, rispettivamente, a $r + 1, 1, 1, \cdots, 1$; cosicché, adottando le notazioni di Campedelli, si ha per essa:

$$S_1 = R_1 + 1,$$

mentre, secondo la (1), dovrebbe essere

$$S_1 \geqq R_1 + k,$$

con $k \geqq 4$.

Nell'ipotesi che sia $r + 1 < k$, dal principio di scaricamento si ha che la più generale φ fra quelle soggette alle molteplicità virtuali sopra indicate

passa per P con molteplicità effettiva eguale a $r+2$, e non passa per $P^{(1)}, P^{(2)}, \cdots, P^{(k)}$. In tal caso si ha:

$$S_1 = R_1 + 2 = r + 2;$$

questa relazione mostra che il numero di cui aumenta la somma S_1 quando la molteplicità effettiva di $P^{(1)}$ si annulla, può risultare funzione *non decrescente* (e non necessariamente *crescente* in senso stretto) del numero degli intorni di $P^{(1)}$ che contengono punti multipli.

Dall'esempio precedente, nel caso: $k - 1 \leq r < 2k$, risulta che, ove si voglia mantenere valida la (1), occorre sostituirvi k con un intero, k', il quale indichi il numero degli intorni di $P^{(i-1)}$ contenenti $P^{(i)}, \cdots, P^{(k)}$, computato secondo opportune convenzioni [7].

4. Sia Σ il sistema lineare ∞^4 descritto, al variare dei parametri a, b, c, d, e, dalla curva di equazione

$$(2) \qquad ax^{2(h+1)} + by^{2(h+1)} + cx^{2h+1}y^{h+1} + dx^{4h+1}y + ex^{4h+3} = 0,$$

ove h sia un arbitrario intero ≥ 3. Le curve, φ, di Σ che passano per l'origine, P, e per i punti $P^{(1)}, P^{(2)}, \cdots, P^{(h+1)}$, infinitamente vicini a P sul ramo

$$y = \lambda x^{\frac{2h+1}{h+1}} + \cdots, \qquad (\lambda \neq 0),$$

con molteplicità virtuali eguali, rispettivamente, a $2(h+1)$, ed a $2h, 2, \cdots, 2$, sono tutte e sole le curve del sistema lineare $\Sigma_1 \subset \Sigma$, che si ottiene da (2) assumendovi $a = 0$. La generica curva di Σ_1, precisamente ogni curva di Σ_1 tale che: $bcde \neq 0$, presenta in $P, P^{(1)}, P^{(2)}, \cdots, P^{(h+1)}$ molteplicità effettive eguali, rispettivamente, a $2(h+1), 2h+1, 1, \cdots, 1$.

Per essa risulta:

$$S_2 = R_2 + 1 \quad , \quad S_{j+1} = R_{j+1} - j + 2 , \quad (j = 2, \cdots, h).$$

La prima di queste relazioni è in accordo con la *a*), ma non con la (1), per la quale dovrebbe aversi $S_2 \geq R_2 + h \geq R_2 + 3$; la seconda è in contraddizione con la *a*) in quanto, essendo $j \geq 2$, essa implica: $S_{j+1} \leq R_{j+1}$.

7) Riguardo a tali convenzioni, da tale esempio si arguisce che, *nelle ipotesi in cui è stata stabilita la* (1), se $P^{(i)}, \cdots, P^{(j)}$ $(1 \leq i < j \leq k)$ sono i punti *fronteggianti* $P^{(i-1)}$, essi portano il contributo di una sola unità a k'. Dunque, nella successione di punti multipli successivi a $P^{(i-1)}$ – punti che, assumendo i sufficientemente elevato, è lecito supporre dotati tutti di una medesima molteplicità h (> 1) (cfr. [6], p. 236) – la qualità di punti *fronteggianti* può essere assunta soltanto da un gruppo di un numero *finito* di punti, $P^{(i)}, \cdots, P^{(j)}$ $(j \geq i)$, nell'ipotesi che $P^{(i-1)}$ abbia molteplicità maggiore di h. Allora, essendo j finito, è lecito al Campedelli prescindere dall'esame cui dà luogo la presenza di punti *fronteggianti*, nel caso preso in esame. Cfr. in proposito, oltre alla Nota citata in [6], anche L. CAMPEDELLI, *Lezioni di Geometria*, vol. II, parte I, *Le curve e le superficie*, cap. II, n. 6, 11, Padova, Cedam 1953.

Geometria. — *Sul numero dei complessi algebrici di rette, di ordine assegnato, che contengono una data rigata algebrica.* Nota di DIONISIO GALLARATI, presentata (*) dal Corrisp. B. SEGRE.

1. Il prof. B. Segre (1) ha dimostrato che il numero massimo di complessi lineari di rette, tra loro linearmente indipendenti, ai quali possa appartenere una curva algebrica irriducibile Γ immersa in uno spazio S_r (nel senso che a tali complessi appartenga la rigata delle tangenti di Γ), è $\binom{r-1}{2}$, e che per $r > 3$ tale massimo è raggiunto soltanto dalle curve razionali normali. Invece, come già aveva notato G. Gherardelli (2), nello spazio ordinario possono esistere curve di genere e di moduli qualunque le cui tangenti stiano in un complesso lineare, e di tali curve B. Segre ha assegnato una rappresentazione parametrica in forma finita.

Qui mi occupo, più in generale, di determinare il numero dei complessi algebrici d'ordine m tra loro linearmente indipendenti che contengono una data rigata algebrica $\mathcal{F}$ appartenente allo spazio S_r, non necessariamente costituita dalle tangenti d'una curva algebrica Γ.

Dimostro dapprima che *una rigata algebrica appartenente allo spazio* S_r *non può appartenere a più di*

$$\theta_m = \frac{1}{m+1}\binom{m+r}{r}\binom{m+r-1}{r-1} - m(r-1) - 1$$

complessi algebrici d'ordine m *di rette di* S_r, *tra loro linearmente indipendenti*; successivamente provo che, *per* $m > 1$, *tale limite massimo è raggiunto dalle rigate* V_2^{r-1} *razionali normali e dai coni che da un punto proiettano una curva razionale normale* C^{r-1} *di* S_{r-1}, e che, *per* $m = 1$, *il limite* θ_1 *è raggiunto dalle rigate razionali normali e da tutti i coni*. In un secondo tempo inverto quest'ultima proposizione, giungendo così a *caratterizzare le rigate razionali normali ed i coni, come rigate appartenenti al massimo numero possibile di complessi lineari linearmente indipendenti.*

Inoltre assegno delle limitazioni per il numero dei complessi di rette di ordine m, linearmente indipendenti, cui appartiene una data rigata algebrica, e noto come da alcuni dei risultati precedenti si possano dedurre proprietà della grassmanniana delle rette di S_r, che non sarebbe facile ottenere direttamente.

(*) Nella seduta del 14 febbraio 1953.

(1) B. SEGRE, *Sulle curve algebriche le cui tangenti appartengono al massimo numero di complessi lineari indipendenti*. «Memorie Acc. Naz. dei Lincei», ser. 6ª, vol. VII, fasc. XIX, pp. 577–592 (1928).

(2) G. GHERARDELLI, *Sul genere delle curve sghembe le cui tangenti appartengono ad un complesso lineare*. «Boll. U.M.I.», pp. 120–122 (1926).

2. Indicherò con W la grassmanniana delle rette di S_r e con $R = \binom{r+1}{2} - 1$ la dimensione dello spazio cui essa appartiene [3]; con Σ il sistema lineare di tutte le forme V^m_{R-1} di S_R, con $\rho_m - 1$ la sua dimensione e con γ_m il massimo numero di forme di Σ, linearmente indipendenti, passanti per W. Con Ω^m indicherò un complesso algebrico di rette, d'ordine m, dello spazio S_r; denoterò inoltre con Γ^* la curva immagine di $\mathcal{F}$ su W, con r^* la dimensione dello spazio cui Γ^* appartiene, con n e p l'ordine ed il genere di Γ^* e di $\mathcal{F}$, con α_m il massimo numero di Ω^m linearmente indipendenti contenenti $\mathcal{F}$ e con β_m il massimo numero di V^m_{R-1} di S_R linearmente indipendenti passanti per Γ^*. Infine ε_m denoterà la postulazione di W rispetto alle V^m_{R-1} di S_R; è noto che [4]

$$\varepsilon_m = \frac{1}{m+1}\binom{m+r}{r}\binom{m+r-1}{r-1}.$$

3. Se $\mathcal{F}$ è una rigata algebrica appartenente allo spazio S_r, la serie lineare segata su $\mathcal{F}$ dagli $\infty^{\varepsilon_m - 1}$ Ω^m di S_r non può avere dimensione inferiore ad $m(r-1)$, giacché prese arbitrariamente su $\mathcal{F}$ $m(r-1)$ generatrici esiste sempre qualche Ω^m che le contiene, spezzato in Ω^1 speciali, come si vede osservando che esistono degli S_{r-2} appoggiati ad $r-1$ rette. Si ha dunque $\varepsilon_m - 1 - \alpha_m \geq m(r-1)$, ossia

$$\alpha_m \leq \theta_m;$$

in particolare, per $m = 1$: *una rigata algebrica di* S_r *non può appartenere a più di* $\binom{r}{2}$ *complessi lineari di rette, tra loro linearmente indipendenti.*

Osserviamo che essendo $r^* = R - \alpha_1$, $r^* \leq n$, risulta intanto $\alpha_1 \geq R - n$; più precisamente, se i è l'indice di specialità della $g^{r^*}_n$ segata su Γ^* dagli S_{r^*-1} dello spazio S_{r^*} cui essa appartiene, si ha $\alpha_1 \geq R - n + p - i$.

Nell'ipotesi che $\mathcal{F}$ sia *normale*, *non speciale*, e *non cono*, essendo $r = n - 2p + 1$ [5] *risulta certamente* $i = 0$ (poiché $n = r + 2p - 1 > 2p - 2$), sicché: *una rigata normale non speciale dello spazio* S_r, *non cono e di genere* p, *appartiene ad almeno* $\binom{r}{2} - p$ *complessi lineari di rette linearmente indipendenti.*

(3) Per le proprietà fondamentali della W, cfr. F. Severi, *Sulla varietà che rappresenta gli spazi subordinati di data dimensione immersi in uno spazio lineare.* « Ann. di Mat. », vol. 24_3, pp. 89–120 (1915).

(4) C. H. Sisam, *On algebraic hyperconical connexes in spaces of r dimensions.* « Atti della R. Acc. delle Scienze di Torino », vol. XLVI, pp. 481–487 (1911); cfr. anche F. Severi, loc. cit. Il Severi determina ivi la postulazione della grassmanniana V_t degli S_k di S_r per le forme di dato ordine m dello spazio in cui V_t è immersa, ed osserva che *la formula di postulazione vale per ogni valore dell'ordine m.*

(5) È noto che una rigata normale d'ordine n e genere p che non sia un cono, appartiene, in generale, ad uno spazio di dimensione $n - 2p + 1$: precisamente una rigata, non cono, normale e speciale, con sezioni iperpiane di indice di specialità j appartiene ad $S_{n-2p+1+j}$. Cfr. C. Segre, *Courbes et surfaces réglées.* « Math. Annalen », 1892; cfr. anche F. Enriques, *Le superficie algebriche*, Bologna 1949, p. 136.

Se invece $\mathfrak{F}$ è una rigata speciale, le cui sezioni iperpiane siano curve speciali di indice j, appartenente ad uno spazio ad $r = n - 2p + 1 + j - \rho$ dimensioni (sempre escluso il caso del cono), la $g_n^{r^*}$ è certamente non speciale quando $j \leq \rho + 4$ (perché in tal caso, essendo $r \geq 3$, risulta $n = r + 2p - 1 - (j - \rho) \geq 3 + 2p - 1 - 4 = 2p - 2$) e pertanto: *una rigata algebrica, non cono, d'ordine n e genere p, speciale di indice j, appartenente ad uno spazio ad* $r = n - 2p + 1 + j - \rho$ *dimensioni, se* $j \leq \rho + 4$, *appartiene ad almeno* $\binom{r}{2} - p + j - \rho$ *complessi lineari di rette, linearmente indipendenti.*

4. Consideriamo ora gli Ω^m linearmente indipendenti cui $\mathfrak{F}$ appartiene. Le V_{R-1}^m di S_R segano su Γ^* la serie m-pla della $g_n^{r^*}$ segata su Γ^* dagli iperpiani di S_{r^*}. Tale serie ha ordine mn e dimensione $\rho_m - 1 - \beta_m$, e quindi si ha in ogni caso $\beta_m \geq \rho_m - mn - 1$. Il sistema Φ' segato su W dal sistema Φ delle V_{R-1}^m di S_R passanti per Γ^* ha dimensione

$$\alpha_m - 1 = \beta_m - 1 - \gamma_m ,$$

in quanto γ_m, massimo numero di forme di Σ linearmente indipendenti passanti per W, è anche il massimo numero di forme linearmente indipendenti appartenenti a Φ e passanti per W. Ma è $\gamma_m = \rho_m - \varepsilon_m$; e quindi si ha $\alpha_m \geq \rho_m - mn - 1 - \rho_m + \varepsilon_m$, ossia

$$\alpha_m \geq \varepsilon_m - mn - 1.$$

È poi possibile precisare qualcosa di più quando $\mathfrak{F}$ sia priva di generatrici multiple e sia $m \geq n - 2$, perché in tal caso la serie m-pla della $g_n^{r^*}$ è certamente completa e non speciale [6], essendo $g_n^{r^*}$ priva di gruppi neutri. Si ha allora $\rho_m - 1 - \beta_m = mn - p$, e quindi

$$\alpha_m = \varepsilon_m - mn + p - 1 ,$$

sicché: *una rigata algebrica* $\mathfrak{F}$ *d'ordine n e genere p, che sia priva di generatrici multiple ed appartenga ad uno spazio* S_r, *è contenuta in* α_m Ω^m *linearmente indipendenti, di ordine assegnato* $m \geq n - 2$, *ove*

$$\alpha_m = \frac{1}{m+1}\binom{m+r}{r}\binom{m+r-1}{r-1} - mn + p - 1.$$

Il risultato continua a valere per $m < n - 2$, purché si sappia che la serie m-pla della $g_n^{r^*}$ sia completa e non speciale. Ciò si verifica di fatto per ogni m, nel caso particolare delle rigate razionali normali, le quali pertanto *appartengono al massimo numero possibile* $\theta_m = \varepsilon_m - m(r-1) - 1$ di Ω^m *linearmente indipendenti*.

(6) G. CASTELNUOVO, *Sui multipli di una serie lineare di gruppi di punti appartenenti ad una curva algebrica*, « Rend. Cir. Mat. di Palermo », t. VII (1893). Ivi si osserva anche che, escludendo le curve razionali, si può sostituire il limite $n - 2$ col limite più basso $n - 3$.

Si può notare ancora che, qualora $\mathfrak{F}$ sia una rigata *normale, non speciale*, e *non cono* (onde $r = n - 2p + 1$), la g_n^{r*} e tutti i suoi multipli risultano non speciali e quindi, qualunque sia m: $\beta_m \geqq \rho_m - 1 - mn + p$, e pertanto $\alpha_m \geqq \varepsilon_m - m(r + 2p - 1) + p - 1$. Se invece $\mathfrak{F}$ ha indice di specialità j ed appartiene ad S_r, con $r = n - 2p + 1 + j - \rho$, le considerazioni precedenti continuano ad esser valide solamente quando Γ^* è non speciale; e ciò si verifica di certo se $j \leq \rho + 4$. Si ottiene così che *il numero degli* Ω^m *linearmente indipendenti contenenti una siffatta rigata, con* $j \leq \rho + 4$, *vale almeno* $\theta_m - p(2m - 1) - m(\rho - j)$.

5. Dalle nostre considerazioni abbiamo spesso escluso i coni, in quanto per essi il sistema delle sezioni iperpiane risulta sovrabbondante. Ma il caso del cono si esaurisce direttamente in poche parole.

Se $\mathfrak{F}$ è un cono, la curva Γ^* sta in uno spazio lineare giacente su W. Ora, B. Segre [7] ha determinato tutti gli spazi lineari appartenenti alla grassmanniana V_t degli S_k di S_r. Per $k = 1$, si ha che W contiene $\infty^{3(r-2)} S_2$, immagini ciascuno delle rette di un dato S_2 di S_r, ed $\infty^r S_{r-1}$, immagini ciascuno delle rette di S_r che passano per un dato punto; e non vi sono altri spazi lineari, oltre ai suddetti ed ai loro spazi subordinati.

Dunque, se $\mathfrak{F}$ è un cono, Γ^* appartiene ad un S_{r-1} giacente su W e, nell'ipotesi che $\mathfrak{F}$ appartenga ad S_r e non ad uno spazio di dimensione inferiore, Γ^* appartiene ad S_{r-1} e non ad uno spazio di dimensione minore. È evidente allora che il numero dei complessi lineari indipendenti cui $\mathfrak{F}$ appartiene eguaglia il numero degli S_{R-1} di S_R linearmente indipendenti che contengono un dato S_{r-2} e quindi è esattamente $\binom{r+1}{2} - r = \binom{r}{2} = \theta_1$, e si ha così che, *oltre alle* V_2^{r-1} *rigate, anche i coni (algebrici o non) stanno nel massimo numero* θ_1 *di* Ω^1 *linearmente indipendenti.*

Consideriamo ora gli Ω^m cui un dato cono $\mathfrak{F}$ appartiene, limitandoci al caso che le sezioni iperpiane di $\mathfrak{F}$ siano curve normali e non speciali, sicché $r - 1 = n - p$.

Allora Γ^* è una curva d'ordine $n = r + p - 1$ normale e non speciale, appartenente ad un S_{r-1} giacente su W, e la serie segata su Γ^* dalle V_R^m di S_R è completa qualunque sia m, sicché:

$$\alpha_m = \varepsilon_m - mn + p - 1 = \theta_m - p(m - 1).$$

Segue da ciò (facendo $p = 0$) che, *oltre alle rigate razionali normali, anche i coni a sezioni razionali normali appartengono al massimo numero possibile* θ_m *di* Ω^m *linearmente indipendenti.*

6. Suppongasi che $\mathfrak{F}$ sia la rigata delle tangenti di una curva algebrica irriducibile Γ^ν, d'ordine ν e genere p, appartenente ad S_r. Si ha in tal caso:

7) B. SEGRE, loc. cit., n. 7.

$r^* = R - \alpha_1 ; n = 2(\nu + p - 1)$, e la $g_n^{r^*}$ è *sempre non speciale*. Da quanto precede risulta allora che

$$(1) \quad \begin{cases} \alpha_m \geq \delta_m & \text{(per ogni } m\text{)} \\ \alpha_m = \delta_m & \text{(per } m \geq 2\nu + 2p - 4 \text{ e } \Gamma^\nu \text{ priva di bitangenti)}, \end{cases}$$

ove si è posto

$$\delta_m = \varepsilon_m - 2m(\nu + p - 1) + p - 1.$$

Se Γ^ν è speciale di indice i ed appartiene ad uno spazio a $\nu - p + i - \rho$ dimensioni, risulta $\nu = r + p + \rho - i$ e quindi

$$\delta_m = \varepsilon_m - 2m(r + 2p + \rho - i - 1) + p - 1.$$

In particolare, per $m = 1$, si ottiene $\alpha_1 \geq \binom{r-1}{2} - 3p - 2\rho + 2i$.

Notiamo che, per valori abbastanza piccoli di m, nella (1) può effettivamente valere il segno di diseguaglianza: ciò si verifica, ad esempio, per le curve di genere massimo appartenenti ad S_r ed aventi un dato ordine $\nu \geq 2r$, le quali stanno in $\binom{r-1}{2}$ quadriche linearmente indipendenti [8], onde le loro tangenti appartengono ad altrettanti complessi quadratici. Così, per $r = 3$, le curve di genere massimo tra quelle di dato ordine ν appartengono ciascuna ad una quadrica; e quindi esse appartengono, come si vede senza difficoltà, ad almeno $\frac{1}{2} m \binom{m+1}{3} \Omega^m$ linearmente indipendenti; e si controlla subito che questo numero può superare δ_m. Notiamo che, se $\nu > 3$, tali curve non appartengono ad alcun complesso lineare [9].

7. Dimostriamo ora che: *Se una rigata di S_r appartiene al numero massimo di complessi lineari di rette di S_r linearmente indipendenti, essa è una rigata razionale normale, o pure un cono.*

All'uopo premettiamo il seguente

LEMMA. – *Se una rigata $\mathfrak{F}$ di S_r appartiene ad $N\,\Omega^1$ linearmente indipendenti, una sua generica proiezione da un punto di S_r su un S_{r-1} è una $\mathfrak{F}'$ appartenente ad almeno $N - r$ complessi lineari linearmente indipendenti. Se poi il centro di proiezione sta su $\mathfrak{F}$, il numero dei complessi lineari linearmente indipendenti cui $\mathfrak{F}'$ appartiene è almeno $N - r + 1$.*

Siano $x_0, x_1, \cdots, x_r$ coordinate proiettive omogenee di punto in S_r e sia $T(A_0, A_1, \cdots, A_r)$ il relativo $(r+1)$-edro di riferimento. Se $\mathfrak{F}$ è rappresentata parametricamente mediante le equazioni

$$(2) \qquad \sigma x_i = a^i(u) + v b^i(u) \qquad (i = 0, 1, \cdots, r),$$

ove $a^i(u)$ e $b^i(u)$ denotano funzioni di u finite e continue in un intorno di $u = 0$, le coordinate di una sua generica generatrice sono

$$(3) \qquad p^{ik} = a^i(u)\, b^k(u) - a^k(u)\, b^i(u) \qquad (i < k)$$

8) G. CASTELNUOVO. *Ricerche di geometria sulle curve algebriche.* « Atti della R. Acc. delle Scienze di Torino », vol. XXIV, 10 febbraio 1889.

(9) G. GHERARDELLI, loc. cit.

Se $\mathfrak{F}$ appartiene ad N Ω^1 linearmente indipendenti, le p^{ik} soddisfano ad un sistema lineare del tipo

$$\omega^j_{ik}\, p^{ik} = 0 \qquad (j = 1, \cdots, N\ ;\ i < k), \tag{4}$$

con $\| \omega^j_{ik} \|$ matrice di rango N ad N righe ed $R + 1$ colonne, sicché valgono le

$$\omega^j_{ik}\, [a^i(u)\, b^k(u) - a^k(u)\, b^i(u)] \equiv 0 \qquad (j = 1, \cdots, N). \tag{5}$$

Eliminando dal sistema (4) le r variabili p^{ok} $(k = 1, \cdots, r)$, si ottiene che le p^{hl} per cui $hl \neq 0$ sono vincolate da almeno $N - r$ relazioni lineari indipendenti; e ciò significa che la proiezione $\mathfrak{F}'$ di $\mathfrak{F}$ dal punto A_o sull'$S_{r-1} \equiv A_1 \cdots A_r$ soddisfa alla prima parte del lemma.

Supponiamo ora che A_o appartenga ad $\mathfrak{F}$, e che tale punto si ottenga dalle (2) ponendovi $u = v = 0$; ciò implica che

$$a^o(0) \neq 0 \quad ; \quad a^i(0) = 0 \qquad (i = 1, 2, \cdots, r).$$

Supponiamo inoltre che i numeri $b^i(0)$ $(i = 0, 1, \cdots, r)$ non siano tutti nulli. Posto

$$a^i(u) = u\varphi^i(u) \qquad (i = 1, 2, \cdots, r),$$

la proiezione $\mathfrak{F}'$ di $\mathfrak{F}$ da A_o sull'$S_{r-1} \equiv A_1 \cdots A_r$ è luogo delle rette che congiungono i punti $b^i(u)$ e $\varphi^i(u)$ $(i = 1, \cdots, r)$. Le identità (5), nel caso presente, divengono:

$$\omega^j_{ok}\, [a^o(u)\, b^k(u) - u\varphi^k(u)\, b^o(u)] + u\omega^j_{hl}\, [\varphi^h(u)\, b^l(u) - \varphi^l(u)\, b^h(u)] \equiv 0 \tag{6}$$

$(j = 1, \cdots, N\ ;\ k, h, l = 1, \cdots, r\ ;\ h < l)$, e ponendovi $u = 0$ si ottiene che sono soddisfatte le relazioni

$$\omega^j_{ok}\, a^o(0)\, b^k(0) = 0;$$

ma allora, in virtù delle ipotesi fatte, la matrice

$$\| \omega^j_{ok} \|_{(j = 1, \cdots, N\ ;\ k = 1, \cdots, r)}$$

ha rango $\rho \leq r - 1$, e le forme lineari

$$\xi_j = \omega^j_{ok}\, p^{ok}$$

si possono esprimere mediante $\rho \leq r - 1$ variabili; e quindi l'eliminazione delle p^{ok} dal sistema (4) conduce ad almeno $N - r + 1$ relazioni lineari indipendenti tra le p^{hl} con $hl \neq 0$. Con ciò è dimostrata anche la seconda parte del lemma.

Sia ora $\mathfrak{F}$ una rigata di S_r appartenente ad $\binom{r}{2}\Omega^1$ linearmente indipendenti. La proiezione di $\mathfrak{F}$ da un suo punto su un S_{r-1} è, per il lemma, una $\mathfrak{F}'$ appartenente ad almeno

$$\binom{r}{2} - r + 1 = \binom{r-1}{2}$$

complessi lineari di rette linearmente indipendenti. Se pertanto si proietta $\mathfrak{F}$ su un S_3 da un S_{r-4} generico $(r-3)$-segante $\mathfrak{F}$, si ottiene una rigata di S_3 appartenente ad almeno *tre* complessi lineari di rette tra loro indipendenti, ossia una quadrica oppure un cono: ciò prova che $\mathfrak{F}$ *è una rigata razionale normale in* S_r, *oppure un cono.*

Si noti che, per giungere a tale risultato, non occorre supporre che $\mathfrak{F}$ sia algebrica.

Dalle cose precedenti si trae pure che: *una rigata ellittica, non cono, normale in* S_r, *appartiene esattamente ad* $\binom{r}{2} - 1$ Ω^1 *linearmente indipendenti.*

8. Le considerazioni del n. 7 sono valide anche se $\mathfrak{F}$ è la rigata delle tangenti di una curva Γ; ora tuttavia conviene aggiungere qualche osservazione relativamente al caso in cui il centro di proiezione sia un punto di Γ.

Il prof. B. Segre ha dimostrato in proposito che, se $r > 4$ ed una curva Γ irriducibile di S_r appartiene ad $\binom{r-1}{2}$ complessi lineari di rette linearmente indipendenti, la proiezione di Γ da un suo punto su un S_{r-1} è una curva Γ' appartenente ad $\binom{r-2}{2} = \binom{r-1}{2} - r + 2$ complessi lineari indipendenti. Più in generale, si ha che:

Se Γ *appartiene ad* N Ω^1 *linearmente indipendenti, e se* P *è un punto di* Γ, *la proiezione di* Γ *da* P *su un* S_{r-1} *è una curva* Γ' *che in generale appartiene ad almeno* $N - r + 2$ *complessi lineari di rette linearmente indipendenti; ma può avvenire che* Γ' *appartenga soltanto ad* $N - r + 1$ *complessi lineari indipendenti: se ciò accade, la curva* Γ *ammette in* P *un piano iperosculatore.*

Siano invero

$$\sigma x_i = a^i(u) \qquad (i = 0, 1, \cdots, r) \tag{7}$$

le equazioni parametriche di Γ, ove $a^i(u)$ denotano funzioni di u definite in un intorno di $u = 0$ e di classe differenziale $\mathcal{C}^3$; e supponiamo che $P \equiv A_0(1, 0, \cdots, 0)$ si ottenga dalle (7) per $u = 0$: ciò implica che

$$a^0(0) \neq 0 \quad ; \quad a^i(0) = 0 \qquad (i = 1, 2, \cdots, r).$$

Poniamo allora

$$a^i(u) = u\varphi^i(u) \qquad (i = 1, 2, \cdots, r),$$

e supponiamo che i numeri $\varphi^i(0)$ non siano tutti nulli. Con ciò le N relazioni (6) divengono:

$$\omega^j_{0k}\left[a^0\varphi^k + u\left(a^0\frac{d\varphi^k}{du} - \varphi^k\frac{da^0}{du}\right)\right] + u^2\,\omega^j_{hl}\left(\varphi^k\frac{d\varphi^l}{du} - \varphi^l\frac{d\varphi^k}{du}\right) = 0, \tag{8}$$

e ponendo in esse $u = 0$ si ha che sono soddisfatte le relazioni

$$\omega^j_{0k}\,\varphi^k(0) = 0 \qquad (j = 1, \cdots, N). \tag{9}$$

Derivando le (8) rispetto ad u e ponendo poi $u = 0$, si ottengono le

$$\omega^j_{0k}\left(\frac{d\varphi^k}{du}\right)_{u=0} = 0 \qquad (j = 1, \cdots, N) \tag{10}$$

e la coesistenza delle (9), (10) è possibile solo in due casi:

1° il rango della matrice $\| \omega_{ok}^{j} \|$ è $\rho \leq r - 2$.

2° il rango della matrice $\| \omega_{ok}^{j} \|$ è $\rho = r - 1$, ma

$$\left(\frac{d\varphi^k}{du}\right)_{u=0} = \lambda \varphi^k(0) \qquad (k = 1, 2, \cdots, r).$$

Nel primo caso, la curva Γ' proiezione di Γ da P sull'$S_{r-1} \equiv A_1 \cdots A_r$ appartiene ad almeno $N - r + 2$ complessi lineari indipendenti; nel secondo caso, Γ' appartiene ad almeno $N - r + 1$ complessi lineari indipendenti e la traccia sull'$S_{r-1} \equiv A_1 \cdots A_r$ della tangente a Γ in P è un flesso di Γ', sicché Γ ammette in P un piano iperosculatore. In quest'ultimo caso, Γ' non può appartenere a più di $N - r + 1$ complessi lineari indipendenti, perché un legame lineare tra le coordinate delle tangenti di Γ' che non sia conseguenza degli N legami lineari che vincolano le coordinate delle tangenti di Γ darebbe un nuovo complesso lineare cui Γ dovrebbe appartenere.

9. Da ultimo, rileviamo le seguenti proprietà della grassmanniana W delle rette di S_r, che si deducono immediatamente da talune delle cose dette nei nn. 3 e 7.

Se W contiene una curva appartenente ad un S_h, quest'ultimo deve stare su W non appena si sappia che è $h \leq r - 2$, o che – essendo $h = r - 1$ – l'ordine della curva sia maggiore di $r - 1$.

Geometria. — *Geometria pseudo-kähleriana.* Nota di HEINRICH GUGGENHEIMER, presentata (*) dal Socio E. BOMPIANI.

Chiamo *pseudo-kähleriana* una struttura quasi-complessa (1) per la quale la condizione d'integrabilità di Eckmann-Frölicher (2) è soddisfatta e la forma esteriore associata (3)

$$e = e_{ik}\, dx^i \wedge dx^k \quad , \quad \overset{m}{\wedge} e \neq 0, \tag{1}$$

è chiusa

$$de = 0. \tag{2}$$

Una struttura pseudo-kähleriana reale analitica è sempre indotta da una struttura kähleriana complessa analitica (4).

(*) Nella seduta del 14 febbraio 1953.

(1) Per la definizione delle strutture quasi complesse si veda per esempio C. EHRESMANN, «Coll. de Top. Alg. C.N.R.S.», Parigi, 1947; H. HOPF, «Rend. Mat.» (5), X, pp. 169–182; W. V. D. HODGE, «Rend. Mat.» (5), XI, pp. 101–110.

(2) «C. R. Parigi», *232*, pp. 2284–2286 (1951).

(3) C. EHRESMANN, loc. cit. (1); H. GUGGENHEIMER, «Tohoku Math. Journ» (2), *4*, pp. 157–171.

(4) Loc. cit. (2) per le strutture kähleriane si veda anche H. GUGGENHEIMER, «Comm. Math. Helv.», XXV, pp. 257–297 (1951).

Le funzioni che intervengono nel seguito sono funzioni cinque volte differenziabili *a valori complessi* di $2m$ variabili *reali*. Le componenti a_k^i della trasformazione differenziabile I dei vettori tangenti alla varietà V_{2m} sulla quale è definita la struttura pseudo-kähleriana, con

$$a_p^i \, a_j^p = -\delta_j^i \tag{3}$$

sono supposte reali. Si pone, in un sistema di coordinate locali di V_{2m},

$$a_{ke}^i = \frac{\partial a_k^i}{\partial x^e} - \frac{\partial a_e^i}{\partial x^k}, \tag{4}$$

la condizione di Eckmann–Frölicher essendo

$$t_{ke}^i = a_{pe}^i \, a_k^p - a_{pk}^i \, a_e^p = 0 \tag{5}$$

t_{ke}^i è un *tensore*.

L'estensione canonica di I ai p–vettori contravarianti $\mathfrak{x}_p$ tangenti a V_{2m} indichiamo ancora con I. Si definisce poi una trasformazione delle p–forme differenziali f^p (p–vettori covarianti tangenti a V_{2m}) per

$$Cf^p(\mathfrak{x}_p) = f^p(I\bar{\mathfrak{x}}^p). \tag{6}$$

Alla differenziazione esteriore d associamo l'operazione

$$\bar{d} = C\,d\,C. \tag{7}$$

La condizione (5) equivale a [5]

$$d\bar{d} + \bar{d}d = 0. \tag{8}$$

Una p–forma differenziale è *positivamente pura*, se

$$Cf_+^p = (\sqrt{-1})^p \bar{f}^p, \tag{9}$$

negativa pura nel caso

$$Cf_-^p = -(\sqrt{-1})^p \bar{f}^p. \tag{10}$$

2. La forma quadratica e essendo chiusa, esiste localmente una forma lineare

$$f^1 = f_+^1 + f_-^1,$$

la cui derivata esteriore sia e:

$$df^1 = e. \tag{11}$$

(5) H. GUGGENHEIMER, loc. cit. (3); W. V. D. HODGE, loc. cit. (1).

Come si può sempre trovare un sistema locale di forme lineari [6] $\omega^1, \cdots, \omega^m$ tale che

$$e = \Sigma\, \omega^i \wedge \overline{\omega}^i \tag{12}$$

$$d\omega^i = \omega^i_j \wedge \omega^j \quad , \quad \omega^i_j + \overline{\omega}^j_i = 0, \tag{13}$$

e che

$$ds^2 = \Sigma\, \omega^i \overline{\omega}^i \tag{14}$$

sia una metrica hermitiana su V_{2m}, si vede che si ha

$$f^1_+ = c_k\, \omega^k = \overline{f}^1_- , \tag{15}$$

$$\bar{d} f^1 = d\mathrm{C} f^1 = 0. \tag{16}$$

Esiste dunque, nel sistema di coordinate locali, una funzione $\mathrm{U}(x^1, \cdots, x^{2m})$ che verifica la

$$\bar{d}\mathrm{U} = f^1. \tag{17}$$

Rifacendo il calcolo si ottiene

$$e = -\bar{d}d\mathrm{U} = \frac{\partial^2 \mathrm{U}}{\partial x^i \partial x^\varrho}\, a^\varrho_k\, dx^i \wedge dx^k + \mathrm{C}\, \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial x^i}\, \frac{\partial a^l_k}{\partial x^\varrho}\, dx^e \wedge dx^k$$

$$= \frac{\partial^2 \mathrm{U}}{\partial x^i \partial x^\varrho}\, dx^i \wedge \mathrm{I}\, dx^\varrho + \mathrm{C}\, \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial x^i}\, d\mathrm{I}\, dx^i,$$

ma

$$d\mathrm{I}\, dx^i = 0$$

perché esiste (globalmente) una connessione riemanniana (simmetrica) per la quale il tensore a^i_k ha tutte le sue derivate covarianti nulle [7]. Il risultato finale è allora

$$e = \frac{\partial^2 \mathrm{U}}{\partial x^i \partial x^k}\, dx^i \wedge \mathrm{I} dx^k, \tag{18}$$

che corrisponde alla nota formola del Kähler [8] nel caso complesso analitico

$$e = \sqrt{-1}\, \frac{\partial^2 \mathrm{U}}{\partial z^i \partial \bar{z}^k}\, dz^i \wedge d\bar{z}^k,$$

risultato che è stato la base di tutte le ricerche sulle varietà kähleriane.

(6) P. Libermann, «C. R. Parigi», *233*, pp. 17–19 (1951).

(7) Questo risultato, che si trova per il caso complesso analitico nell'articolo del Hodge [1], è dovuto nel caso pseudokähleriano a Eckmann e Frölicher. La dimostrazione è stata presentata dal prof. Eckmann in una recente seduta del colloquio matematico di Zurigo.

(8) «Abh. Math. Sem. Hamburg», 9 pp. 173–186 (1933).

Meccanica. — *Nuovi complementi analitici e numerici allo studio delle aste vibranti*(*). Nota II(**) di DOMENICO CALIGO, presentata dal Socio G. KRALL.

In questa seconda Nota si calcolano – come preannunciato nella precedente – alcuni integrali occorrenti alla determinazione delle frequenze nel problema delle aste libere ad un estremo e con incastro elastico all'altro: le caratteristiche elastiche del vincolo sono rappresentate dalla costante $\varkappa$.

Per la definizione di questa e per il calcolo degli autovalori del problema, che si traduce nel sistema differenziale:

$$\frac{d^4 w}{d\xi^4} - \delta^4 w(\xi) = 0 \quad , \quad (0 \leq \xi \leq 1 \, , \, \varkappa \geq 0) \tag{8}$$

$$w(\xi)\Big|_{\xi=0} = 0 \quad , \quad \frac{dw}{d\xi} - \varkappa \frac{d^2 w}{d\xi^2}\Big|_{\xi=0} = 0 \quad , \quad \frac{d^2 w}{d\xi^2}\Big|_{\xi=1} = \frac{d^3 w}{d\xi^3}\Big|_{\xi=1} = 0, \tag{9}$$

rinviamo alla precedente Nota, dove è riportata anche una assai generale impostazione della questione.

3. AUTOSOLUZIONI DEL PROBLEMA (8)-(9). – L'autofunzione di ordine ρ, soluzione del problema (8)-(9), è:

$$w_\varrho(\xi) = H_\varrho \Big\{ - [\operatorname{Ch}\delta_\varrho \xi - \cos\delta_\varrho \xi] + \tag{15}$$

$$- \frac{\operatorname{Sh}\delta_\varrho \operatorname{sen}\delta_\varrho}{\operatorname{Ch}\delta_\varrho \operatorname{sen}\delta_\varrho - \operatorname{Sh}\delta_\varrho \cos\delta_\varrho} [\operatorname{Sh}\delta_\varrho \xi - \operatorname{sen}\delta_\varrho \xi] - \varkappa\delta_\varrho [\operatorname{Sh}\delta_\varrho \xi + \operatorname{sen}\delta_\varrho \xi] \Big\}, \quad (\rho \geq 1),$$

dove H_ϱ è una costante arbitraria e δ_ϱ è ora il ρ^{mo} autovalore, soluzione dell'equazione (11). La (11) stessa fornisce

$$\varkappa = \frac{1}{\delta_\varrho} \frac{1 + \operatorname{Ch}\delta_\varrho \cos\delta_\varrho}{\operatorname{Ch}\delta_\varrho \operatorname{sen}\delta_\varrho - \operatorname{Sh}\delta_\varrho \cos\delta_\varrho}. \tag{16}$$

Posto

$$\bar{w}_\varrho(\xi) = (\operatorname{Ch}\delta_\varrho \operatorname{sen}\delta_\varrho - \operatorname{Sh}\delta_\varrho \cos\delta_\varrho) \operatorname{Ch}\delta_\varrho \xi - (1 + \operatorname{Ch}\delta_\varrho \cos\delta_\varrho - \operatorname{Sh}\delta_\varrho \operatorname{sen}\delta_\varrho) \operatorname{Sh}\delta_\varrho \xi,$$

$$\bar{\bar{w}}_\varrho(\xi) = (\operatorname{Ch}\delta_\varrho \operatorname{sen}\delta_\varrho - \operatorname{Sh}\delta_\varrho \cos\delta_\varrho) \cos\delta_\varrho \xi - (1 + \operatorname{Ch}\delta_\varrho \cos\delta_\varrho + \operatorname{Sh}\delta_\varrho \operatorname{sen}\delta_\varrho) \operatorname{sen}\delta_\varrho \xi,$$

la (16) – sostituita nella (15) – permette di scrivere le autofunzioni e le loro derivate seconde nella forma

$$w_\varrho(\xi) = \frac{-H_\varrho}{\operatorname{Ch}\delta_\varrho \operatorname{sen}\delta_\varrho - \operatorname{Sh}\delta_\varrho \cos\delta_\varrho} [\bar{w}_\varrho(\xi) - \bar{\bar{w}}_\varrho(\xi)], \tag{18}$$

$$\frac{d^2 w_\varrho}{d\xi^2} = -\delta_\varrho^2 \frac{-H_\varrho}{\operatorname{Ch}\delta_\varrho \operatorname{sen}\delta_\varrho - \operatorname{Sh}\delta_\varrho \cos\delta_\varrho} [\bar{w}_\varrho(\xi) - \bar{\bar{w}}_\varrho(\xi)]. \tag{19}$$

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto Nazionale per le Applicazioni del Calcolo.

(**) Pervenuta all'Accademia il 15 settembre 1952; la precedente Nota I, dal medesimo titolo, è stata pubblicata in questi «Rendiconti», vol. XIV, fasc. 1, pp. 36-42 (1953).

L'utilizzazione dell'equazione delle frequenze (cfr. (16)) ha dunque consentito le decomposizioni (18) e (19) – mediante le (17) –; ciò renderà più rapido il calcolo degli integrali (5) e (6) [12].

4. Calcolo degli integrali (5) e (6). – *a*) Per effetto della legge di variabilità del momento di inerzia e delle masse, espressa dalle (10), gli integrali (5) e (6) sono combinazioni lineari degli integrali

$$(20)\qquad W_{\varrho\tau,h}=\int_0^1 \xi^h w_\varrho(\xi)\,w_\tau(\xi)\,d\xi \quad , \quad W^{(2)}_{\varrho\tau,h}=\int_0^1 \xi^h \frac{d^2 w_\varrho}{d\xi^2}\,\frac{d^2 w_\tau}{d\xi^2}\,d\xi,$$

$$(21)\qquad W_{\varrho,h}=\int_0^1 \xi^h w_\varrho(\xi)\,d\xi, \qquad (\varrho,\tau=1,2,3,\cdots;\ h=0,1,\cdots,n).$$

Grazie alle (18) e (19) è abbastanza facile dare un gruppo di formule, che permettono il calcolo degli integrali (20) e (21) per qualunque h, intero positivo o nullo; ci limiteremo a riportare i risultati per $h=0,1,2$.

b) Poniamo

$$(22)\qquad V_{\varrho\tau,h}=\int_0^1 \xi^h\left[\overline{w}_\varrho\,\overline{w}_\tau+\overline{\overline{w}}_\varrho\,\overline{\overline{w}}_\tau\right]d\xi \quad , \quad V^*_{\varrho\tau,h}=\int_0^1 \xi^h\left[\overline{w}'_\varrho\,\overline{\overline{w}}_\tau+\overline{\overline{w}}_\varrho\,\overline{w}_\tau\right]d\xi;$$

a causa delle (17), (18) e (19) si ottiene

$$(23)\qquad \begin{cases} \dfrac{\operatorname{Ch}\delta_\varrho\operatorname{sen}\delta_\varrho-\operatorname{Sh}\delta_\varrho\cos\delta_\varrho}{H_\varrho}\,\dfrac{\operatorname{Ch}\delta_\tau\operatorname{sen}\delta_\tau-\operatorname{Sh}\delta_\tau\cos\delta_\tau}{H_\tau}\displaystyle\int_0^1 \xi^h w_\varrho(\xi)\,w_\tau(\xi)\,d\xi=V_{\varrho\tau,h}-V^*_{\varrho\tau,h} \\ \dfrac{\operatorname{Ch}\delta_\varrho\operatorname{sen}\delta_\varrho-\operatorname{Sh}\delta_\varrho\cos\delta_\varrho}{\delta_\varrho^2 H_\varrho}\,\dfrac{\operatorname{Ch}\delta_\tau\operatorname{sen}\delta_\tau-\operatorname{Sh}\delta_\tau\cos\delta_\tau}{\delta_\tau^2 H_\tau}\displaystyle\int_0^1 \xi^h \frac{d^2 w_\varrho}{d\xi^2}\,\frac{d^2 w_\tau}{d\xi^2}\,d\xi=V_{\varrho\tau,h}+V^*_{\varrho\tau,h} \end{cases}$$

Posto ulteriormente

$$(24)\qquad \Theta_\varrho=-\frac{A_\varrho}{B_\varrho}=\frac{\operatorname{Sh}\delta_\varrho\operatorname{sen}\delta_\varrho}{\operatorname{Ch}\delta_\varrho\operatorname{sen}\delta_\varrho-\operatorname{Sh}\delta_\varrho\cos\delta_\varrho},$$

$$(25)\qquad \Phi_\varrho=\frac{\operatorname{Ch}\delta_\varrho+\cos\delta_\varrho}{\operatorname{Ch}\delta_\varrho\operatorname{sen}\delta_\varrho-\operatorname{Sh}\delta_\varrho\cos\delta_\varrho} \quad , \quad \Psi_\varrho=\frac{\operatorname{Sh}\delta_\varrho+\operatorname{sen}\delta_\varrho}{\operatorname{Ch}\delta_\varrho\operatorname{sen}\delta_\varrho-\operatorname{Sh}\delta_\varrho\cos\delta_\varrho}$$ [13]

[12] Un procedimento analogo è stato fecondo anche nei miei due lavori precedenti sullo stesso argomento (cfr. nota (1)).

[13] Sfruttando la (16) e note formule di trigonometria, si osserva che:

$$\Phi_\varrho=(-)_\varrho\,\Psi_\varrho-\left(\Psi_\varrho-\frac{2}{\operatorname{Sh}\delta_\varrho}(-)_\varrho\right)\delta_\varrho\varkappa \quad , \quad \Phi_\varrho^2=(-)_\varrho^2+\delta_\varrho^2\varkappa^2 \quad , \quad \Psi_\varrho^2=1+2(-)_\varrho\,\delta_\varrho\varkappa;$$

inoltre, se $\varkappa=0$, $(1+\operatorname{Ch}\delta_\varrho\cos\delta_\varrho=0)$ si ottiene: per la (24), il valore indicato con la stessa posizione nella mia cit. in (1); $\Phi_\varrho=(-1)^\varrho\,\dfrac{A_\varrho}{B_\varrho}$; $\Psi_\varrho=(-1)^{\varrho-1}$.

(con le analoghe, quando ci si riferisca a δ_τ)

$$\begin{cases} N_1(\delta_\varrho, \delta_\tau) = \dfrac{(\Theta_\tau + \Phi_\tau \Psi_\varrho)(1+3\gamma^2) - (\Theta_\varrho + \Phi_\varrho \Psi_\tau)\gamma(3+\gamma^2)}{[\delta_\tau(1-\gamma^2)]^3} \\ N_2(\delta_\varrho, \delta_\tau) = \dfrac{(-\Theta_\tau + \Phi_\tau \Psi_\varrho)(1-3\gamma^2) - (-\Theta_\varrho + \Phi_\varrho \Psi_\tau)\gamma(3-\gamma^2)}{[\delta_\tau(1+\gamma^2)]^3} \end{cases} \left(\gamma = \frac{\delta_\varrho}{\delta_\tau}, \text{ con } \tau > \rho\right),$$

dalle (23) e (22) si perviene alle espressioni degli integrali (20) [14]:

$$W_{\varrho\tau,h} = W_{\tau\varrho,h} \quad , \quad W^{(2)}_{\varrho\tau,h} = W^{(2)}_{\tau\varrho,h};$$

$$W_{\varrho\tau,0} = \begin{cases} 1 + \varkappa[1 + 2\delta_\varrho \Theta_\varrho] & , \text{ se } \tau = \rho, \\ 0 & , \text{ se } \tau \neq \rho; \end{cases}$$

$$W_{\varrho\tau,1} = \begin{cases} \frac{1}{2} + \frac{2}{\delta_\varrho^2}\Theta_\varrho^2 + \varkappa\delta_\varrho\Theta_\varrho & , \text{ se } \tau = \rho, \\ \frac{8\gamma}{[\delta_\tau(1-\gamma^4)]^2}[(1+\gamma^4)(\Phi_\varrho\Phi_\tau - \varkappa^2\delta_\tau^2\gamma) - 2\gamma^2\Theta_\varrho\Theta_\tau] & , \text{ se } \tau > \rho; \end{cases}$$

$$W_{\varrho\tau,2} = \begin{cases} \frac{1}{3} + \frac{1}{\delta_\varrho^2}\Theta_\varrho\left(\frac{3}{2}\Theta_\varrho + \frac{1}{\delta_\varrho}\right) + \frac{3}{2}\varkappa\left(\frac{4}{9}\delta_\varrho\Theta_\varrho - \frac{1}{\delta_\varrho^2} - 2\frac{\operatorname{cotg}\delta_\varrho}{\delta_\varrho^2}\Theta_\varrho + \varkappa\right) & , \text{ se } \tau = \rho, \\ 16\frac{\gamma(1+\gamma^4)}{[\delta_\tau(1-\gamma^4)]^2}\Phi_\varrho\Phi_\tau + 4[N_1(\delta_\varrho, \delta_\tau) + N_2(\delta_\varrho, \delta_\tau)] & , \text{ se } \tau > \rho; \end{cases}$$

$$W^{(2)}_{\varrho\tau,0} = \begin{cases} \delta_\varrho^4[1 - \varkappa(3 - 2\delta_\varrho\Theta_\varrho)] & , \text{ se } \tau = \rho, \\ -4\delta_\varrho^2\delta_\tau^2\varkappa & , \text{ se } \tau \neq \rho; \end{cases}$$

$$W^{(2)}_{\varrho\tau,1} = \begin{cases} \delta_\varrho^4\left(\frac{1}{2} - \frac{2}{\delta_\varrho^2}\Theta_\varrho^2 + \varkappa\delta_\varrho\Theta_\varrho\right) & , \text{ se } \tau = \rho, \\ \frac{8\gamma\delta_\varrho^2\delta_\tau^2}{[\delta_\tau(1-\gamma^4)]^2}[2\gamma^2(\Phi_\varrho\Phi_\tau - \varkappa^2\delta_\tau^2\gamma) - (1+\gamma^4)\Theta_\varrho\Theta_\tau] & , \text{ se } \tau > \rho; \end{cases}$$

$$W^{(2)}_{\varrho\tau,2} = \begin{cases} \delta_\varrho^4\left[\frac{1}{3} - \frac{1}{\delta_\varrho^2}\Theta_\varrho\left(\frac{5}{2}\Theta_\varrho - \frac{1}{\delta_\varrho}\right) + \frac{5}{2}\varkappa\left(\frac{4}{15}\delta_\varrho\Theta_\varrho + \frac{1}{\delta_\varrho^2} + 2\frac{\operatorname{cotg}\delta_\varrho}{\delta_\varrho^2}\Theta_\varrho - \varkappa\right)\right], & \text{se } \tau = \rho, \\ 4\delta_\varrho^2\delta_\tau^2\left[\frac{8\gamma^3}{[\delta_\tau(1-\gamma^4)]^2}\Phi_\varrho\Phi_\tau + N_1(\delta_\varrho, \delta_\tau) - N_2(\delta_\varrho, \delta_\tau)\right] & , \text{ se } \tau > \rho. \end{cases}$$

c) Si vede senza difficoltà che gli integrali (21) hanno le seguenti espressioni ($\rho > 0$):

$$W_{\varrho,0} = -\frac{2}{\delta_\varrho}\Theta_\varrho H_\varrho \quad , \quad W_{\varrho,1} = -\frac{2}{\delta_\varrho^2}H_\varrho \quad , \quad W_{\varrho,2} = -\frac{4}{\delta_\varrho^3}(\Phi_\varrho - \varkappa\delta_\varrho)H_\varrho,$$

$$W_{\varrho,3} = -\frac{12}{\delta_\varrho^3}\left(\Phi_\varrho - \frac{1}{\delta_\varrho}\Psi_\varrho\right)H_\varrho \quad , \quad W_{\varrho,4} = -\frac{48}{\delta_\varrho^3}\left(\frac{1}{2}\Phi_\varrho + \frac{1}{\delta_\varrho^2}\Theta_\varrho - \frac{1}{\delta_\varrho}\Psi_\varrho\right)H_\varrho,$$

(14) Si pongono $H_\varrho = H_\tau = 1$ per analogia col caso dell'asta incastrata su suolo rigido, nel quale il valore *uno* per le costanti H corrisponde ad autofunzioni ortonormali in $(0, 1)$. In generale, le qui riportate espressioni degli integrali (20) dovranno essere moltiplicate per $H_\varrho \cdot H_\tau$. Poichè $\varkappa = 0$, $\Theta_\varrho = 0$, è $W_{\varrho\varrho,0} = 0$; ciò permette scegliere H_ϱ in maniera da normalizzare le autosoluzioni (ossia in modo che risulti $W_{\varrho\varrho,0} = 1$, cioè $H_\varrho^2 = \frac{1}{1 + \varkappa[1 + 2\Theta_\varrho\delta_\varrho]}$).

$$W_{\varrho,h}=\frac{h(h-1)}{\delta_\varrho^4}\left[w'_\varrho(1)-(h-2)w_\varrho(1)+(h-2)(h-3)W_{\varrho,h-4}\right],\ \text{con } h\geq 4,$$

$$w'_\varrho(1)=-2\delta_\varrho\Phi_\varrho H_\varrho \quad , \quad w_\varrho(1)=-2\Psi_\varrho H_\varrho .$$

5. Il caso limite $\varkappa\to+\infty$, del cui significato abbiamo già parlato in fine del § 1, fornisce le seguenti particolarizzazioni (cfr. anche nota [8]):

a) Il sistema ortogonale di autosoluzioni è

$$(18') \qquad w_1(\xi)=2L_1\xi \quad , \quad w_\varrho(\xi)=L_\varrho\left[\frac{\operatorname{Sh}\delta_\varrho\,\xi}{\operatorname{Sh}\delta_\varrho}+\frac{\operatorname{sen}\delta_\varrho\,\xi}{\operatorname{sen}\delta_\varrho}\right], \quad \text{se } \rho>1,$$

con $L_1, L_2, L_3, \cdots$ costanti, che assumono i valori seguenti

$$L_1=-\frac{\sqrt{3}}{2} \quad , \quad L_\varrho=(-1)^\varrho \qquad \text{se } \rho>1 \ [15],$$

quando si voglia normalizzare il sistema delle (18').

b) *Usando autofunzioni normalizzate* e ponendo (per $\tau>\rho>1$):

$$\Xi_\varrho=\frac{\operatorname{Sh}\delta_\varrho+\operatorname{sen}\delta_\varrho}{2\operatorname{Sh}\delta_\varrho\operatorname{sen}\delta_\varrho} \quad , \quad \gamma=\frac{\delta_\varrho}{\delta_\tau},$$

$$N_1(\delta_\varrho,\delta_\tau)=\frac{(1+3\gamma^2)\operatorname{Cth}\delta_\tau-\gamma(3+\gamma^2)\operatorname{Cth}\delta_\varrho}{[\delta_\tau(1-\gamma^2)]^3},$$

$$N_2(\delta_\varrho,\delta_\tau)=\frac{(1-3\gamma^2)\operatorname{Cth}\delta_\tau-\gamma(3-\gamma^2)\operatorname{Cth}\delta_\varrho}{[\delta_\tau(1+\gamma^2)]^3},$$

si ottengono le seguenti espressioni degli integrali (20) – dove tralasciamo il soprassegno sugli autovalori –:

$$W_{\varrho\varrho,0}=1 \ , \ W_{\varrho\tau,0}=0 \ (\text{se } \tau>\rho) \ ; \ W_{11,1}=\frac{3}{4} \ ; \ W_{\varrho\varrho,1}=\frac{1}{2}+\frac{1}{\delta_\varrho^2}\frac{\operatorname{Ch}\delta_\varrho\cos\delta_\varrho-1}{\operatorname{Sh}\delta_\varrho\operatorname{sen}\delta_\varrho}, \ \text{se } \rho>$$

$$W_{\varrho\tau,1}=\begin{cases}(-1)^{\tau-1}\dfrac{4\sqrt{3}}{\delta_\tau^3}\left[\operatorname{Cth}\delta_\tau-\Xi_\tau\right] & \text{, se } \rho=1\text{, } \tau>\\[2ex] (-1)^\tau\dfrac{8\gamma}{[\delta_\tau(1-\gamma^4)]^2}\left[(1+\gamma^4)(\operatorname{Cth}\delta_\varrho\operatorname{Cth}\delta_\tau-\Xi_\varrho\Xi_\tau)-\frac{1}{2}\gamma^2\frac{1}{\Xi_\varrho\Xi_\tau}\right], & \text{se } \tau>\rho>\end{cases}$$

$$W_{11,2}=\frac{3}{5} \quad ; \quad W_{\varrho\varrho,2}=\frac{1}{3}+\frac{3}{2}\frac{\operatorname{Cth}\delta_\varrho}{\delta_\varrho^3}(\delta_\varrho\operatorname{Cth}\delta_\varrho-1), \qquad \text{se } \rho>$$

(15) A causa della (11') risulta $\dfrac{\operatorname{Sh}^2\delta_\varrho-\operatorname{sen}^2\delta_\varrho}{\operatorname{Sh}^2\delta_\varrho\operatorname{sen}^2\delta_\varrho}=2$, se $\rho>1$.

$$\varepsilon_{\rho,2} = \begin{cases} (-1)^{\tau-1}\,\dfrac{12\sqrt{3}}{\delta_\tau^4}\,(\delta_\tau \operatorname{Cth}\delta_\tau - 1) & , \text{ se } \rho=1\,,\ \tau>1, \\ (-1)^{\tau-\rho}\left[\dfrac{16\,\gamma(1+\gamma^4)}{[\delta_\tau(1-\gamma^4)]^2}\operatorname{Cth}\delta_\rho\operatorname{Cth}\delta_\tau + 4\,(N_1(\delta_\rho,\delta_\tau)+N_2(\delta_\rho,\delta_v))\right], & \text{se } \tau>\rho>1; \end{cases}$$

$\varepsilon_{\rho,h}=0$, se $\tau\geq 1$ e $h\geq 0$; $W^{(2)}_{\rho\rho,0}=\delta_\rho^4$, se $\rho>1$; $W^{(2)}_{\rho\tau,0}=0$, se $\tau=\rho$;

$$W^{(2)}_{\rho\tau,1} = \begin{cases} \delta_\rho^4\left[\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{\delta_\rho^2}\,\dfrac{\operatorname{Ch}\delta_\rho\cos\delta_\rho - 1}{\operatorname{Sh}\delta_\rho\operatorname{sen}\delta_\rho}\right] & , \text{ se } \tau=\rho>1, \\ (-1)^{\tau-\rho}\,\delta_\rho^2\,\delta_\tau^2\,\dfrac{8\,\gamma}{[\delta_\tau(1-\gamma^4)]^2}\left[2\,\gamma^2(\operatorname{Cth}\delta_\rho\operatorname{Cth}\delta_\tau - \Xi_\rho\,\Xi_\tau) - \dfrac{1+\gamma^4}{4\,\Xi_\rho\,\Xi_\tau}\right], & \text{se } \tau>\rho>1; \end{cases}$$

$$W^{(2)}_{\rho\tau,2} = \begin{cases} \delta_\rho^4\left[\dfrac{1}{3} - \dfrac{5}{2}\,\dfrac{\operatorname{Cth}\delta_\rho}{\delta_\rho^3}\,(\delta_\rho\operatorname{Cth}\delta_\rho - 1)\right] & , \text{ se } \tau=\rho>1, \\ (-1)^{\tau-\rho}\,4\,\delta_\rho^2\,\delta_\tau^2\left[\dfrac{8\,\gamma^3}{[\delta_\tau(1-\gamma^4)]^2}\operatorname{Cth}\delta_\rho\operatorname{Cth}\delta_\tau + N_1(\delta_\rho,\delta_\tau) - N_2(\delta_\rho,\delta_\tau)\right], & \text{se } \tau>\rho>1. \end{cases}$$

c) Per gli integrali (21) si ottiene

$$k_h = -\frac{\sqrt{3}}{h+2}\,, \text{ per } h\geq 0\ ;\ W_{\rho,0}=\frac{(-1)^\rho}{\delta_\rho\,\Xi_\rho}\ ,\ W_{\rho,h+1}=-\frac{1}{\sqrt{3}}\,W_{1\rho,h},\ \text{se } \rho>1 \text{ e } h\geq 0.$$

6. *a*) Ricordando le (10), come si è osservato in *a*), si giunge finalmente alle espressioni degli integrali (5) – con $n=2$ – e dei (6):

$$\mu_{2\tau} = W_{\rho\tau,0} - m_1\,W_{\rho\tau,1} - m_2\,W_{\rho\tau,2}\quad ,\quad \varepsilon_{\rho\tau} = W^{(2)}_{\rho\tau,0} - k_1\,W^{(2)}_{\rho\tau,1} - k_2\,W^{(2)}_{\rho\tau,2},$$

$$f_\rho = W_{\rho,0} - \sum_1^n{}_h\, q_h\,W_{\rho,h}.$$

b) Concludiamo con un esempio numerico di applicazione delle formule introdotte con le nostre Note. Assumeremo $\varkappa=0{,}25$, $\varkappa=1$ e $\varkappa=2{,}5$: mediante il procedimento del § 2 e la tabella I, si ottengono facilmente due autovalori (ci limitiamo a $\rho=1$ e $\tau=2$), si tabellano successivamente le (24), (25) e (26), indi gli integrali (5) e (6).

I risultati numerici sono contenuti nelle tabelle II–V, nelle quali abbiamo fatto uso delle autosoluzioni normalizzate (cfr. nota [14]) e abbiamo riportato – per comodità di confronto – i corrispondenti valori del problema dell'asta con incastro rigido e del caso $\varkappa\to+\infty$ [16].

(16) Si ponga però attenzione ad una diversa scelta dei segni per due fattori di normalizzazione, cosicchè la completa concordanza dei risultati si avrà assumendo nelle (13′ e (21$_0$) delle Note, citate in (1), rispettivamente

$$v_1(\xi') = -2\sqrt{3}\,w_1(\xi')\quad ,\quad u_0(\xi) = -\sqrt{3}\,\xi.$$

Tabella I.

$$\varkappa = \frac{1}{\delta} \frac{1 - \operatorname{tang}^2 \frac{\delta}{2} \operatorname{Th}^2 \frac{\delta}{2}}{\left(\operatorname{Th}^2 \frac{\delta}{2} + 1\right) \operatorname{tang} \frac{\delta}{2} + \left(\operatorname{tang}^2 \frac{\delta}{2} - 1\right) \operatorname{Th} \frac{\delta}{2}} .$$

δ	$\varkappa$	δ	$\varkappa$	δ	$\varkappa$
0	$+\infty$	4,20	0,287233	13/4 π	$36,1691 \cdot 10^6$
0,1	29999,8	4,25	0,218780	10,22	4,93048
0,2	1874,76	4,30	0,168568	10,23	2,41606
0,3	364,112	4,35	0,130133	10,24	1,58774
0,4	116,952	4,40	0,0997400	10,28	0,646745
0,5	47,7642	4,45	0,0750812	10,32	0,390891
0,6	22,9124	4,50	0,0546525	10,36	0,271423
0,7	12,2590	4,55	0,0374318	10,40	0,202123
π/4	7,64836	4,60	0,0226996	10,44	0,156797
0,8	7,08830	4,63	0,0148306	10,48	0,124783
0,9	4,33642	4,66	$0,0^2 75820$	10,52	0,100924
1,0	2,76375	4,69	$0,0^3$ 8760	10,56	0,0824241
1,1	1,81254	δ_2	0	10,60	0,0676320
1,2	1,20993	3/2 π	$-0,0^2 38123$	10,70	0,0409097
1,24	1,03193			10,80	0,0228701
1,28	0,880423			10,90	$0,0^2 97239$
1,32	0,750802	9/4 π	97808,4	10,94	$0,0^2 53813$
1,36	0,639362	7,07	49,9497	10,96	$0,0^2 33637$
1,40	0,543125	7,08	6,12936	10,98	$0,0^2 14378$
1,44	0,459651	7,09	3,22951	10,99	$0,0^3$ 5070
1,48	0,386950	7,10	2,17560	δ_4	0
1,52	0,323383	7,14	0,911055	7/2 π	$-0,0^5$ 61
1,56	0,267593	7,18	0,554143		
π/2	0,253716	7,22	0,385558	17/4 π	$14,8126 \cdot 10^9$
1,60	0,218450	7,26	0,287238	4 π + 0,79	8,09742
1,64	0,175014	7,30	0,222748	4 π + 0,80	2,52424
1,68	0,136489	7,34	0,177132	4 π + 0,81	1,48169
1,72	0,102209	7,38	0,143117	4 π + 0,83	0,798941
1,76	0,0716077	7,42	0,116741	4 π + 0,85	0,538818
1,80	0,0442041	7,46	0,0956612	4 π + 0,90	0,285439
1,84	0,0195873	7,50	0,0784043	4 π + 0,95	0,185713
1,86	$0,0^2 82119$	7,54	0,0639959	4 π + 1,00	0,132241
δ_1	0	7,58	0,0517667	4 π + 1,05	0,0988024
		7,62	0,0412413	4 π + 1,10	0,0758455
		7,66	0,0320726	4 π + 1,20	0,0462050
5/4 π	309,832	7,70	0,0240015	4 π + 1,30	0,0277151
3,93	35,2933	7,74	0,0168303	4 π + 1,40	0,0149235
3,94	8,83756	7,78	0,0104056	4 π + 1,50	$0,0^2 54264$
3,96	3,45447	7,82	$0,0^2 46065$	4 π + 1,52	$0,0^2 38026$
4,—	1,48900	7,84	$0,0^2 19106$	4 π + 1,54	$0,0^2 22534$
4,05	0,823776	7,85	$0,0^3$ 6089	4 π + 1,56	$0,0^3$ 7727
4,10	0,541985	5/2 π	$0,0^4$ 989	4 π + 1,57	$0,0^4$ 564
4,15	0,386176	δ_3	0	9/2 π ∼ δ_5	0

TABELLA II.

$\varkappa$	0 [17]		0,25		1		2,5		∞	
ρ	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2
δ_ϱ	1,875 104	4,694 0911	1,573 751	4,225 1129	1,247 917	4,031 1394	1,023 2677	3,972 0208	0	3,926 6023
Θ_ϱ	0,734 0955	1,018 467	0,915 139	2,125 248	1,183 324	5,265 92	1,455 646	11,501 55	—	—
Φ_ϱ	0,734 0955	−1,018 467	0,996 129	−2,373 268	1,719 754	−6,631 74	2,943 321	−15,195 11	—	—
Ψ_ϱ	1	−1	1,311 526	−2,343 012	1,988 311	−6,592 06	2,906 472	−15,146 68	—	—
H_ϱ [18]	1	1	0,712 4523	0,417 4026	0,449 3132	0,149 9817	0,302 2324	0,065 664 26	$L_{\cdot 1} =$ −0,866 0254	$L_{\cdot 2} = 1$
$N_1(\delta_1, \delta_2)$	0		0,005 404 4		−0,009 629 9		−0,099 969		—	
$N_2(\delta_1, \delta_2)$	0,003 745 52		0,003 635 7		−0,021 936		−0,128 827		—	

(17) I valori corrispondenti a $\varkappa = 0$ sono riportati dalla Nota II, cit. in (1).
(18) Cfr. note (14) e (16).

TABELLA III.

$\varkappa$	f_1	f_2
0	$-0,78299 + 0,56883\,q_1 + 0,44539\,q_2 + 0,36547\,q_3 + 0,30964\,q_4$	$-0,43394 + 0,090767\,q_1 - 0,039387\,q_2 - 0,093445\,q_3 - 0,116008\,q_4$
0,25	$-0,82858 + 0,57533\,q_1 + 0,44066\,q_2 + 0,35699\,q_3 + 0,29997\,q_4$	$-0,41991 + 0,046764\,q_1 - 0,075917\,q_2 - 0,120778\,q_3 - 0,136280\,q_4$
1	$-0,85211 + 0,57704\,q_1 + 0,43636\,q_2 + 0,35083\,q_3 + 0,29332\,q_4$	$-0,39185 + 0,018459\,q_1 - 0,097654\,q_2 - 0,137277\,q_3 - 0,149082\,q_4$
2,5	$-0,85988 + 0,57729\,q_1 + 0,43458\,q_2 + 0,34844\,q_3 + 0,29089\,q_4$	$-0,38028 + 0,008324\,q_1 - 0,105308\,q_2 - 0,143115\,q_3 - 0,153665\,q_4$
∞	$-0,86603 + 0,57735\,q_1 + 0,43301\,q_2 + 0,34641\,q_3 + 0,28868\,q_4$	$-0,37035 - 0,109717\,q_2 - 0,147887\,q_3 - 0,157426\,q_4$

TABELLA IV.

$\varkappa$	μ_{11}	$\mu_{12} = \mu_{21}$	μ_{22}
0	$1 - 0{,}80654\, m_1 - 0{,}67458\, m_2$	$+ 0{,}15352\, m_1 + 0{,}21918\, m_2$	$1 - 0{,}59415\, m_1 - 0{,}41379\, m_2$
0,25	$1 - 0{,}77983\, m_1 - 0{,}63882\, m_2$	$+ 0{,}17406\, m_1 + 0{,}23795\, m_2$	$1 - 0{,}56638\, m_1 - 0{,}39428\, m_2$
1	$1 - 0{,}76211\, m_1 - 0{,}61564\, m_2$	$+ 0{,}18601\, m_1 + 0{,}24933\, m_2$	$1 - 0{,}56552\, m_1 - 0{,}39916\, m_2$
2,5	$1 - 0{,}75552\, m_1 - 0{,}60711\, m_2$	$+ 0{,}19003\, m_1 + 0{,}25314\, m_2$	$1 - 0{,}56692\, m_1 - 0{,}40262\, m_2$
∞	$1 - 0{,}75\ m_1 - 0{,}60\ m_2$	$+ 0{,}19322\, m_1 + 0.25615\, m_2$	$1 - 0{,}56858\, m_1 - 0{,}40598\, m_2$

TABELLA V.

$\varkappa$	ε_{11}	$\varepsilon_{12} = \varepsilon_{21}$	ε_{22}
0	$12{,}36236 - 2{,}39165\ k_1 - 0{,}760375\, k_2$	$+ 11{,}89350\, k_1 + 6{,}80650\, k_2$	$485{,}5188 - 197{,}0477\, k_1 - 109{,}4808\, k_2$
0,25	$3{,}02046 - 0{,}572152\, k_1 - 0{,}1\,9133\, k_2$	$- 13{,}14799 + 6{,}28346\, k_1 + 2{,}90041\, k_2$	$263{,}1570 - 124{,}3038\, k_1 - 65{,}6914\, k_2$
1	$0{,}4\ 6775 - 0{,}087332\, k_1 - 0{,}027094\, k_2$	$- 6{,}82141 + 2{,}49879\, k_1 + 1{,}07347\, k_2$	$240{,}3052 - 108{,}7900\, k_1 - 55{,}0451\, k_2$
2,5	$0{,}094897 - 0{,}017677\, k_1 - 0{,}00\,466\, k_2$	$- 3{,}27847 + 1{,}12874\, k_1 + 0{,}47514\, k_2$	$238{,}1796 - 105{,}1165\, k_1 - 52{,}3681\, k_2$
∞	0	0	$237{,}7211 - 102{,}5581\, k_1 - 50{,}4590\, k_2$

Meccanica (Scienza delle Costruzioni). — *Contributo allo studio della lastra circolare su suolo elastico.* Nota di FRANCESCO SAVERIO MERLINO, presentata (*) dal Socio G. COLONNETTI.

Nella presente Nota riprenderemo lo studio della lastra appoggiata su di un mezzo che si immagina reagisca in ciascun punto proporzionalmente all'abbassamento del punto e con una costante di proporzionalità identica da punto a punto.

Mostreremo come l'impiego sistematico del *1°* e *2° principio di reciprocità* della Scienza delle Costruzioni consenta di porre in modo pressoché immediato la soluzione di importanti problemi particolari.

INTEGRALE DELLA EQUAZIONE DIFFERENZIALE DEL PROBLEMA.

Adotteremo le seguenti notazioni:

E = modulo di elasticità della lastra,

ν = coefficiente di Poisson,

h = spessore *costante* della lastra,

K = modulo di reazione del suolo,

P carico complessivo,

q carico per unità di superficie,

w abbassamento,

m_r, m_θ, t_r rispettivamente momento circonferenziale, momento radiale e sforzo tagliante per unità di larghezza,

$$D = \frac{E h^3}{12 (1 - \nu^2)}$$

$$l = \sqrt[4]{\frac{D}{K}}$$

$r = \xi \cdot l$ = distanza di un punto generico dal centro della lastra.

L'equazione differenziale della superficie elastica della lastra di spessore costante su suolo elastico è dedotta immediatamente dalla classica *equazione di Lagrange*. Si ha dunque:

$$\nabla^4 w + \frac{K}{D} w = \frac{q}{D} \quad (1) \qquad (1)$$

(*) Nella seduta dell'8 novembre 1952.

1) ∇^4 è l'operatore di Laplace di secondo ordine. Le operazioni di derivazione si intendono eseguite rispetto a r.

Nel caso di una lastra circolare, quindi anche indefinita, in condizioni di vincolo e di carico circolarmente simmetriche rispetto al centro, la soluzione dell'equazione (1) sarà esprimibile, dove $q = 0$, nella forma:

$$w(\xi) = \sum_1^4 c_i Z_i(\xi) \tag{2}$$

ove

$$Z_1(\xi) = \mathfrak{Re}\ J_0\left(\xi\sqrt{i}\right)^{(2,3)}$$

$$Z_2(\xi) = \mathfrak{Im}\ J_0\left(\xi\sqrt{i}\right)$$

$$Z_3(\xi) = \mathfrak{Re}\ H_0\left(\xi\sqrt{i}\right)$$

$$Z_4(\xi) = \mathfrak{Im}\ H_0\left(\xi\sqrt{i}\right)$$

c_1, c_2, c_3 e c_4 sono poi delle costanti di integrazione, che dipendono, caso per caso, dal sistema di carico e dalle condizioni ai limiti.

Dalla $w(\xi)$ si ottengono poi, con semplici operazioni di derivazione, le espressioni di m_r, m_θ e t_r [4].

A) Lastra indefinita:

1. *Carico* P *concentrato in* $\xi=0$ (fig. 1). – Si dimostra facilmente che il solo c_3 è diverso da zero e che $c_3 = \frac{Pl^2}{4D}$.

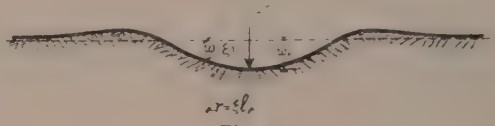


Fig. 1.

Dalla formula (2) si ha dunque:

$$w(\xi) = \frac{Pl^2}{4D} Z_3(\xi)^{(5)}. \tag{3}$$

(In particolare, sotto il carico risulterà un abbassamento $w_0 = \frac{Pl^2}{8D}$ [6].)

(2) J_0 funzione di Bessel di ordine zero; H_0 funzione di Hankel di ordine zero.

(3) $i = \sqrt{-1}$.

(4) Le derivate Z'', Z''' non figureranno in quanto esprimibili mediante le Z e Z', date le relazioni:

$$Z_1''(\xi) = Z_2(\xi) - \frac{1}{\xi} Z_1'(\xi) \qquad Z_2''(\xi) = -Z_1(\xi) - \frac{1}{\xi} Z_2'(\xi) \quad \text{e le altre analoghe.}$$

(5) formula (13,4) dello Schleicher.

(6) $Z_3(0) = 1/2$.

Si avrà poi:

$$m_r = -\frac{P}{4}\left\{ Z_4(\xi) - (1-\nu)\frac{Z_3'(\xi)}{\xi} \right\}$$

$$m_\theta = -\frac{P}{4}\left\{ \nu Z_4(\xi) + (1-\nu)\frac{Z_3'(\xi)}{\xi} \right\}$$

.....

2. *Carico* P *uniformemente distribuito lungo la circonferenza* α (fig. 2). – a) Studio della zona interna alla circonferenza:

$$\xi < \alpha.$$

Sarà ora:

$c_3 = 0$, non essendovi carico concentrato in $\xi = 0$ (7).

$c_4 = 0$, dovendo essere, per ragioni di simmetria, $(dw/dr)_{r=0} = 0$ (8).

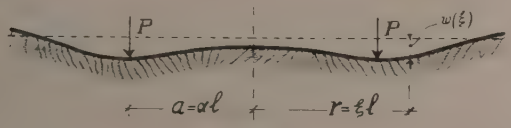


Fig. 2.

Scriviamo ora l'espressione di $w(\xi)$, che così si semplifica, ponendo in evidenza il fattore $\frac{Pl^2}{4D}$:

$$w(\xi) = \frac{Pl^2}{4D}\{ c_1 Z_2(\xi) + c_2 Z_2(\xi) \}.$$

Determiniamo quindi le due costanti c_1 e c_2.

Ponendo $\xi = 0$ (9) nella espressione di $w(\xi)$ si ottiene l'abbassamento al centro w_0 espresso mediante la costante c_1:

$$w_0 = \frac{Pl^2}{4D} c_1.$$

Ma tale abbassamento w_0 coincide per ragioni di simmetria (o se così si preferisce per il *primo* principio di reciprocità) con l'abbassamento di punti della circonferenza α per un carico P concentrato al centro di tale circonferenza.

Ricorrendo allora alla formula (3) otteniamo:

$$w_0 = \frac{Pl^2}{4D} Z_3(\alpha).$$

(7) Cfr. caso precedente.

(8) $Z_1'(0) = 0$ $Z_2'(0) = 0$, mentre $Z_4'(0) = +\infty$.

(9) Ancora $Z_1(0) = 1$ $Z_2(0) = 0$.

Quindi, dal confronto delle due precedenti espressioni di w_o, si deduce: $c_1 = Z_3(\alpha)$.

Il momento m_{ro} $(= m_{\theta o})$ al centro è esprimibile poi mediante l'altra costante c_2, come si dimostra facilmente tenendo conto dei valori delle funzioni Z e derivate per $\xi \to o$

$$m_{ro} = \frac{P}{4} \frac{1+\nu}{2} c_2 .$$

Ma il momento m_{ro} è anche dato per ragioni di simmetria dal valore medio dei due momenti m_r e m_θ alla distanza α da un carico concentrato.

Dal numero precedente avremo allora:

$$m_{ro} = -\frac{P}{4} \frac{1+\nu}{2} Z_4(\alpha).$$

Quindi, dal confronto delle due precedenti espressioni di m_{ro}, si deduce: $c_2 = -Z_4(\alpha)$.

Dunque:

$$(4) \qquad w(\xi) = \frac{Pl^2}{4D} \{ Z_3(\alpha) Z_1(\xi) - Z_4(\alpha) Z_2(\xi) \}.$$

Poi si avrà:

. . . . . .

$$t_r = -\frac{P}{4l} \{ Z_3(\alpha) Z_2'(\xi) + Z_4(\alpha) Z_1'(\xi) \}.$$

b) studio della zona esterna alla circonferenza α

$$\xi > \alpha.$$

In virtù del *primo* principio di reciprocità di Betti l'abbassamento cercato lo si può calcolare come spostamento di punti della circonferenza α per un carico uniformemente distribuito lungo la circonferenza ξ. È quindi applicabile la precedente formula di *w*: la (4).

Dunque:

$$(4') \qquad w(\xi) = \frac{Pl^2}{4D} \{ Z_1(\alpha) Z_3(\xi) - Z_2(\alpha) Z_4(\xi) \}^{(10)}$$

cioè

$$c_1 = c_2 = o \qquad c_3 = Z_1(\alpha) \qquad c_4 = -Z_2(\alpha).$$

Le nuove espressioni di m_r, m_ϑ e t_r si otterranno poi anche esse dalle corrispondenti espressioni in α, permutando tra loro gli indici 2 e 4; 3 e 1.

(10) Dalla continuità della dw/dr in α, tramite il confronto della (4) con la (4') si ottiene la relazione, utile nello studio della lastra circolare finita:

$$Z_1(\alpha) Z_3'(\alpha) - Z_1'(\alpha) Z_3(\alpha) = Z_2(\alpha) Z_4'(\alpha) - Z_2'(\alpha) Z_4(\alpha).$$

3. *Carico q uniformemente ripartito sulla superficie del cerchio* α (fig. 3). – Un artifizio permetterà di ricondurre il presente caso nell'ambito di formule stabilite nel numero precedente.

Si immagini di praticare un taglio in corrispondenza della circonferenza α [11] e di realizzare ivi una distorsione unitaria (negativa) di semplice traslazione relativa verticale delle due facce del taglio.

La deformata che così si ottiene (fig. 4) coinciderà, per il *secondo* principio di reciprocità di Colonnetti, con la linea di influenza dello sforzo

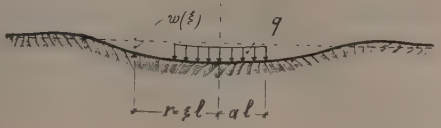
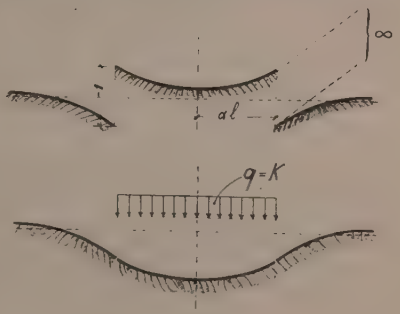


Fig. 3.

tagliante *totale* in corrispondenza della circonferenza α per un carico $P = 1$ occupante successivamente le varie circonferenze ξ.

Possiamo quindi senz'altro scrivere l'equazione di tale deformata, in quanto sappiamo scrivere l'equazione della linea di influenza dello sforzo tagliante *totale* in α per un carico $P = 1$ mobile come precisato di sopra. Infatti l'ordinata di tale linea di influenza è presto ottenuta moltiplicando per il fattore $2\pi\alpha l$ l'espressione di t_r del numero precedente (più precisamente t_r della parte *b*. se $\xi < \alpha$, t_r della parte *a*. se $\xi > \alpha$) dopo aver permutato tra di loro, in tale espressione, i simboli ξ e α.



Figg. 4 e 5.

Dalla deformata finora considerata (quella di fig. 4) alla deformata del problema il passaggio è immediato.

Tramite l'intervento di un carico uniformemente ripartito sulla superficie del cerchio α, si dia infatti alla parte centrale della lastra deformata con la distorsione di sopra una traslazione unitaria positiva, *traslazione senza deformazione* [12].

Si ottiene così:

che la lastra riacquisti in α la sua continuità di ordinate,

(11) Taglio esteso a tutta la circonferenza α e a tutto lo spessore della lastra.

(12) È noto che una lastra di qualunque forma libera ai bordi, su suolo elastico, sollecitata da un carico uniformemente distribuito q su tutta la superficie della lastra, si abbassa uniformemente senza deformarsi. Il valore dell'abbassamento è: q/K.

che la superficie del cerchio α risulti uniformemente caricata con esclusione di altri carichi esterni [13].

Cioè si ricostruisce così, per altra via, condizione di carico e deformata del problema (fig. 5).

Sarà facile ora sulla base di tali considerazioni pervenire alle espressioni di $w(\xi)$ di questo numero.

a) Studio della zona interna al cerchio α

$$\xi < \alpha.$$

Avremo:

$$w(\xi) = \frac{q}{K}\{1 + t_r \cdot 2\pi\alpha l\}$$ [14]

con $t_r = -\frac{1}{4l}\{Z_4'(\alpha) Z_1(\xi) + Z_3'(\alpha) Z_2(\xi)\}$.

Posto poi $P_{tot} = q \cdot \pi (\alpha l)^2$ si otterrà dunque:

$$(5) \qquad w(\xi) = -\frac{P_{tot} l^2}{4D} \cdot \frac{2}{\alpha}\{Z_4'(\alpha) Z_1(\xi) + Z_3'(\alpha) Z_2(\xi)\} + \frac{q}{K}.$$

In particolare abbiamo [15]:

per l'abbassamento al centro:

$$w_o = -P_{tot} \cdot \frac{l^2}{2D} \cdot \frac{1}{\alpha} Z_4'(\alpha) + \frac{q}{K}$$ [16]

per il momento al centro:

$$m_o = -P_{tot} \frac{1+\nu}{4} \cdot \frac{1}{\alpha} Z_3'(\alpha)$$ [16].

b) Studio della zona esterna al cerchio α

$$\xi > \alpha.$$

La deformata, per $q/k = 1$, coincide ora puramente e semplicemente con la linea di influenza dello sforzo tagliante *totale* in corrispondenza

(13) Le forze operanti la distorsione, forze *eguali* e *contrarie* sulle due faccie del taglio, non saranno poi altro che momento e taglio totali in α per la condizione di carico di questo numero.

(14) Per $q/K \neq 1$ compare il fattore di proporzionalità q/K.

(15) Vedi 2 *a*) per il significato dei coefficienti della $w(\xi)$.

(16) Tramite gli sviluppi in serie di Z_4' e Z_3' arrestati ai termini in α^3, si ha per $\alpha < 1$

$$w_o \simeq P_{tot} \frac{l^2}{8D}\left\{1 + \frac{1}{2\pi}\left(\ln\frac{\gamma\alpha}{2} - \frac{5}{4}\right)\alpha^2\right\} \qquad m_o \simeq P_{tot} \frac{1+\nu}{4} \frac{1}{\pi}\left\{\frac{1}{2} - \ln\frac{\alpha\gamma}{2} + \frac{\pi}{32}\alpha^2\right\}$$

ove $\ln\gamma = 0{,}577216$.

(Tali formule furono date dal WESTERGAARD).

della circonferenza α per un carico $P = 1$ occupante via via circonferenze esterne ad α.

Si perviene dunque tramite l'altro t_r alla formula:

$$(5') \qquad w(\xi) = -P_{tot} \cdot \frac{l^2}{4D} \cdot \frac{2}{\alpha} \{ Z_2'(\alpha) Z_3(\xi) + Z_1'(\alpha) Z_4(\xi) \} \text{ (17)}.$$

B) Lastra circolare finita:

(*cenni*)

Nel caso poi di una lastra circolare finita, sollecitata da una condizione di carico circolarmente simmetrica rispetto al centro, la soluzione si ottiene da quella corrispondente della lastra indefinita mediante l'aggiunta di una funzione:

$$w(\xi) = d_1 Z_1(\xi) + d_2 Z_2(\xi)$$

ove le costanti d_1 e d_2 terranno conto caso per caso delle condizioni particolari di vincolo e di carico.

Rinviando ad altra sede lo sviluppo di tale studio ci limiteremo qui a far notare che l'applicazione dei principî di reciprocità, *primo* e *secondo*, permette spesso di rispondere ad alcune questioni (momenti di incastro, taglio all'incastro, abbassamenti di determinati punti ecc. ecc.) quasi immediatamente, con formule assai più semplici ad ogni modo delle corrispondenti dello Schleicher.

BIBLIOGRAFIA.

[1] F. SCHLEICHER, *Kreisplatten auf elasticher Unterlage*. Berlino 1926.

[2] WESTERGAARD e GORDON, *Plaque indéfinie sur sol élastique*. «Inst. Techn. du Bâtiment et des Travaux publics», série I, n.10, Parigi 1943.

Le funzioni $Z(x)$ e $Z'(x)$ sono in Appendice al libro dello SCHLEICHER ($0 < x < 6$). Tali funzioni (*) sono altresì tabellate in:

[3] JAHNKE-EMDE, *Funktionentafeln*, Lipsia 1938.

(17) Dalla continuità di ordinate in α, tramite il confronto della (5) con la (5'), si ottiene l'altra relazione:

$$Z_1(\alpha) Z_4'(\alpha) - Z_1'(\alpha) Z_4(\alpha) = Z_3(\alpha) Z_2'(\alpha) - Z_3'(\alpha) Z_2(\alpha) + \frac{1}{2\pi\alpha}.$$

(*) Anche per i valori di x compresi tra 6,0 e 10.

Meccanica. — *Su certe proprietà generali dei raggi di girazione delle figure piane convesse.* Nota di PIERO GIORGIO BORDONI, presentata (*) dal Socio A. SIGNORINI.

1. PREMESSA. – La sola condizione che una superficie piana, omogenea e semplicemente connessa σ^* sia limitata da un contorno convesso γ^* permette di stabilire per il raggio di girazione ρ relativo ad ogni suo asse baricentrale τ delle limitazioni (1) che possono riuscire utili (2) in problemi di meccanica applicata.

Per trattare la questione in maniera del tutto generale, in modo da ottenere in ogni caso le limitazioni più restrittive, conviene – a differenza di quanto si è fatto sinora – trasformare preventivamente la generica figura convessa mediante un'operazione geometrica (*traslazione generalizzata*) rispetto alla quale risultano invarianti l'area, il momento statico, il momento di inerzia ed il raggio di girazione relativo a τ. Nel seguito, dopo aver definito le traslazioni generalizzate e dopo aver stabilito alcune loro proprietà, ci si varrà di esse per mostrare che se si indica con d la distanza tra le rette τ_1 e τ_2 tangenti a γ^* e parallele a τ, l'insieme dei valori che il rapporto ρ/d assume al variare di γ^* ammette un estremo superiore ed un estremo inferiore i quali sono anche punti di accumulazione. Successivamente, senza che vi sia bisogno di calcolare i valori effettivi degli estremi, si farà vedere che essi riescono tanto più prossimi tra di loro, e quindi la limitazione per ρ risulta tanto più soddisfacente, quanto più prossimo è il baricentro al contorno del *terzo medio* della striscia limitata da τ_1 e τ_2, terzo medio nel quale è necessariamente contenuto (3), essendo γ^* convessa.

2. TRASLAZIONI GENERALIZZATE. – Sia π la striscia di piano non esterna a $\tau_1 \tau_2$ (fig. 1 *a*); siano d_1 e d_2 le distanze di τ_1 e τ_2 da τ ($d_1 \leq d_2$); la loro somma è proprio d, e la loro semidifferenza $s = (d_2 - d_1)/2$, dà la distanza di τ dalla retta parallela a τ_1 e τ_2 ed equidistante da esse.

Si indicherà con il nome di *traslazione generalizzata* [in π] *parallela a* τ, l'operazione consistente nel dividere π in strisce infinitesime, mediante rette parallele a τ, e nell'applicare a ciascuna striscia una traslazione rigida, di vettore anch'esso parallelo a τ, ma con grandezza e verso generalmente diversi da una striscia all'altra.

(*) Nella seduta del 10 gennaio 1953.

(1) Per una limitazione superiore si veda: A. SIGNORINI, *Una proprietà di ubicazione dell'ellisse centrale*. « Rend. Acc. Naz. Lincei », *23*, p. 334 (1914); oppure dello stesso autore *Meccanica razionale con elementi di statica grafica*. Perrella Ed. Roma, I vol., 2ª ediz. p. 306 (1952).

(2) Cfr. P. G. BORDONI, *Nocciolo di sicurezza di una figura piana convessa*. « Rend. Acc. Naz. Lincei », *13*, p. 242 (1952).

(3) In proposito cfr. l'opera *Meccanica razionale* ecc. citata nella nota (1), vol. I, p. 242.

Prendendo τ come asse y (versore $\boldsymbol{c}_2$), e la normale ad esso in un qualsiasi punto O, orientata verso τ_1 come asse x (versore $\boldsymbol{c}_1$) il vettore della traslazione generalizzata assume l'espressione $\boldsymbol{c}_2 \cdot \varphi(x)$ ed è quindi caratterizzato dalla funzione scalare $\varphi(x)$ (*ampiezza della traslazione*). Al generico punto $P^*(x^*, y^*)$ di π^* corrisponde, per effetto della traslazione, il punto $P(x^*, y)$, con $y = y^* + \varphi(x)$. Scrivendo senz'altro x al posto dell'invariabile x^*, ogni curva $y^* = f^*(x)$ si muta, in π, nella $y = f(x)$ essendo

$$f(x) = f^*(x) + \varphi(x). \tag{1}$$

Ogni superficie si muta in una superficie (od in un insieme di superficie) avente la stessa area, e limitata da un contorno γ tangente alle rette τ_1, τ_2 che sono unite, come ogni altra parallela a τ. Rispetto a tali rette

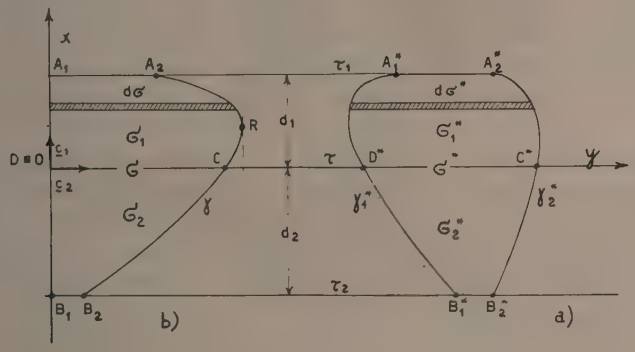


Fig. 1.

risultano inoltre invarianti il momento statico, quello di inerzia ed il raggio di girazione.

Se $\varphi(x)$ è finita e continua, e $d^2\varphi/dx^2 \geqq 0$ [oppure $\leqq 0$] in tutto π, ogni curva ed ogni spezzata convesse come $\varphi(x)$ restano tali per effetto della traslazione e le rette non parallele a τ si trasformano in curve convesse come $\varphi(x)$.

Il contorno γ^* è in generale costituito dall'insieme di due curve γ_1^* e γ_2^* con le convessità rivolte in versi opposti, e da due eventuali tratti rettilinei $A_1 A_2$ [su τ_1], e $B_1 B_2$ [su τ_2]. La traslazione di ampiezza: $-\gamma_1^*(x)$ muta γ_1^* nell'asse delle x; A_1^* e B_1^* nelle intersezioni A_1 e B_1 di τ_1 e τ_2 con lo stesso asse; e la γ_2^* nella curva convessa $\gamma_2 = \gamma_2^* - \gamma_1^*$, con la concavità rivolta verso l'asse delle x. Senza alterare l'area, il momento statico, quello di inerzia ed il raggio di girazione, la generica figura convessa σ^* può quindi essere trasformata in un quadrilatero mistilineo convesso $A_1 A_2 C B_2 B_1$ (fig. 1 *b*). Le limitazioni per ρ che si possono stabilire per un quadrilatero di questo tipo, valgono pertanto anche per la più generica figura a contorno convesso, o riducibile a tale mediante una traslazione generalizzata.

Il luogo dei baricentri delle striscie elementari di σ^* parallele a τ ha per equazione $y = 1/2\,[\gamma_1^*(x) + \gamma_2^*(x)]$; si chiama *simmetrizzazione*, nel senso di J. Steiner, [rispetto alla retta r, normale a τ] la traslazione parallela a τ che porta tutti i baricentri su r, il quale diviene così asse baricentrale per l'intera σ^*. Tale traslazione ha l'ampiezza

$$\psi(x) = -\frac{1}{2}[\gamma_1^*(x) + \gamma_2^*(x)] + c,$$

essendo c una costante che si annulla se r coincide con l'asse x. Sebbene non si possa dir nulla in generale sul segno di $d^2\psi/dx^2$, è facile verificare, mediante la (1), che la simmetrizzazione non fa uscire σ^* dal campo delle figure convesse. Anche se r è asse baricentrale per σ^*, ogni simmetrizzazione non nulla diminuisce il raggio di girazione relativo ad r, poichè riduce a zero la distanza da r dei baricentri delle singole striscie. Combinando questo risultato con l'invarianza del momento di inerzia rispetto a τ, si ritrova [4] per via geometrica che il momento di inerzia polare rispetto al baricentro diminuisce per effetto di ogni simmetrizzazione.

3. Estremi di ρ/d per uno stesso s. – Riferendosi, come si farà sistematicamente nel seguito, ad un quadrilatero mistilineo convesso come quello della fig. 1 *b*, si riconosce facilmente che ρ/d è invariante rispetto a qualsiasi cambiamento di scala delle coordinate; per uno stesso s esso dipende invece dal contorno γ. Siano ρ_γ/d e ρ_λ/d due suoi valori, relativi a due quadrilateri mistilinei convessi, aventi egual area, il baricentro su τ, e limitati dalle curve γ e λ, e dalle stesse tangenti τ_1 e τ_2: per l'osservazione precedente l'eguaglianza dell'area non limita la generalità della trattazione. Si consideri inoltre il quadrilatero limitato dalla curva $(1-\beta)\,\gamma + \beta\lambda$; se $0 \leq \beta \leq 1$ esso è convesso come i precedenti, ha la stessa area e gli stessi valori di d e di s, mentre ρ/d è dato da

$$\frac{\rho^2}{d^2} = (1-\beta)\frac{\rho_\gamma^2}{d^2} + \beta\frac{\rho_\lambda^2}{d^2} \tag{2}$$

e, al variare di β tra 0 ed 1, varia quindi con continuità tra ρ_γ/d e ρ_λ/d, assumendo tutti i valori reali compresi tra di essi. Per uno stesso s l'insieme dei valori che ρ/d assume al variare di γ, e quindi di σ, nel campo delle figure convesse, è certo limitato essendo almeno [5]: $0 < \rho/d < d_s\,d$. Esso ammette quindi un estremo superiore ρ_s/d ed un estremo inferiore ρ_i/d, che, per la (2) non possono essere un massimo ed un minimo isolati, ma sono

(4) Per una dimostrazione analitica della stessa proprietà, relativa però al solo momento polare, si veda G. Polya, G. Szegö, *Approximations and bounds for the electrostatic capacity and for similar physical quantities*. «Report for the Office of Naval Research U.S.A.» (in istampa) cap. 7, paragrafo 2, p. 242.

(5) Una limitazione superiore più restrittiva sarebbe subito fornita dai lavori citati nella nota (1); analogamente una limitazione inferiore diversa da zero è indicata nel lavoro citato nella nota (2).

necessariamente punti di accumulazione dell'insieme [6], e possono dipendere soltanto dal parametro s.

4. DIPENDENZA DA s DI ρ_1/d. – Si immagini la σ della fig. 1 *b* divisa in strisce elementari parallele ad x (anzichè a τ come in figura) e sia R il punto di γ in cui la tangente [oppure una delle tangenti] è parallela ad x. Si indichi con $x = \chi_1(y)$ l'equazione dell'eventuale tratto rettilineo $A_1 A_2$ e dell'arco A_2 R, ed analogamente con $x = \chi_2(y)$ l'equazione del segmento $B_1 B_2$ e dell'arco B_2 C R. Applicando a σ la traslazione *parallela ad* x di ampiezza $-\alpha(\chi_1 + \chi_2)$, con: $0 < \alpha \leq 1/2$, si ottiene una figura convessa $\bar{\sigma}$ limitata dalle curve $\bar{\chi}_1 = (1-\alpha)\chi_1 - \alpha\chi_2$ e $\bar{\chi}_2 = (1-\alpha)\chi_2 - \alpha\chi_1$.

Per la definizione del baricentro si ha inoltre in σ

$$\int_{\sigma} x\,dx\,dy = \frac{1}{2}\int_0^{y_R} [\chi_1^2(y) - \chi_2^2(y)]\,dy = 0$$

ed analogamente in $\bar{\sigma}$

$$\int_{\bar{\sigma}} x\,dx\,dy = \frac{1}{2}\int_0^{y_R} [\bar{\chi}_1^2(y)\,\bar{\chi}_2^2(y)]\,dy = \frac{1-2\alpha}{2}\int_0^{y_R} [\chi_1^2(y) - \chi_2^2(y)]\,dy = 0$$

e quindi, dopo la *simmetrizzazione* [7] *parziale* applicata a σ la τ è ancora asse baricentrale; pure invariata risulta la distanza tra le tangenti alla figura simmetrizzata parallele a τ, mentre s diminuisce. Infatti in corrispondenza ad $A_1 A_2$, $B_1 B_2$ le equazioni del contorno si riducono a $x = d_1$ e $x = -d_2$, che sostituite a χ_1 e χ_2 dànno

$$\bar{d}_1 + \bar{d}_2 = d_1 + d_2 = d \quad ; \quad \bar{s} = \frac{\bar{d}_2 - \bar{d}_1}{2} = (1-2\alpha)\cdot s \leq s$$

e lo stesso si verifica se A_2 coincide con A_1 e B_2 con B_1. Anche la distanza da τ dei baricentri delle singole strisce diminuisce, essendo moltiplicata per $(1-2\alpha)$, ed insieme ad essa si riducono il momento di inerzia, il raggio di girazione baricentrale, il rapporto ρ/d e quindi anche il suo estremo inferiore ρ_1/d, che risulta pertanto funzione *crescente* di s.

5. DIPENDENZA DA s DI ρ_2/d. Per stabilire la legge di dipendenza di ρ_2/d da s occorre servirsi di una traslazione, o del prodotto di successive traslazioni, che, a differenza della simmetrizzazione parziale, aumentino ρ/d pur riducendo s, senza naturalmente far uscire σ dal campo delle figure convesse. Ciò può essere ottenuto applicando innanzi tutto a σ fig. 2 *a* la traslazione parallela a τ di ampiezza $-\alpha\cdot\gamma x$ con $0 < \alpha \leq 1/2$. Resta

(6) Il loro calcolo effettivo mostra che si tratta anzi di un limite superiore ed inferiore, poichè ρ_1/d e ρ_2/d corrispondono a figure convesse.

(7) Per $\alpha = 1/2$ essa si riduce infatti ad una simmetrizzazione di STEINER.

così invariato ρ, mentre il segmento $B_1 A_1$ si muta in $\bar{\gamma}_1(x) = -\alpha \cdot \gamma(x)$ e la curva $\gamma(x)$ si muta in $\bar{\gamma}_2(x) = (1-\alpha)\cdot\gamma(x)$. La $\bar{\sigma}$ (fig. 2 *b*) è ancora convessa, e le due porzioni $\bar{\sigma}_a$, $\bar{\sigma}_b$ in cui essa è divisa dall'asse x hanno entrambe i baricentri sull'asse τ; se Δ è l'area di σ, le aree di $\bar{\sigma}_a$ e $\bar{\sigma}_b$ sono rispettivamente $\alpha\cdot\Delta$ e $(1-\alpha)\cdot\Delta$.

Sia R il punto in cui $\bar{\gamma}_1$ ha la tangente [oppure una delle tangenti] parallela ad x; sia $x = \psi_1(y)$ l'equazione dell'arco R E e del segmento E A_1, e sia $x = \psi_2(y)$ l'equazione dell'arco R F e del segmento F B_1. Alla sola $\bar{\sigma}_a$ si applichi la traslazione *parallela ad* x di ampiezza $-(\psi_1 + \psi_2 + 2s)$; la ψ_1 si muta in $-\psi_2 - 2s$, e la ψ_2 in $-\psi_1 - 2s$, in modo che $\bar{\sigma}_a$ si trasforma nella $\bar{\sigma}'_a$ simmetrica alla $\bar{\sigma}_a$ rispetto alla retta parallela a τ passante per il punto di mezzo di A_1 B_1, (fig. 2 *c*). La $\bar{\sigma}'_a$ è ancora compresa tra τ_1 e τ_2, ed ha la convessità rivolta come la $\bar{\sigma}_a$, in modo che la figura $\bar{\sigma}'_a + \bar{\sigma}_b$ è sempre convessa. Il baricentro di $\bar{\sigma}'_a$ si trova dalla banda delle x negative

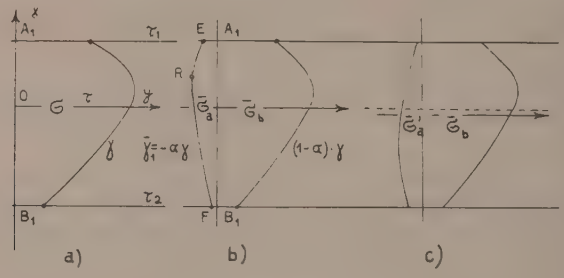


Fig. 2.

ad una distanza $2s$ dell'asse y, e quindi il baricentro di $\sigma'_a + \bar{\sigma}_b$ non giace più sull'asse y, ma ha l'ascissa $x = -2s\alpha$. Di conseguenza il parametro s relativo a $\bar{\sigma}'_a + \bar{\sigma}_b$ è più piccolo di quello relativo a σ, poichè come si verifica immediatamente, risulta moltiplicato per $(1 - 2\alpha)$. Invece il momento di inerzia, il raggio di girazione, il rapporto ρ/d e quindi anche l'estremo superiore ρ_2/d vengono aumentati, in quanto ai momenti di $\bar{\sigma}'_a$ e di $\bar{\sigma}_b$ rispetto ai propri assi baricentrali, la cui somma eguaglia il momento di σ rispetto a τ, vanno aggiunti dei termini essenzialmente positivi per tener conto dello spostamento del baricentro complessivo. L'estremo superiore ρ_2/d risulta pertanto funzione *decrescente* di s.

6. Conclusioni. – Per una figura piana omogenea a contorno convesso, o riducibile a tale mediante una traslazione generalizzata, il rapporto tra il raggio di girazione relativo ad un asse baricentrale e la distanza tra le tangenti parallele all'asse, ammette un estremo inferiore ed un estremo superiore i quali sono punti di accumulazione e risultano rispettivamente funzione crescente e decrescente della distanza del baricentro dalla retta parallela alle due tangenti che dimezza la striscia da esse limitata.

Astronomia. — *Sulla variazione del profilo di alcune righe spettrali dal centro al lembo del Sole.* Nota III di MASSIMO CIMINO, presentata (*) dal Socio G. ARMELLINI.

Facendo seguito a due Note dallo stesso titolo apparse in questi «Rendiconti» (1), diamo ora un primo gruppo di profili del tripletto infrarosso del calcio ionizzato, utilizzando un gruppo di lastre con densità ben equilibrate.

7. PROFILI OSSERVATI DEL TRIPLETTO INFRAROSSO DEL CALCIO IONIZZATO, DEDOTTI DAL GRUPPO DI LASTRE 26_a–26_b. – a) *Curve di calibrazione delle lastre.* Nella fig. 1 ho disegnato le curve di calibrazione relative alle lastre 26_a–26_b. Sulle ascisse si dànno, in unità arbitrarie e in scala logaritmica, le intensità luminose I trasmesse alla lastra fotografica dalla fenditura a gradini (*step–slit*), mentre sulle ordinate si riportano le trasmissioni T registrate al microfotometro, assieme alle corrispondenti densità D (2). Le tre curve si riferiscono ai tempi di esposizione di $1^m\ 50^s$; 3^m; 3^m40^s. La prima di esse è stata utilizzata per ridurre in intensità le densità fotografiche degli spettrogrammi ottenuti con tempi di posa di $1^m\ 40^s$ e 2^m (cfr. Tabella I della Nota II); la seconda e la terza per gli spettrogrammi con 3^m e $3^m\ 40^s$ rispettivamente. Il tratto delle curve effettivamente utilizzato è quello limitato dai tratti orizzontali; come si vede, la densità di questo gruppo di lastre è così ben scelta che ha permesso di utilizzare soltanto il tratto più sicuro delle curve (non molto lontano dalla linearità), e ciò deve considerarsi tanto più notevole in quanto si tratta di righe spettrali assai profonde (fino a circa il 16 % del fondo continuo).

Prima di disegnare queste curve di calibrazione è stata presa in esame l'eventuale influenza dei seguenti fattori; 1° differenze derivanti dalle variazioni nel microfotometro (diverse aperture della fenditura, cambiamento della sensibilità dell'elettrometro, ecc.); 2° differenze nella lunghezza d'onda e cioè, anche, della zona della lastra; 3° differenze tra lastra e lastra; 4° differenze pei tempi di esposizione. Premettiamo che le registrazioni della calibrazione furono sempre effettuate col microfotometro nelle identiche condizioni con le quali furono registrati gli spettrogrammi, ripetendole in due zone diverse e distanti della lastra (3) (e comprese tra le righe estreme del tripletto), e per ciascuno dei 4 tempi di esposizione; in totale *16* registrazioni. I risultati della discussione si possono allora così compendiare: le differenze tra le curve di calibrazione ottenute in (leggermente) diverse condizioni di impiego del microfotometro, ovvero cambiando la zona della lastra sono assolutamente trascurabili, e certamente inferiori ai piccoli errori acci-

(*) Nella seduta del 13 dicembre 1952.

(1) Serie VIII, vol. IX, fasc. 3–4, pp. 177–181; ser. VIII, vol. XIII, fasc. 3–4, pp. 120–126.

(2) Si ricorda che è per definizione: $D = \log \frac{100}{T}$.

(3) Queste zone furono scelte in punti non perturbati da righe.

dentali; invece una sensibile (sebbene lieve) differenza si riscontra sistematicamente tra curve relative a diversi tempi di esposizione.

Per passare ad un esame più approfondito di questo effetto è necessario tener presente che le due calibrazioni relative ai tempi $1^m\,40^s$ e $3^m\,40^s$ erano impresse sulla stessa lastra 26_c, mentre le calibrazioni relative ai tempi 2^m e 3^m lo erano sulla lastra 26_d (4). Ora, prendendo in esame separatamente le due curve di calibrazione relative ai primi due tempi (lastra 26_c) e quelle relative ai secondi (lastra 26_d), si constata che, *in ambedue i casi*, il contrasto diminuisce col crescere del tempo di esposizione. D'altra parte, confrontando tra loro le due curve relative ai tempi *poco differenti* di $1^m\,40^s$ e 2^m, *ma dedotte da lastre diverse*, si constata una differenza assai lieve, non superiore ai soliti errori casuali. Pertanto si deve concludere che una eventuale differenza tra le lastre, se esiste, deve essere molto piccola e potrà introdurre errori di un ordine di grandezza non superiore a quello ammesso. Per questa stessa ragione, invece, la sensibile differenza riscontrata tra le curve relative a tempi diversi di esposizione, deve ritenersi reale, e non può essere del tutto trascurata. Delle due curve relative ai tempi $1^m\,40^s$ e 2^m si è fatta, come era naturale, la media, e si è ottenuta così la curva attribuita, nella fig. 1, al tempo medio di 1^m50^s (5).

b) *Profili osservati*. Nella TABELLA III si dànno le intensità osservate delle righe del tripletto infrarosso del calcio ionizzato, in percento del fondo continuo, così come sono state dedotte dal gruppo di lastre 26_a–26_b. Questi valori potranno essere migliorati dai risultati delle misure delle altre lastre, che, meno equilibrate nella densità, potranno meglio precisare i valori del centro o delle ali delle righe. Su questa tabella osserviamo: 1° il modulo $|\Delta\lambda|$ della differenza tra la lunghezza d'onda di un generico punto della riga e quella del suo centro è stato dedotto misurando sulla registrazione la distanza tra i due punti e calcolando quindi la dispersione totale dello *spettrografo* + *microfotometro* mediante righe di lunghezza d'onda ben note. In media si è ottenuto: *0.07* A/mm.; 2° le letture sono state fatte su un grandissimo numero di punti, e separatamente per le due ali delle righe. Per risparmio di stampa si pubblicano però soltanto le intensità in un gruppo selezionato di punti, scelti tra quelli che non appaiono perturbati da altre

(4) Si intende che queste due lastre furono sviluppate nella stessa *tank* assieme alle 26_a e 26_b che portano gli spettrogrammi. Tutte, inoltre, appartenevano alla stessa scatola.

(5) Ricordiamo che la dipendenza del contrasto dal tempo di esposizione è una conseguenza del fatto che la così detta « legge di reciprocità » di BUNSEN e ROSCOE (secondo la quale la reazione foto chimica, - e quindi il grado di annerimento della lastra fotografica -, dovrebbe dipendere *soltanto* dalla energia *totale* impiegata, e non già separatamente dalla intensità luminosa e dal tempo di esposizione) non è soddisfatta in realtà. È provato sperimentalmente che il contrasto tende a diminuire con l'aumentare del tempo di esposizione, a partire da un certo « tempo ottimo », per il quale la minima energia è richiesta per produrre una assegnata densità. Questo « tempo ottimo » è, in generale, dell'ordine di qualche frazione di secondo per il moderno materiale fotografico (cfr. per esempio: E. W. H. SELWYN, *Photography in Astronomy*, Eastman Kodak Co., Rochester, N. Y. 1950, p. 52).

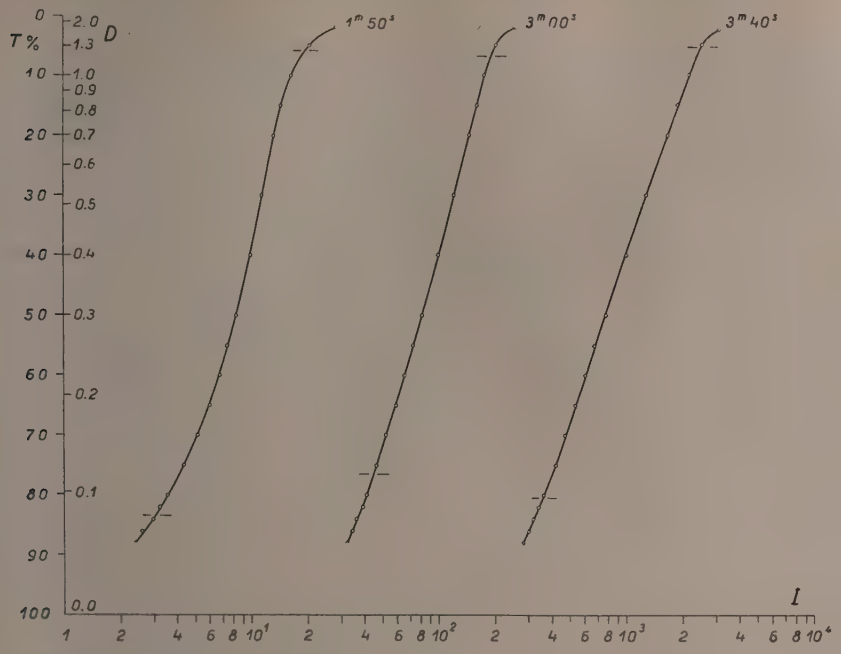


Fig. 1. – Curve di calibrazione delle lastre $26_a - 26_b$ per diversi tempi di posa.

righe (*blends*), e in modo che sia facile disegnare il profilo con sufficiente esattezza; 3° per la zona centrale delle righe, ed ove la intensità in punti simmetrici attorno al centro non differiva sistematicamente per più del 2% circa, si è fatta la media. Invece per le due ali estreme si pubblicano i valori per l'ala violetta (v) e per quella rossa (r) separatamente.

Sui valori ottenuti per le intensità è stata apportata soltanto una correzione per tener conto dei *fantasmi del reticolo*. Questi erano stati valutati (per lo stesso reticolo da me usato) dal Minnaert [6]; per il I ordine e per $\lambda 8500$ si hanno due fantasmi ad una distanza $15\,A$ dal centro, con una intensità (relativa al massimo centrale della riga) di 0.34 per il violetto e 0.27 per il rosso. Come si vede, si tratta di valori assai piccoli, e, dato che la larghezza della riga è pure piccola rispetto al valore di $15\,A$, è lecito allora usare per la correzione la formula approssimata [7]:

$$i_c = (i_o - g)\frac{100}{100 - g},$$

ove i_c ed i_o sono le intensità *corrette* ed *osservate*, e $g = 0.34 + 0.27 = 0.61$. Risulta che la massima influenza dei fantasmi è dell'ordine del 0,5 % del fondo continuo per il centro delle righe, ed è praticamente nulla per le ali.

(6) Cfr. MINNAERT, HOUTGAST, MULDERS, *Photometric Atlas of the Solar Spectrum* Amsterdam, 1940, p. 6.

(7) Cfr. per esempio A. UNSÖLD, *Physik der Sternatmosphären*, Springer, Berlin, 1938, p. 216.

TABELLA III.

Intensità osservate in percento del fondo continuo. Valori generali provvisori.

$\Delta\lambda$ \ sen $\delta = r/R$	0.000	0.643	0.766	0.866	0.940	0.966	0.985
			Riga Ca^+: λ 8498.				
0.000	27.3	36.0	37.6	35.7	36.2	30.2	25.9
0.070	30.4	38.1	40.4	38.5	38.3	32.3	28.0
0.140	37.6	44.2	46.3	45.8	45.5	39.8	34.2
0.210	47.1	52.1	53.3	55.1	55.4	49.7	45.8
0.280	54.0	60.4	59.3	63.3	65.5	61.4	57.9
0.350	58.5	64.6	63.5	68.0	72.9	68.8	68.7
0.421	62.1	68.9	67.4	72.1	76.8	73.7	74.4
0.491	64.9	71.0	69.9	73.9	78.7	77.0	77.5
0.561	67.0	73.1	72.2	76.5	80.5	78.7	80.3
0.631	69.0	75.0	73.5	78.4	83.1	81.1	82.1
0.701	71.1	77.2	75.3	79.7	85.2	82.4	83.0
0.771	72.6	79.3	77.3	80.9	85.5	84.4	85.6
0.841_r	74.7	82.3	78.1	82.1	86.8	85.6	86.5
0.911_r	76.3	82.3	80.3	84.0	88.4	86.4	87.5
0.981_r	77.3	84.1	82.0	84.6	88.9	87.2	87.9
1.051_r	79.4	84.7	83.1	86.5	89.4	88.9	90.2
1.402_v	84.0	88.4	85.9	89.6	92.0	93.5	92.1
1.577_r	88.1	90.5	88.7	90.5	93.2	93.5	94.0
1.787_v	88.1	91.4	90.4	92.8	94.2	94.7	94.3
2.068_r	92.1	93.9	91.5	94.1	95.5	95.1	94.5
2.138_r	93.8	94.2	92.7	94.7	96.3	95.1	95.4
2.208_v	91.2	93.6	94.4	93.5	96.0	98.0	96.8
2.418_r	93.8	95.1	95.0	95.0	97.1	97.6	96.3
2.489_r	93.8	95.8	95.0	95.3	97.1	97.6	96.3
2.559_v	94.4	96.4	95.5	96.3	97.4	99.0	98.0
2.559_r	93.8	96.1	95.2	95.3	96.3	97.6	96.6

Segue: TABELLA III.

$\text{sen}\,\delta = r/R$ / $\lvert\Delta\lambda\rvert$	0.000	0.643	0.766	0,866	0.940	0.966	0.985
2.629_v	94.4	96.4	95.5	96.3	97.4	100.0	99.1
2.629_r	93.8	96.4	95.4	95.3	96.3	97.6	96.8
2.699_v	95.9	96.7	95.5	95.3	97.6	99.0	99.1
2.699_r	95.3	96.4	95.5	96.0	97.1	97.6	96.8
2.769_v	97.4	97.0	95.5	96.3	97.9	98.0	99.1
2.769_r	96.9	96.4	95.5	97.5	97.9	97.6	96.8
3.505_v	—	—	—	97.2	97.9	98.0	99.1
4.907_v	—	98.8	98.3	99.1	99.5	100.0	99.1
4.608_r	96.9	98.2	98.3	98.4	100.0	100.0	99.1
8.412_r	100.0	101.2	101.7	100.9	100.5	100.0	100.9

Riga Ca^+: λ 8542.

0.000	15.5	19.2	23.3	18.9	23.3	17.3	16.0
0.035	16.1	20.0	23.6	19.4	23.7	17.7	16.0
0.700	17.6	21.7	24.3	21.0	24.7	18.6	16.6
0.140	22.5	26.8	29.0	25.7	28.4	20.4	18.8
0.210	30.7	33.9	36.8	34.7	34.9	25.2	23.3
0.280	39.2	43.0	43.8	44.9	46.2	33.5	31.2
0.350	44.7	49.5	50.7	52.4	53.6	43.4	43.2
0.420	48.6	53.3	55.0	57.1	60.7	51.8	52.8
0.490	51.5	56.3	57.4	60.3	65.5	58.6	59.3
0.560	52.3	59.2	59.7	62.6	67.4	63.1	63.6
0.630	53.7	60.2	60.6	63.9	69.7	65.5	65.9
0.700	55.1	61.1	61.8	64.7	71.4	68.6	68.3
0.770	56.5	62.6	63.1	66.1	72.6	70.2	70.2
0.840	57.2	63.5	63.8	67.9	73.8	71.0	71.4
0.910	58.2	64.4	64.6	69.5	75.0	72.0	72.6
0.980	59.0	65.9	65.6	69.0	76.1	72.1	73.3
1.050	60.3	66.4	66.8	69.5	77.6	74.3	74.0
1.500	65.4	71.9	70.7	74.7	81.5	79.4	79.6

Segue: TABELLA III.

sen$\delta = r/R$ / $\lvert\Delta\lambda\rvert$	0.000	0.643	0.766	0.866	0.940	0.966	0.985
1.580	66.5	73.0	71.7	76.0	82.8	80.8	81.4
1.640	67.7	74.0	72.4	76.5	83.5	81.6	82.2
1.780	69.2	75.2	74.0	77.5	85.0	83.0	83.4
1.850	69.8	75.8	74.7	78.2	85.5	83.9	84.0
1.930	70.6	76.3	75.2	78.5	85.9	84.9	84.5
2.480	75.5	80.6	79.9	82.7	88.5	87.6	88.0
2.560	76.2	81.2	80.5	83.2	89.3	88.1	88.7
2.830	78.8	83.0	82.2	84.4	90.1	90.1	89.8
2.920	79.4	83.6	82.7	84.9	90.6	90.5	90.1
3.110	80.5	84.9	83.9	86.5	91.5	91.5	91.5
3.190	81.1	85.4	84.3	86.9	91.7	91.5	91.6
3.460	82.5	86.7	85.9	87.8	92.4	92.3	92.0
3.540	82.8	87.3	86.5	88.0	92.6	92.7	—
4.620	88.9	91.5	90.2	92.2	95.9	95.4	—
4.760	89.7	92.3	90.5	92.0	95.8	95.6	—
4.900	90.1	92.5	91.0	91.2	96.1	95.4	—
6.300_r	95.2	97.6	94.7	96.5	97.5	97.8	—
7.000_v	94.2	95.5	95.5	95.9	97.5	97.1	—
7.700_v	96.5	96.7	96.2	95.9	99.1	97.4	—
7.700_r	96.1	96.7	96.7	96.2	98.3	98.7	—
8.400_v	99.0	97.6	98.0	96.9	99.4	98.4	—
9.100_v	99.0	97.6	99.3	97.5	99.7	98.7	—
9.800_r	99.5	98.2	98.5	98.7	100.3	100.3	—
10.850	99 5	99.4	99.8	100.4	100.6	100.6	—

Riga Ca^+: λ 8662.

0.000	18.1	21.8	24.2	21.4	24.6	19.1	17.7
0.035	18.5	22.3	25.2	22.1	25.1	19.3	18.2
0.070	19.9	23.4	26.6	23.9	25.8	19.8	18.8
0.140	25.7	28.7	31.4	29.6	30.1	22.7	21.1

Segue: TABELLA III.

sen δ = r/R / |Δλ|	0.000	0.643	0.766	0.866	0.940	0.966	0.985
0.210	34.1	35.7	39.6	37.3	36.2	30.6	26.0
0.280_v	39.6	41.7	44.8	44.2	42.9	37.8	32.1
0.280_r	44.7	46.7	47.7	48.1	47.8	39.1	36.7
0.350_v	46.7	50.7	51.7	54.1	54. 3	46.1	44.6
0.350_r	51.0	52.8	54.5	57.4	56.5	50.0	48.2
0.419	54.6	57.2	60.2	62.2	63.3	56.9	57.6
0.489	58.4	60.6	63.4	66.1	67.7	63.4	63.8
0.559	60.7	63.1	65.2	67.8	70.3	67.1	68.1
0.629	62.8	65.8	66.8	69.4	72.5	70.1	70.6
0.699	64.1	67.6	68.4	71.1	74.7	72.1	73.2
0.769	65.7	68.8	69.8	72.3	75.9	73.3	74.1
0.839	67.1	69.9	71.3	73.5	77.4	76.3	75.8
0.909	68.2	71.0	71.6	74.8	78.7	77.1	77.0
0.979	69.3	72.3	73.5	75.8	79.6	78.3	78.4
1.049	70.6	73.2	74.4	76.5	80.5	79.5	79.6
1.118	71.8	74.7	75.1	77.5	81.6	80.7	81.0
1.188	73.1	75.7	76.0	78.7	82.5	81.6	81.8
1.258	74.5	76.5	77.0	79.5	83.2	82.5	83.3
1.713_v	80.5	81.8	81.3	84.2	88.5	87.6	88.0
1.782_v	81.1	82.2	82.0	84.6	88.7	88.1	88.5
2.062	83.7	85.8	84.9	86.5	90.2	90.2	90.9
2.132	84.5	86.2	85.6	87.2	90.5	90.7	91.6
2.551_v	88.2	88.9	88.5	90.1	93.1	93.3	94.0
2.621_v	88.5	89.6	89.4	91.1	93.4	93.9	94.4
3.041_v	90.8	90.9	91.1	92.3	95.1	95.8	95.5
3.041_r	90.8	91.8	—	92.6	93.7	94.5	94.7
3.111_r	91.1	92.2	—	92.8	94.3	94.5	94.9
3.949_v	93.8	94.9	94.3	96.2	97.3	97.6	98.1
3.949_r	93.6	96.1	93.7	95.2	95.9	97.0	96.8
4.019_v	94.1	95.7	94.7	96.2	97.3	98.0	98.2

Segue: TABELLA III.

sen δ = r/R / |Δλ|	0.000	0.643	0.766	0.866	0.940	0.966	0.985
4.019_r	94.0	96.0	93.7	95.2	95.9	97.0	96.6
4.264_v	95.0	95.1	95.5	96.2	97.5	98.8	98.5
4.404_v	95.0	95.1	96.1	96.6	97.8	98.6	99.3
4.404_r	95.2	96.4	95.2	96.2	96.7	97.5	97.9
4.543_r	95.5	96.4	95.1	96.2	97.0	97.6	98.1
4.683_r	95.5	96.6	95.2	96.2	97.3	98.8	98.1
4.948_v	95.6	96.6	96.4	97.5	98.9	99.5	99.0
6.081_v	97.6	98.1	97.0	99.2	100.0	100.6	99.2
6.221_v	97.6	97.7	96.9	99.5	100.0	100.6	99.0
7.165_r	98.1	98.4	98.7	98.5	98.9	98.9	100.4
8.563_v	99.4	98.9	98.9	101.6	100.5	100.2	100.0
11.184_r	100.0	99.8	100.3	99.5	100.0	101.0	101.2

Nessuna correzione è stata invece possibile applicare per la luce diffusa. Ma occorre tener presente che si è operato nel I° ordine del reticolo, e questo è il grande vantaggio (assieme alla piccola intensità dei fantasmi) di avere usato uno spettrografo a così alta dispersione come è quello della Torre Solare di Monte Wilson.

Infine, una prova del fondo continuo è stata fatta con il noto metodo proposto dal Minnaert [8]. Avendo questa confermato praticamente (nell'ambito dell'1 %) il fondo continuo da me scelto empiricamente [9], si stima opportuno rimandare ad un secondo momento (allorchè i valori provvisori della Tabella III potranno essere migliorati dalle misure delle altre lastre) una eventuale, più precisa determinazione. Anche i confronti, i disegni dei profili e le interessanti deduzioni di carattere teoretico che si possono trarre dai profili osservati sono rimandati ad una nota successiva.

(8) Cfr. A. UNSÖLD, loc. cit., pp. 221–223. Anche: J. HOUTGAST, *The variations in the profiles of strong Fraunhofer lines along a radius of the solar disk*, Utrecht 1942, p. 28.

(9) Le registrazioni dei profili sono state sempre estese fino a zone (da ambedue i lati delle righe) che rimangono, – da un confronto con l'*Atlas*... del MINNAERT – ben lontane da altre righe.

Astronomia. — *Caratteristiche fisiche e spaziali di stelle con* $V \geq 40$ *km/sec. Effetto di longitudine per un gruppo di stelle veloci* (*). Nota di MARIA CRISTINA BALLARIO, presentata (**) dal Socio G. ABETTI.

Si considerano in questa Nota le caratteristiche fisiche e spaziali delle stelle di grandezza apparente ≤ 5.5 e con velocità spaziali peculiari ≥ 40 km/sec.

Questo studio fa parte di un lavoro più ampio iniziato nel 1946 da A. Colacevich e M. C. Ballario riguardante un complesso di 2459 stelle.

In alcune Note precedenti [1,2,3] vennero indicati i metodi usati per la determinazione delle velocità spaziali e studiate le zone di corrente alle quali appartengono le correnti del Toro e dell'Orsa Maggiore, indicate per brevità con C_1 e C_2. Alle correnti C_1 e C_2 si considerarono appartenenti le stelle rispettivamente $V \leq 40$ km/sec e $V \leq 49.5$ km/sec, sia perché al di sopra di tali valori i grafici relativi alla distribuzione delle velocità presentavano un andamento discontinuo e con valori di piccola entità, sia per seguire l'uso di trattare a parte le stelle ad alta velocità.

Rimanevano quindi da esaminare le stelle escluse nei precedenti lavori e, fra queste, le stelle con $V \geq 40$ km/sec; scopo di questa Nota è appunto l'esposizione dei risultati ottenuti.

La distribuzione sulla sfera celeste degli apici di queste stelle mostra l'esistenza di due zone preferenziali che vengono indicate per brevità con K_1 e K_2.

La zona K_2 comprende gli apici di 92 stelle e si estende dalla longitudine galattica $l = 288°$ a $l = 349°$ e dalla latitudine $b = -30°$ a $b = +20°$. I valori medi delle velocità spaziali, liberate dal moto del sole, e dell'apice sono date nella seguente tabella, nella quale sono considerate, sia tutte le stelle, sia le stelle con $V \geq 50$ km/sec, sia le stelle con $V \geq 63$ km/sec. Questa divisione è stata fatta per mettere in evidenza eventuali differenze tra le proprietà fisiche e spaziali delle stelle con diversa velocità e quindi per confermare o meno la necessità di considerare a parte le stelle con $V \geq 63$ km/sec che presentano il ben noto « effetto Oort ».

(*) Lavoro eseguito all'Osservatorio Astrofisico di Arcetri – Firenze.

(**) Nella seduta del 14 febbraio 1953.

(1) M. C. BALLARIO A. COLACEVICH, *Generalità e calcolo delle velocità spaziali di 2459 stelle*. « Memorie S.A.I. », vol. XVIII-1 (1946) e « Oss. Mem. Arcetri », *63*, 49.

(2) A. COLACEVICH M. C. BALLARIO, *Moto preferenziale di 236 stelle*. « Memorie S.A.I. », vol. XIX-3 e « Oss. Mem. Arcetri », *64*, 105 (1948).

(3) M. C. BALLARIO A. COLACEVICH, *Moto preferenziale di 454 stelle*. « Memorie S.A.I. », vol. XX-4 (1949) e « Oss. Mem. Arcetri », *65*, 107 (1949).

TABELLA I.

V	l_m	b_m	V_m km/sec	num. stelle
$V \geq 40$ km/sec	320°.1	—2°.9	64.2	92
$V \geq 50$ »	320 .0	—4 .8	74.4	64
$V \geq 63$ »	316 .6	—6 .5	92.5	34

Le caratteristiche delle stelle della corrente K_2 sono le seguenti:

a) le posizioni delle stelle sulla sfera celeste non presentano il normale addensamento galattico;

b) la distribuzione dei tipi spettrali mostra una totale assenza statistica di stelle di tipo B e una relativa abbondanza di stelle di tipo K;

c) dividendo le stelle della K_2 in tre sottogruppi, tali che gli apici delle stelle appartenenti a ciascun sottogruppo, siano compresi in intervalli circa uguali di longitudine (20°), risulta che la velocità media di ciascun sottogruppo è funzione della longitudine e precisamente che la velocità media aumenta al diminuire della longitudine. Si ha precisamente:

TABELLA II.

sottogruppi	$V \geq 40$ km/sec	num. stelle	$V \geq 50$ km/sec	num. stelle	$V \geq 63$ km/sec	num. stelle
$287°.9 \leq l \leq 308°.3$	77.4	22	87.4	17	104.2	11
$311 .2 \leq l \leq 328 .8$	64.8	39	74.2	26	90.4	14
$330 .0 \leq l \leq 349 .3$	57.9	31	64.9	21	80.1	8

Tale dipendenza delle velocità medie dalla longitudine è stato qui indicato col nome di « effetto di longitudine ».

Dato il piccolo numero di stelle concorrenti nelle medie può sorgere il sospetto che le medie ottenute siano poco attendibili e poiche, a mio avviso, l'effetto di longitudine presenta un certo interesse, sono state estese le ricerche a un gruppo di stelle di grandezza apparente fino a 10.8 e con $V \geq 63$ km/sec, tratte dal catalogo di G. Miczaika [4], comprendente, per questo addensamento, 155 stelle. L'effetto di longitudine risulta confermato dalla seguente tabella III.

(4) G. MICZAIKA, « A.N. », 270, 249.

TABELLA III.

sottogruppi $\begin{cases} b \leq +30° \\ b \geq -30° \end{cases}$	V_m (V ≥ 63 km/sec)	num. stelle
$270° \leq l \leq 295°$	153.0	47
$296 \leq l \leq 320$	104.0	54
$321 \leq l \leq 345$	89.4	54

Il fatto che le stelle della corrente K_2 hanno alcune caratteristiche in comune con le stelle della adiacente corrente C_2 (Orsa Maggiore) il cui apice medio è a $l = 6° 14'$ e precisamente: mancanza statistica di stelle B, non addensamento galattico, effetto di longitudine [3], ha suggerito l'ipotesi che queste due correnti possano formare un'unica corrente, che indicheremo con $C_2 - K_2$, avente, proprio a causa dell'effetto di longitudine, una dispersione notevole di circa 120° e precisamente da $l = 288°$ a $l = 45°$ comprendendo lo zero.

La corrente $C_2 + K_2$ presenta pure effetto di longitudine come risulta dalla seguente tabella:

TABELLA IV.

sottogruppi	V_m km/sec	num. stelle
$288° \leq l \leq 326°.9$	69.7	59
$327 \leq l \leq 5.9$	35.8	163
$6 \leq l \leq 45$	24.6	154

La zona K_1 comprende gli apici di 152 stelle e si estende da $l = 135°$ a $l = 210°$ e da $b = +36°$ a $b = -42°$.

I valori medi delle velocità spaziali e dell'apice sono dati nella tabella V.

TABELLA V.

V	l_m	b_m	V_m km/sec	num. stelle
V ≥ 40 km/sec	172°.3	−1°.7	76.7	152
V ≥ 50 »	172 .4	−2 .7	89.4	108
V ≥ 63 »	173 .3	−1 .6	108.6	69

Le caratteristiche delle stelle della zona K_1 sono le seguenti:

a) le loro posizioni sulla sfera celeste presentano una distribuzione quasi uniforme;

b) la distribuzione dei tipi spettrali indica la totale assenza statistica delle stelle di tipo B;

c) per analogia a quanto è stato fatto per le stelle della corrente K_2 si è cercato se anche per le stelle della K_1 si riscontrava l'effetto di longitudine. Dividendo le stelle in tre sottogruppi si ottengono i seguenti risultati:

TABELLA VI.

sottogruppi	$V \geq 40$ km/sec	num. stelle	$V \geq 50$ km/sec	num. stelle	$V \geq 63$ km/sec	num. stelle
$134°.8 \leq l \leq 159°.9$	78.2	39	88.6	29	113.0	17
$160.0 \leq l \leq 184.9$	73.6	63	81.7	49	94.9	32
$185.0 \leq l \leq 210.0$	87.6	42	104.2	30	127.9	20

da questa tabella risulta soltanto che la velocità media più alta si presenta a longitudine maggiore.

Anche le stelle della corrente C_1 non presentano effetto di longitudine. Per analogia a quanto è stato fatto per la corrente $C_2 + K_2$ si fa anche qui però l'ipotesi che le due correnti C_1 e K_1, i cui apici medi distano di 11° in longitudine, costituiscano un'unica corrente. La nuova corrente, che indicheremo con $C_1 + K_1$, presenta effetto di longitudine come risulta dalla seguente tabella:

TABELLA VII.

sottogruppi	V_m km/sec	num. stelle
$128° \leq l \leq 159°.9$	40.6	146
$160 \leq l \leq 184.9$	54.6	110
$185 \leq l \leq 210.0$	73.6	51

da questa si nota che le velocità medie crescono al crescere della longitudine.

Se si ammette quindi che parte delle stelle ad alta velocità appartengano alle correnti del Toro e dell'Orsa Maggiore e si ammette inoltre un effetto di longitudine che porta le stelle a più alta velocità verso le longi-

tudini maggiori, rispetto all'apice medio $l = 157°$ della corrente del Toro e verso le longitudini minori, rispetto all'apice medio $l = 6°$ della corrente dell'Orsa Maggiore, appare possibile un'altra interpretazione, oltre quella ben nota data da Oort, per spiegare l'assenza, o quasi, di apici di stelle veloci nella zona compresa fra 0° e 130° di longitudine.

Infatti gli apici delle stelle appartenenti alle due correnti $C_1 + K_1$ e $C_2 + K_2$ dovrebbero essere diretti verso due zone, più o meno estese, intorno all'apice medio delle correnti stesse, mentre le due zone rimanenti dovrebbero essere ugualmente povere di apici. A causa dell'effetto di longitudine, gli apici delle stelle veloci non solo non sono distribuiti uniformemente nelle zone di corrente e si trovano prevalentemente verso le longitudini maggiori e verso le longitudini minori delle rispettive zone ma, causa la dispersione degli apici, viene invasa soltanto quella zona, al di fuori delle zone di corrente, compresa tra $l = 210°$ e $l = 285°$. Entro tale zona le due dispersioni vengono anzi a sovrapporsi ed è perciò anche in parte, giustificato quel terzo massimo secondario che si nota nella distribuzione di frequenza in funzione della longitudine.

Evidentemente, però, soltanto una spiegazione dinamica soddisfacente dell'effetto di longitudine potrebbe avvalorare le ipotesi avanzate sui moti spaziali delle stelle considerate.

Questo lavoro verrà pubblicato per esteso nelle «Osservazioni e Memorie dell'Osservatorio di Arcetri».

Geodesia. — *Sopra un calcolo più approssimato della deviazione della geodetica da una sezione normale su una superficie qualunque.* Nota di MASSIMO MINEO, presentata (*) dal Socio G. ARMELLINI.

Scopo di questa Nota è di spingere fino ai termini del 3° ordine, sopra una qualunque superficie S, la deviazione angolare d'una geodetica g, uscente da un punto M_0, dalla sezione normale alla S in M_0 passante per un punto generico M di g. Di questa deviazione, nei trattati di Geodesia, si suole dare la parte principale (del 2° ordine). Nel caso dell'Ellissoide besseliano, per una distanza di 100 km. e per la latitudine di 45°, lo scostamento angolare in M_0 è di circa $0''{\cdot}014$ (1). Ma nelle operazioni geodetiche si è spesso costretti a oltrepassare questo limite di distanza e occorre quindi prolungare gli sviluppi analitici per avere un più sicuro giudizio sugli errori commessi.

La questione, dal punto di vista teorico, rientra nel capitolo di Geometria differenziale riguardante le geodetiche d'una S ed è stata, per una superficie qualunque, trattata da Minding (1849), Puiseux (1851), Weingar-

(*) Nella seduta del 14 febbraio 1953.

(1) Vedi PIZZETTI, *Trattato di Geodesia teoretica*. Bologna, Zanichelli, p. 68 (1905).

ten (1862),... Nel trattato di Calcolo infinitesimale del Cesaro è mostrato come dalla teoria delle geodetiche discenda immediatamente il teorema fondamentale della Geodesia, riguardante la *deviazione angolare* d'un arco di geodetica da un arco di sezione normale avente gli stessi estremi [2].

1. Siano

$$(1) \qquad x = x \quad , \quad y = y \quad , \quad z = f(x, y),$$

le equazioni parametriche di S, scegliendo, cioè, come parametri gaussiani su S, le due coordinate cartesiane x e y. Supporremo che il triedro cartesiano ortogonale abbia l'origine in un punto M_0 di S, che i due assi x e y siano tangenti alle due linee di curvatura di S passanti per M_0 e che quindi l'asse z sia normale in M_0 a S. Considerato poi un punto generico $M(x, y, z)$ di S, per togliere nel seguito ogni ambiguità sui segni, faremo, come si suole, le seguenti convenzioni: il verso positivo della linea $y = \text{cost.}$, uscente da M, è quello secondo cui cresce la x (in un certo intorno di M) e sarà questo il verso positivo della tangente t_1 alla linea stessa; il verso positivo della linea $x = \text{cost.}$, uscente da M, è quello secondo cui cresce la y e sarà questo il verso positivo della tangente t_2 alla linea stessa; il verso positivo della normale n alla S in M s'intende scelto in modo che $t_1 t_2 n$ sia una terna sinistrorsa.

Ciò posto, scriviamo le equazioni della geodetica g di S sotto la forma normale, adoperando le notazioni mongiane e supponendo che, lungo g, x, y e z siano funzioni del suo arco σ:

$$(2) \qquad \begin{cases} \dfrac{d^2x}{d\sigma^2} = -\dfrac{p}{1+p^2+q^2}\left[r\left(\dfrac{dx}{d\sigma}\right)^2 + 2s\dfrac{dx}{d\sigma}\dfrac{dy}{d\sigma} + t\left(\dfrac{dy}{d\sigma}\right)^2\right], \\ \dfrac{d^2y}{d\sigma^2} = -\dfrac{q}{1+p^2+q^2}\left[r\left(\dfrac{dx}{d\sigma}\right)^2 + 2s\dfrac{dx}{d\sigma}\dfrac{dy}{d\sigma} + t\left(\dfrac{dy}{d\sigma}\right)^2\right]. \end{cases}$$

Com'è noto, assegnati i valori delle due funzioni incognite x e y e delle loro derivate prime $dx/d\sigma$, $dy/d\sigma$ nel punto iniziale M_0, resta individuato (nelle ipotesi di Lipschitz), un sistema integrale delle (2).

Le (2) ci permettono di calcolare tutte le derivate dei vari ordini, a partire dal secondo, delle funzioni $x(\sigma)$ e $y(\sigma)$, nel punto iniziale. E nel caso che la S sia analitica intorno al punto iniziale, il sistema integrale si ottiene integrando per serie le (2).

Supponiamo che l'arco σ di g sia contato a partire dal punto iniziale M_0. Chiamiamo α l'angolo (contato sulla pagina positiva del piano tangente alla S nel punto M_0) che g forma con l'asse x. Per le ipotesi fatte sul triedro coordinato $M_0(x, y, z)$, abbiamo:

$$(3) \qquad \left(\frac{dx}{d\sigma}\right)_0 = \cos\alpha \quad , \quad \left(\frac{dy}{d\sigma}\right)_0 = \operatorname{sen}\alpha \quad , \quad \left(\frac{dz}{d\sigma}\right)_0 = 0.$$

[2] Vedi CESARO, *Elementi di Calcolo infinitesimale*. Napoli, pp. 318-319 (1905).

L'equazione cartesiana della S, nell'intorno di M_0, è della forma:

$$(4) \qquad z = \frac{1}{2}(r_0 x^2 + t_0 y^2) + a_{30} x^3 + a_{21} x^2 y + a_{12} x y^2 + a_{03} y^3 + \cdots$$

Poniamo per semplicità:

$$(5) \qquad \begin{cases} A = \left(\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}\right)_0 \cos^2\alpha + 2\left(\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}\right)_0 \cos\alpha \operatorname{sen}\alpha + \left(\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}\right)_0 \operatorname{sen}^2\alpha , \\ B = \left(\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}\right)_0 \cos^2\alpha + 2\left(\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}\right)_0 \cos\alpha \operatorname{sen}\alpha + \left(\frac{\partial^3 z}{\partial y^3}\right)_0 \operatorname{sen}^2\alpha . \end{cases}$$

Si ottengono allora successivamente dalle (2) le seguenti derivate fino a quelle del 4° ordine:

$$\left(\frac{d^2 x}{d\sigma^2}\right)_0 = \left(\frac{d^2 y}{d\sigma^2}\right)_0 = 0 \quad , \quad \left(\frac{d^2 z}{d\sigma^2}\right)_0 = r_0 \cos^2\alpha + t_0 \operatorname{sen}^2\alpha ;$$

$$\left(\frac{d^3 z}{d\sigma^3}\right)_0 = -r_0\left(\frac{d^2 z}{d\sigma^2}\right)_0 \cos\alpha \ , \ \left(\frac{d^3 y}{d\sigma^3}\right)_0 = -t_0\left(\frac{d^2 z}{d\sigma^2}\right)_0 \operatorname{sen}\alpha \ , \ \left(\frac{d^3 z}{d\sigma^3}\right)_0 = \left(\cos\alpha \frac{\partial}{\partial x} + \operatorname{sen}\alpha \frac{\partial}{\partial y}\right)^{(3)}_0 z ;$$

$$\left(\frac{d^4 x}{d\sigma^4}\right)_0 = -A\left(\frac{d^2 z}{d\sigma^2}\right)_0 - 2 r_0\left(\frac{d^3 z}{d\sigma^3}\right)_0 \cos\alpha \quad , \quad \left(\frac{d^4 y}{d\sigma^4}\right)_0 = -B\left(\frac{d^2 z}{d\sigma^2}\right)_0 - 2 t_0\left(\frac{d^3 z}{d\sigma^3}\right)_0 \operatorname{sen}\alpha ,$$

$$\left(\frac{d^4 z}{d\sigma^4}\right)_0 = \left(\cos\alpha \frac{\partial}{\partial x} + \operatorname{sen}\alpha \frac{\partial}{\partial y}\right)^{(4)}_0 z - 4(r_0^2 \cos^2\alpha + t_0^2 \operatorname{sen}^2\alpha)\left(\frac{d^2 z}{d\sigma^2}\right)_0 .$$

2. Esprimiamo le (6) per mezzo della flessione, della torsione e loro derivate rispetto all'arco σ, nel punto M_0, della geodetica g.

Per la flessione d'una sezione normale *qualunque* di S, in un suo punto generico M, nella direzione dy/dx, abbiamo, in valore e segno [3]:

$$(7) \qquad \frac{1}{R} = -\frac{1}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}\left[r\left(\frac{dx}{d\sigma}\right)^2 + 2 s \frac{dx}{d\sigma}\frac{dy}{d\sigma} + t\left(\frac{dy}{d\sigma}\right)^2\right].$$

Nel caso del punto M_0 e della direzione $(dy/dx) = \operatorname{tang}\alpha$, il raggio di curvatura della sezione normale coincide col raggio di curvatura della nostra geodetica g. Chiamandolo R_α, abbiamo dunque:

$$(8) \qquad \frac{1}{R_\alpha} = -(r_0 \cos^2\alpha + t_0 \operatorname{sen}^2\alpha) .$$

Dalla (7), con un calcolo un po' lungo che del resto non presenta alcuna difficoltà, si trova nel punto iniziale M_0 di g:

$$(9) \qquad \left[\frac{d}{d\sigma}\left(\frac{1}{R}\right)\right]_\alpha = -\left(\frac{d^3 z}{d\sigma^3}\right)_0 = -(A \cos\alpha + B \operatorname{sen}\alpha) .$$

[3] Mentre nelle formole del Frenet la flessione si fa entrare col suo valore assoluto, lo stesso non si può fare per i raggi di curvatura delle sezioni normali d'una superficie S passanti per un suo punto M. La formola (7) del testo, se M' è il relativo centro di curvatura della sezione normale considerata, dà un valore positivo per R nel caso in cui il segmento M'M dà il verso positivo della normale in M alla S e un valore negativo nel caso opposto (cfr. BIANCHI, *Geometria differenziale*, vol. I, Parte I, Zanichelli, p. 192 e p. 221 (1927)).

Per la torsione $1/T$ della g in un punto generico M, abbiamo [4]:

$$(10)\quad \frac{1}{T} = \frac{1}{1+p^2+q^2}\left\{[pqr-(1+p^2)s]\left(\frac{dx}{d\sigma}\right)^2 + [(1+q^2)r-(1+p^2)t]\frac{dx}{d\sigma}\frac{dy}{d\sigma} + [(1+q^2)s-pqt]\left(\frac{dy}{d\sigma}\right)^2\right\}.$$

Chiamando $1/T_\alpha$ il suo valore nel punto M_0, deduciamo:

$$(11)\quad \frac{1}{T_\alpha} = (r_0 - t_0)\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha \quad , \quad \left[\frac{d}{d\sigma}\left(\frac{1}{T}\right)\right]_\alpha = A\operatorname{sen}\alpha - B\cos\alpha .$$

E dalla (7) tenendo conto della 1ª delle (11), si deduce:

$$(12)\quad \left[\frac{d^2}{d\sigma^2}\left(\frac{1}{R}\right)\right]_\alpha = -\left(\cos\alpha\frac{\partial}{\partial x} + \operatorname{sen}\alpha\frac{\partial}{\partial y}\right)^{(4)}_0 z - \frac{3}{R_\alpha}\left(\frac{1}{R_\alpha^2}+\frac{1}{T_\alpha^2}\right).$$

Le formole (6) si trasformano quindi nelle seguenti [5]:

$$(13)\quad \begin{cases} \left(\frac{d^2x}{d\sigma^2}\right)_0 = \left(\frac{d^2y}{d\sigma^2}\right)_0 = 0 \quad , \quad \left(\frac{d^2z}{d\sigma^2}\right)_0 = -\frac{1}{R_\alpha}; \\ \left(\frac{d^3x}{d\sigma^3}\right)_0 = -\frac{1}{R_\alpha}\left(\frac{\cos\alpha}{R_\alpha}-\frac{\operatorname{sen}\alpha}{T_\alpha}\right) \quad , \quad \left(\frac{d^3y}{d\sigma^3}\right)_0 = -\frac{1}{R_\alpha}\left(\frac{\operatorname{sen}\alpha}{R_\alpha}+\frac{\cos\alpha}{T_\alpha}\right) \quad , \quad \left(\frac{d^3z}{d\sigma^3}\right)_0 = -\left[\frac{d}{d\sigma}\left(\frac{1}{R}\right)\right]_\alpha; \\ \left(\frac{d^4x}{d\sigma^4}\right)_0 = \left(\frac{2\operatorname{sen}\alpha}{T_\alpha}-\frac{3\cos\alpha}{R_\alpha}\right)\left[\frac{d}{d\sigma}\left(\frac{1}{R}\right)\right]_\alpha + \frac{\operatorname{sen}\alpha}{R_\alpha}\left[\frac{d}{d\sigma}\left(\frac{1}{T}\right)\right]_\alpha, \\ \left(\frac{d^4y}{d\sigma^4}\right)_0 = -\left(\frac{2\cos\alpha}{T_\alpha}+\frac{3\operatorname{sen}\alpha}{R_\alpha}\right)\left[\frac{d}{d\sigma}\left(\frac{1}{R}\right)\right]_\alpha - \frac{\cos\alpha}{R_\alpha}\left[\frac{d}{d\sigma}\left(\frac{1}{T}\right)\right]_\alpha, \quad \left(\frac{d^4z}{d\sigma^4}\right)_0 = \frac{1}{R_\alpha}\left(\frac{1}{R_\alpha^2}+\frac{1}{T_\alpha^2}\right) - \left[\frac{d^2}{d\sigma^2}\left(\frac{1}{R}\right)\right. \end{cases}$$

3. Sia ora A l'angolo che la tangente alla sezione normale alla S in M_0 passante per il punto generico $M(x, y, z)$ di g forma con l'asse x. Abbiamo

$$\operatorname{tang} A = \frac{y}{x} = \frac{\sigma\operatorname{sen}\alpha + \frac{\sigma^3}{3!}\left(\frac{d^3y}{d\sigma^3}\right)_0 + \frac{\sigma^4}{4!}\left(\frac{d^4y}{d\sigma^4}\right)_0 + \cdots}{\sigma\cos\alpha + \frac{\sigma^3}{3!}\left(\frac{d^3x}{d\sigma^3}\right)_0 + \frac{\sigma^4}{4!}\left(\frac{d^4x}{d\sigma^4}\right) + \cdots}.$$

(4) Vedi BIANCHI, loc. cit., pp. 221 e 295.

(5) È superfluo dire che le formole di Frenet relative alla curva gobba C dello spazio ordinario, dalle quali si possono dedurre le derivate dei vari ordini di x, y, z, rispetto allo arco della curva (nel citato volume del BIANCHI, p. 13, sono calcolate fino al 3° ordine), non servono a nulla nel nostro problema. Per la C queste derivate dipendono dalle sue due curvature, date le quali la C è intrinsecamente determinata; mentre qui la curva da studiare appartiene a una superficie S dello spazio ordinario, superficie che è determinata intrinsecamente da E, F, G, D, D', D'', verificanti le equazioni di Mainardi-Codazzi: flessione e torsione della geodetica g di S non sono date, ma sono da trovare sulla S per mezzo delle sei funzioni citate, per avere le derivate in discorso. Una volta avute queste, si potranno, come verifica, confrontare con quelle che si traggono dalle formule di Frenet, tenendo conto che in queste, come si è accennato, R entra nel suo valore assoluto e la normale principale è diretta positivamente verso la curva, la quale, in un intorno del punto considerato, cade da una stessa parte del piano rettificante. Senza insistere su questa verifica, diciamo che nelle (13) i coseni direttori della tangente in M_0 a g sono $\cos\alpha$, $\operatorname{sen}\alpha$, 0; quelli della normale principale: 0, 0, 1; quelli della binormale: $\operatorname{sen}\alpha$, $-\cos\alpha$, 0.

Tenendo presenti le (13), con un calcolo che non presenta alcuna difficoltà e che è inutile riportare, troviamo fino ai termini di 3° grado in σ:

$$(14) \qquad A - \alpha = -\frac{\sigma^2}{6\,R_\alpha\,T_\alpha} + \frac{\sigma^3}{24\,T_\alpha\,R_\alpha}\left[\frac{2}{R_\alpha}\left(\frac{dR}{d\sigma}\right)_\alpha + \frac{1}{T_\alpha}\left(\frac{dT}{d\sigma}\right)_\alpha\right].$$

Quando la S è data per mezzo della (4), per esempio, non soltanto si può valutare la deviazione angolare $A - \alpha$ del piano che la sezione normale alla S, nel punto iniziale M_0, passante per il punto finale M, forma col piano osculatore della geodetica g, uscente dal punto M_0 e passante per M; ma si può trovare un limite superiore del valore assoluto dell'errore che si commette adoperando la (14), bastando valutare il resto tayloriano della serie quando essa si fermi al termine in σ^4.

Ma, trattandosi del Geoide, S non è data! Nei trattati di Geodesia, la (14) si calcola, per esempio, sull'Ellissoide di Bessel, ritenendolo poco differente dal Geoide. E nel valutare i due termini del secondo membro di (14) (di solito, soltanto il primo), si hanno valori che dipendono non soltanto da σ e da α, ma anche dal punto iniziale M_0 scelto. È però non difficile dare, sull'Ellissoide besseliano, limiti superiori dei valori assoluti di R_α, T_α e derivate rispetto all'arco, indipendenti dalla latitudine del punto M_0 scelto. Daremo i risultati di questo studio in altro lavoro. Qui ci limitiamo ad accennare che nel caso che latitudine e azimut siano di 45°, il 2° termine del 2° membro, della (14), per l'Ellissoide besseliano e per un arco di 1000 km., è di circa 0″·1, mentre il 1° termine è di circa 1″·43.

Fisica. — *Coincidenze* γ *nel* $^{214}_{84}$Po. Nota di FRANCESCA DEMICHELIS e RENATO MALVANO, presentata (*) dal Socio E. PERUCCA.

Lo studio della emissione di raggi γ detta in cascata, si considera una delle fonti più preziose dalla quale si possono ottenere dati su possibili livelli energetici dei nuclei e quindi dati essenziali per giungere ad una conoscenza più precisa dei nuclei stessi.

L'emissione di raggi γ in cascata si rivela mediante l'emissione praticamente contemporanea di due o più raggi γ ciascuno caratterizzato da una sua energia.

Si fa corrispondere a questo fenomeno l'esistenza di due o più stati eccitati del nucleo cui devono attribuirsi livelli differenti di energia, e l'emissione della cascata si interpreta come passaggio da uno stato eccitato del nucleo successivamente a uno o più livelli di energia intermedi e infine al livello fondamentale.

Limitiamoci al caso più frequente e più semplice di una cascata doppia, cioè costituita da due raggi γ.

(*) Nella seduta del 10 gennaio 1953.

I risultati sperimentali nella determinazione di una cascata si devono specialmente alla tecnica odierna di rivelazione delle radiazioni mediante la quale sono possibili esperienze di determinazione di emissione, praticamente contemporanea ($< 10^{-7}$ sec), dei due raggi γ mediante opportuni rivelatori a scintillazione e un dispositivo elettronico a coincidenze. La determinazione delle energie dei due raggi γ della cascata può compiersi con i metodi consueti.

I risultati più numerosi finora ottenuti riguardano la determinazione di raggi γ in cascata emessi da nuclidi artificiali e la misurazione della loro energia.

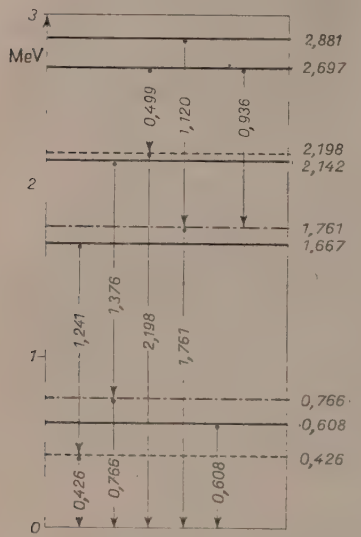


Fig. 1. – I livelli a tratto pieno corrispondono a livelli effettivamente misurati dall'energia delle particelle α associate; quelli a tratto e punto corrispondono a cascate sperimentalmente verificate, quelli a tratto, previsti da Rutherford, corrispondono a cascate non confermate sperimentalmente.

Per quanto riguarda i nuclidi naturali ricordiamo un importante lavoro di E. Rutherford, W. B. Lewis, B. V. Bowden[1] sul $^{214}_{84}Po$, nel quale l'esame dei risultati sperimentali induce gli Autori ad immaginare l'esistenza di 5 cascate di raggi γ, ma non ci risulta che dopo quel lavoro si siano ottenuti controlli diretti e misurazioni su tali fenomeni.

Riteniamo che ciò debba almeno in parte attribuirsi alla complessità dello spettro γ del $^{214}_{84}Po$; si pensi anche solo al fatto che l'intensità di emissione di ciascuno dei raggi γ è indicata in modo ben differente dai vari sperimentatori.

Le esperienze da noi eseguite hanno felicemente condotto a conclusioni che qui desideriamo riportare. La descrizione dei dispositivi sperimentali e i dettagli della ricerca troveranno posto in altra sede.

Abbiamo limitato lo studio del fenomeno delle cascate nella famiglia del $^{226}_{88}Ra$ ai fenomeni radioattivi del nuclide $^{214}_{84}Po$, perché una analisi della emissione di raggi γ da nuclidi della famiglia, esclude la possibilità di altri casi.

Lo schema di alcuni livelli energetici del $^{214}_{84}Po$, quelli utili per la nostra ricerca, risulterebbe il seguente (v. fig. 1).

Questo schema [1] lascia prevedere l'esistenza di 5 cascate doppie costituite da raggi γ della seguente energia:

1ª 0,933 MeV, 1,761 MeV;
2ª 1,241 MeV, 0,426 MeV;
3ª 1,376 MeV, 0,760 MeV;
4ª 0,499 MeV, 2,198 MeV;
5ª 1,120 MeV, 1,761 MeV.

(1) E. Rutherford, W. B. Lewis e B. V. Bowden, «Proc. Roy. Soc. A», *142*, 347 (1933).

Le nostre esperienze confermano l'esistenza delle 3 cascate 1ª, 3ª, 5ª e permettono di escludere le 2 cascate 2ª e 4ª presunte da Rutherford.

La individuazione delle cascate che si devono ritenere effettivamente esistenti nella famiglia del $^{226}_{88}Ra$, e dovute al $^{214}_{84}Po$, ci sembra di interesse tale da desiderare segnalarla in questa sede.

Ringraziamo vivamente il prof. E. Perucca per il costante interessamento ed aiuto.

Fisica matematica. — *Determinazione dei potenziali nei campi elettromagnetici generalizzati.* Nota di EDOARDO STORCHI, presentata (*) dal Corrisp. B. FINZI.

1. Recentemente B. Finzi (1) ha portato l'attenzione su campi elettromagnetici più generali di quello maxwelliano e di quello di Yukawa e che includono questi ultimi come casi particolari. Nello spazio–tempo pseudo-euclideo, il campo elettromagnetico del vuoto è rappresentato da un unico tensore doppio emisimmetrico: $F_{\alpha\beta} = -F_{\beta\alpha}$ e la distribuzione elettrica da un vettore j_α ($\alpha = 0, 1, 2, 3$). Le leggi elettromagnetiche maxwelliane nel vuoto affermano che il tensore elettromagnetico è irrotazionale e che la sua divergenza eguaglia la distribuzione elettrica.

L'Autore mostra in un primo tempo come ambedue le equazioni elettromagnetiche si possano dedurre da un unico principio di minima azione. Basta notare che un generico tensore doppio emisimmetrico dello spazio–tempo può esprimersi linearmente mediante due tensori derivati di due vettori solenoidali dello spazio-tempo stesso (vettori potenziali) e che il campo elettromagnetico nel vuoto è quello per cui risulta minima, a parità di valori al contorno di entrambi i potenziali Φ_α, Ψ_α, l'azione differenza fra l'azione di puro campo e l'azione sostanziale elettrica. Una tale azione è l'integrale esteso a una regione dello spazio–tempo di una densità di energia che si presenta come una combinazione lineare di due invarianti quadratici.

Orbene, gli elementi che nel vuoto caratterizzano il campo e la distribuzione elettrica, l'Autore osserva, sono: $F_{\alpha\beta}$, j_α e i potenziali Φ_α, Ψ_α con i quali si possono costruire ben otto invarianti quadratici. Con due di tali invarianti si costruisce l'azione che dà luogo alle equazioni di Maxwell relative ai campi nel vuoto; aggiungendone un terzo si ottiene l'azione che dà luogo alle equazioni di Proca–Yukawa. Tenuto conto anche degli altri invarianti si ottengono azioni più generali minimizzando le quali si perviene alle equazioni differenziali che reggono nuovi campi elettromagnetici più generali.

(*) Nella seduta del 10 gennaio 1953.

(1) B. FINZI. *Sul principio della minima azione e sulle equazioni elettromagnetiche che se ne deducono.* Questi « Rendiconti », ser. VIII, vol. XII, fasc. 4, 5, aprile–maggio 1952. *Sopra una estensione dei campi elettromagnetici.* Id., vol. XIII, fasc. 5, novembre 1952.

L'applicazione del principio di minima azione porta precisamente alle seguenti equazioni differenziali del corrispondente campo elettromagnetico:

$$(1)\qquad \begin{cases} \operatorname{rot} F_{\sigma\alpha} = 4\varkappa \operatorname{div} F_{\alpha\beta} + 2\chi j_\alpha + \frac{\nu}{\lambda^2}\Phi_\alpha + \frac{2\mu}{\lambda^2}\Psi_\alpha \\ \operatorname{div} F_{\alpha\beta} = \varkappa \operatorname{rot} F_{\sigma\beta} + j_\alpha - \frac{1}{\lambda^2} + \frac{\nu}{2\lambda^2}\Psi_\alpha \end{cases}$$

dove $\varkappa, \chi, \lambda, \mu, \nu$ denotano costanti universali, $\varkappa, \chi, \mu, \nu$ sono puri numeri e λ una lunghezza. Per $\varkappa = \chi = \mu = \nu = 1/\lambda^2 = 0$ le (1) si riducono alle equazioni del campo di Maxwell, per $\varkappa = \chi = \mu = \nu = 0$, $1/\lambda \neq 0$ alle equazioni del campo di Yukawa. Introducendo « l'unico » potenziale Φ_α del tensore doppio $F_{\alpha\beta}$, si ottengono in corrispondenza le equazioni:

$$(2)\qquad \Box\Phi_\alpha = -j_\alpha$$

$$(3)\qquad \Box\Phi_\alpha = -\frac{1}{\lambda^2}\Phi_\alpha - j_\alpha$$

nelle quali: $\Box\Phi_\alpha = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\Phi_\alpha}{\partial x_0^2} - \left(\frac{\partial^2\Phi_\alpha}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2\Phi_\alpha}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2\Phi_\alpha}{\partial x_3^2}\right)$ rappresenta il d'alembertiano della generica componente Φ_α del potenziale vettore.

Analogamente essendo nei campi di Finzi [2]:

$$F_{\alpha\beta} = \Phi_{\beta/\alpha} - \Phi_{\alpha/\beta} + \varepsilon_{\alpha\beta\gamma\varrho}\,\Psi^{\gamma/\varrho}$$

semplificando le (1) si perviene alla conclusione che i due potenziali vettori Φ_α, Ψ_α soddisfano il sistema:

$$(4)\qquad \begin{cases} \Box\Phi_\alpha = -[a\Phi_\alpha + b\Psi_\alpha + mj_\alpha] \\ \Box\Psi_\alpha = -[c\Phi_\alpha + d\Psi_\alpha + nj_\alpha] \end{cases}$$

nel quale a, b, c, d, m, n denotano costanti legate a $\varkappa, \chi, \mu, \nu, \lambda$. Precisamente risulta:

$$(*)\qquad \begin{cases} a = \frac{1}{\lambda^2}(1+\varkappa\beta) & b = \frac{1}{\lambda^2}\left(\frac{\nu}{2} + \varkappa\gamma\right) & m = 1 + \varkappa\cdot\alpha \\ c = \frac{\beta}{2\lambda^2}(1+\varkappa\beta) & d = \frac{\gamma}{2\lambda^2} & n = \frac{\alpha}{2} \end{cases}$$

avendo posto:

$$(**)\qquad \alpha = \frac{4\varkappa + 2\chi}{1-4\varkappa^2}\ ,\quad \beta = \frac{4\varkappa + \nu}{1-4\varkappa^2}\ ,\quad \gamma = \frac{2\varkappa\nu + 2\mu}{1-4\varkappa^2}.$$

È opportuno qui ricordare che P. Udeschini [3] ha dimostrato che, affinchè nei campi di Finzi sia resa possibile una estensione elettrostatica indipendente dal campo magnetico ed una magnetostatica indipendente dal

(2) $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\varrho}$ denota il tensore di Ricci nello spazio-tempo.

(3) P. Udeschini, *Sopra un campo estendente quello elettromagnetico*. Questi Rend. », ser. VIII, vol. XIII, 1952.

campo elettrico (come avviene negli ordinari campi maxwelliani), debbono risultare nulle le tre costanti $\varkappa$, χ , ν. Il sistema (4) assume in queste condizioni la semplice forma:

$$(4') \qquad \begin{cases} \square \Phi_\alpha = -\frac{1}{\lambda^2} \Phi_\alpha - j_\alpha \\ \square \Psi_\alpha = -\frac{\mu}{\lambda^2} \Psi_\alpha \end{cases}$$

ed è pertanto costituito da equazioni separate del tipo (3) (equazioni del campo mesonico o di Procha–Klein–Gordon [4]).

Rimane allora aperta la seguente questione:

« Nel caso più generale, svincolandoci cioè da ogni limitazione imposta da considerazioni aprioristiche di carattere fisico, quale sarà la vera natura del problema analitico riguardante la determinazione dei potenziali? Sarà possibile sostituire al sistema (4) un altro nel quale le incognite sono separate? O in altre parole: i nuovi campi più generali potranno ottenersi componendo campi maxwelliani e campi di Yukawa? ».

La risposta a questa domanda è contenuta nella presente Nota ove si dimostra che nel caso generale le equazioni (4) si separano in equazioni del tipo (2) (equazione dei potenziali ritardati) o del tipo (3) (equazione del campo mesonico), « ma non così in un caso singolare che viene segnalato e studiato ».

2. Avendo già esaminato il caso di Udeschini in cui $b = 0$, $c = 0$, potremo ritenere $c \neq 0$, oppure $b \neq 0$, ad esempio $c \neq 0$.

Operato il cambio di funzioni incognite:

$$(5) \qquad \begin{cases} u_\alpha = c \Phi_\alpha - a \Psi_\alpha \\ v_\alpha = \Psi_\alpha \end{cases}$$

risulta allora:

$$\square u_\alpha = c [- a \Phi_\alpha - b \Psi_\alpha - m j_\alpha] - a [- c \Phi_\alpha - d \Psi_\alpha - n j_\alpha] =$$
$$= (ad - bc) \Psi_\alpha + (an - cm) j_\alpha$$

$$\square v_\alpha = - c \Phi_\alpha - d \Psi_\alpha - n j_\alpha$$

e posto quindi:

$$(6) \qquad \begin{cases} ad - bc = \sigma & (an - cm) j_\alpha = f_\alpha \\ a + d = 2\tau & - n j_\alpha = g_\alpha \end{cases}$$

il sistema (4) assume la semplice forma:

$$(7) \qquad \begin{cases} \square u_\alpha = \sigma v_\alpha + f_\alpha \\ \square v_\alpha = - u_\alpha - 2\tau v_\alpha + g_\alpha . \end{cases}$$

4) Con maggior precisione la seconda delle (4') è l'equazione del campo mesonico se μ è una costante reale positiva, l'equazione delle onde smorzate se μ è una costante generica.

Proveremo noi ora che «in generale» è possibile fare assumere al sistema (4) la seguente forma canonica:

$$(*) \qquad \begin{cases} \Box U_\alpha = AU_\alpha + F_\alpha \\ \Box V_\alpha = BV_\alpha + G_\alpha \end{cases}$$

avendo indicato con U_α e V_α due funzioni legate linearmente ad u_α, v_α, con A, B due costanti e con F_α, G_α due funzioni conosciute nel cronotopo.

Per far questo operiamo il nuovo cambio di funzioni incognite:

$$(8) \qquad \begin{cases} U_\alpha = pu_\alpha + qv_\alpha \\ V_\alpha = ru_\alpha + sv_\alpha \end{cases}$$

con p, q, r, s costanti da determinarsi e osserviamo che in base alle (7) risulta:

$$(9) \qquad \begin{cases} \Box U_\alpha = -qu_\alpha + (p\sigma - 2q\tau)\, v_\alpha + (pf_\alpha + qg_\alpha) \\ \Box V_\alpha = -su_\alpha + (r\sigma - 2s\tau)\, v_\alpha + (rf_\alpha + sg_\alpha). \end{cases}$$

Introdotti allora due nuovi parametri A, B pure da determinarsi, cerchiamo di soddisfare i due sistemi:

$$\begin{cases} -q = Ap \\ p\sigma - 2q\tau = Aq \end{cases} \qquad \begin{cases} -s = Br \\ r\sigma - 2s\tau = Bs \end{cases}$$

con valori delle incognite p, q, r, s per i quali risulti:

$$(10) \qquad ps - qr \neq 0$$

Scritti i due sistemi nella forma:

$$\begin{cases} Ap + q = 0 \\ \sigma p - (A + 2\tau) = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} Br + s = 0 \\ \sigma r - (B + 2\tau)\, s = 0 \end{cases}$$

ci si avvede che il problema è, in generale, risolubile.

Assunte invero per A, B le radici dell'equazione (del tipo secolare):

$$Z^2 + 2\tau Z + \sigma = 0$$

cioè:

$$(11) \qquad A = -\tau + \sqrt{\tau^2 - \sigma} \quad ; \quad B = -\tau - \sqrt{\tau^2 - \sigma}$$

ed inoltre:

$$(12) \qquad \begin{cases} p = 1 \\ q = -A = \tau - \sqrt{\tau^2 - \sigma} = q_0 \end{cases} \qquad \begin{cases} r = 1 \\ s = -B = \tau + \sqrt{\tau^2 - \sigma} = s_0 \end{cases}$$

si trova:

$$ps - qr = 2\sqrt{\tau^2 - \sigma}.$$

Se allora:

$$\Delta = \tau^2 - \sigma > 0$$

la canonicizzazione è sempre possibile. Tenendo conto delle (5), (8), (9), (12), si giunge pertanto alla seguente conclusione:

« Se $\Delta \neq 0$, con il cambio lineare di funzioni incognite:

$$\begin{cases} U_\alpha = c\Phi_\alpha + (q_0 - a)\,\Psi_\alpha \\ V_\alpha = c\Phi_\alpha + (s_0 - a)\,\Psi_\alpha \end{cases}$$

il sistema (4) assume la forma canonica:

$$(*') \qquad \begin{cases} \Box U_\alpha = -q_0 U_\alpha + (f_\alpha + q_0 g_\alpha) \\ \Box V_\alpha = -s_0 V_\alpha + (f_\alpha + s_0 g_\alpha) \end{cases}$$

e le equazioni differenziali che determinano i potenziali nei campi di Finzi si riducono ad equazioni del campo mesonico se $\sigma \neq 0$, ad equazioni dei potenziali ritardati e del campo mesonico se $\sigma = 0$ ».

Il caso singolare.

Rimane ancora da studiare il caso singolare in cui, risultando: $\Delta = \tau^2 - \sigma = 0$, l'equazione secolare presenta radici coincidenti e il sistema (7) diviene:

$$(7') \qquad \begin{cases} \Box u_\alpha = \tau^2 v_\alpha + f_\alpha \\ \Box v_\alpha = -u_\alpha - 2\tau v_\alpha + g_\alpha . \end{cases}$$

Eseguendo in queste condizioni l'ulteriore cambio lineare di funzioni incognite:

$$(13) \qquad \begin{cases} U_\alpha = u_\alpha + \tau v_\alpha = c\Phi_\alpha + \dfrac{d-a}{2}\Psi_\alpha \\ V_\alpha = v_\alpha = \Psi_\alpha \end{cases}$$

si trova:

$$\Box U_\alpha = \Box u_\alpha + \tau \Box v_\alpha = \tau^2 v_\alpha + f_\alpha - \tau u_\alpha - 2\tau^2 v_\alpha + \tau g_\alpha = -\tau(u_\alpha + \tau v_\alpha) + f_\alpha + \tau g_\alpha$$

$$\Box V_\alpha = -(u_\alpha + \tau v_\alpha) - \tau v_\alpha + g_\alpha$$

e quindi il sistema (7') si riduce al seguente:

$$\begin{cases} \Box U_\alpha = -\tau U_\alpha + (f_\alpha + \tau g_\alpha) \\ \Box V_\alpha = -U_\alpha - \tau V_\alpha + g_\alpha). \end{cases}$$

Introdotto infine l'operatore lineare (mesoniano) [5] definito nel modo seguente:

$$\bar{\Box} = \Box + \tau$$

[5] La denominazione di mesoniano attribuita all'operatore $\bar{\Box}$ è in realtà giustificata solo se τ è una costante reale positiva, cioè se (per le (*), (**)) risulta: $1 + \mu + \varkappa\nu > 0$; ma noi riterremo qui e nel seguito verificata tale condizione.

e posto: $f_\alpha + \tau g_\alpha = \omega_\alpha$, esso assume la semplice forma:

$$(14) \qquad \begin{cases} (a) \quad \bar{\Box}\, U_\alpha = \omega_\alpha \\ (b) \quad \bar{\Box}\, V_\alpha = -U_\alpha + g_\alpha . \end{cases}$$

La (a) è l'equazione dei potenziali ritardati se $\tau = 0$, l'equazione del campo mesonico se $\tau \neq 0$. Integrata la (a) con le assegnate condizioni iniziali e ai limiti, determinata la funzione $U = U(x_0, x_1, x_2, x_3)$ e inseritala al secondo membro della (b), si ritrova nella (b) stessa l'equazione dei potenziali ritardati o del campo mesonico a seconda che sia $\tau = 0$ oppure $\tau \neq 0$. Integrata anche la (b), le (13) ci dànno poi i potenziali Φ_α, Ψ_α.

È importante notare che nel caso singolare ora presentato la determinazione del potenziale $\Psi_\alpha = V_\alpha$ è subordinata, volendo rimanere nell'ambito di equazioni del secondo ordine, alla determinazione della combinazione lineare U_α dei due potenziali e « non può eseguirsi indipendentemente da quest'ultima [6] » al contrario di quanto avviene nel caso generale.

Questa circostanza essenziale rivela che i campi di Finzi corrispondenti al caso singolare sono nuovi campi che non si possono ottenere componendo campi di Maxwell e di Yukawa.

La separazione delle funzioni nel sistema (14), tenuto conto che $V_\alpha = \Psi_\alpha$ e posto: $\chi_\alpha = \bar{\Box}\, g_\alpha - \omega_\alpha$, ci dà poi:

$$(*'') \qquad \begin{cases} \bar{\Box}\, U_\alpha = \omega_\alpha \\ \bar{\Box}\bar{\Box}\, \Psi_\alpha = \chi_\alpha . \end{cases}$$

L'(*'') costituisce la forma canonica del caso singolare che fa riscontro alla forma canonica (*') del caso generale.

In particolare in assenza di cariche elettriche si trova:

$$(15) \qquad \begin{cases} \bar{\Box}\, U_\alpha = 0 \\ \bar{\Box}\bar{\Box}\, \Psi_\alpha = 0. \end{cases}$$

Detta mesonica ogni funzione φ soddisfacente l'equazione del campo mesonico: $\bar{\Box}\, \varphi = \Box\, \varphi + \tau\varphi$ e bimesonica ogni funzione che soddisfa l'equazione: $\bar{\Box}\bar{\Box}\, \varphi = 0$, tenuto conto inoltre del fatto che: $2\tau = a + d = 0$ implica per le (*), (**):

$$(16) \qquad 1 + \mu + 2\varkappa\nu = 0$$

si conclude allora con la seguente proposizione:

(6) Si rifletta infatti che se Ω è un qualsiasi operatore lineare di ordine n, il sistema: $\Omega U = 0$, $\Omega V = -U$ è una semplice traduzione formale dell'equazione irriducibile di ordine $2n$: $\Omega\Omega V = 0$. Considerato invece ad esempio il sistema: $\Omega U = -V$, $\Omega V = -U$ « formato da equazioni in cui le funzioni figurano non separate », si trova che con il cambio: $\Phi = U + V$; $\Psi = U - V$ esso è riducibile alla forma canonica (del tipo (*)): $\Omega\Phi = -\Phi$, $\Omega\Psi = \Psi$ ed « equivale quindi a due equazioni di ordine n ».

« In assenza di cariche elettriche uno dei due potenziali nei campi singolari di Finzi è funzione bimesonica se: $1 + \mu + 2\varkappa\nu \neq 0$, è funzione biarmonica nello spazio–tempo se $1 + \mu + 2\varkappa\nu = 0$ ».

L'altro potenziale Φ_α, per la prima delle (13) e per la (15) risulterà poi in generale pure funzione biarmonica o bimesonica nello spazio–tempo a seconda che la (16) sia o non sia verificata.

3. Rimane infine da indicare come si proceda all'integrazione delle due equazioni:

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}\right) = F(x, y, z, t) \tag{2'}$$

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}\right) = -H^2 U + G(x, y, z, t) \tag{3'}$$

dei potenziali ritardati e del campo mesonico, alle quali è in definitiva riconducibile il sistema (4).

Per la (2') esiste una classica formula che individua la funzione regolare $U(x, y, z, t)$ nei punti interni al campo S nota la U e la dU/dn sui punti della superficie σ che racchiude S [7].

In quanto all'equazione (3') che, come si disse, per H generico è anche l'equazione delle onde smorzate e forzate, essa è stata integrata con condizioni molto generali dal Tonolo [8]. La formula del Tonolo, alquanto complessa e che qui non riportiamo, assegna la $U(x, y, z, t)$ nei punti interni al campo S note la U e la dU/dn sui punti della superficie σ e noti i valori che la U e la $\partial U/\partial t$ assumono nell'istante iniziale in S.

Il Caldirola poi [9], col metodo degli operatori funzionali perviene ad una semplice formula risolutiva della (3') imponendo però condizioni limiti alquanto restrittive. In un lavoro successivo [10], in collaborazione con P. Sillano, ritrova infine la formula generale del Tonolo, facendo ancora uso del calcolo operatorio.

(7) Vedasi ad esempio la Nota di D. GRAFFI, *Dimostrazione della formula dei potenziali ritardati col metodo degli operatori funzionali*. « Atti della Reale Accademia dei Lincei », ser. VI, vol. IX, pp. 997–1000 (1929).

(8) A. TONOLO, *Integrazione dell'equazione delle onde sferiche smorzate e forzate*. « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova », vol. IV, pp. 52–66 (1933). A questa Nota rimandiamo anche per la Bibliografia sull'argomento.

(9) P. CALDIROLA, *Integrazione delle equazioni del campo mesonico*. « La Ricerca Scientifica », pp. 195–198 (1942).

(10) P. CALDIROLA e P. SILLANO, *Integrazione dell'equazione delle onde sferiche smorzate e forzate con il calcolo operatorio*. « Atti dell'Accademia Pontificia », vol. X (1946). Vedasi anche: ANTONIO PIGNEDOLI, *Sull'aspetto analitico di due importanti problemi della fisica nucleare*. « Rend. del Seminario matematico e fisico di Milano », vol. XXII (1951).

Chimica fisica. — *Sulla cinetica della reazione tra 1-cloro-2-nitroetano ed acqua* (*). Nota II di MASSIMO SIMONETTA e GIORGIO FAVINI, presentata (**) dal Socio L. CAMBI.

In un nostro precedente lavoro (1) abbiamo comunicato i risultati sperimentali di un nostro studio sulla cinetica della reazione tra 1-cloro-2 nitroetano ed acqua. Nella presente Nota viene esposta l'interpretazione di tali risultati dal punto di vista sia della teoria della collisione (2), che da quello dello stato di transizione nella forma semiquantitativa elaborata da Ingold, Hughes e collaboratori (3).

In tutte le nostre prove l'andamento cinetico è risultato del primo ordine. Questo fatto non costituisce però un elemento determinante nella scelta del meccanismo da assegnarsi alla nostra reazione, poichè siamo in presenza di una reazione solvolitica (3). Il cloronitroetano si può considerare come derivato dal cloruro di etile per sostituzione di un idrogeno del metile con un gruppo $-NO_2$. Data la notevole elettronegatività di questo gruppo, l'effetto di questa sostituzione è quello di attirare elettroni verso l'estremità della molecola cui è attaccato l'NO_2, mentre l'atomo di carbonio al quale è unito il cloro acquista una parziale carica positiva. Ad esempio in NO_2CCl l'influenza dei tre gruppi $-NO_2$ è tale che il cloro tende a staccarsi come Cl^+ (4).

Ora nella serie degli alogenuri di metile, etile, isopropile, butile terziario, la velocità di reazione secondo il meccanismo S_{N2} decresce procedendo da sinistra a destra, mentre nello stesso senso aumenta la velocità per il meccanismo S_{N1} (5). Poichè nella serie citata la progressiva diminuzione di velocità per il meccanismo S_{N2} e il progressivo aumento per il meccanismo S_{N1} dipendono dall'aumento della concentrazione di elettroni all'atomo di carbonio dove ha luogo la sostituzione, si può pensare che l'introduzione del nitro-gruppo favorisca nettamente il meccanismo S_{N2} anche nel caso di reazioni solvolitiche e determini un deciso aumento della velocità di idrolisi in confronto al cloruro di etile. Il risultato della prova da noi eseguita con cloruro di etile in diossano acquoso (2 : 1 in volume) e l'esame dei risultati

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica industriale dell'Università di Milano e nell'Istituto di Chimica generale del Politecnico di Milano.

(**) Nella seduta del 13 dicembre 1952.

(1) M. SIMONETTA e G. FAVINI, questi « Rendiconti », vol. XIV, ser. VIII, fasc. 1, pp. 119–127 (1953).

(2) E. A. MOLWIN-HUGHES, *The Kinetics of reaction in solution*. Oxford (1947).

(3) E. D. HUGHES, « Trans. Far. Soc. », *37*, 603 (1941); « Quart. Rev. », *5*, 245 (1951).

(4) L. BIRCKENBACH, K. HUTTNER, « B. », *62*, 2065 (1929).

(5) J. L. GLEAVE, E. D. HUGHES, C. K. INGOLD, « J. Chem. Soc. », 236 (1935).

già esistenti in letteratura [6], concordano con queste previsioni. Due punti meritano di essere sottolineati: l'influenza della presenza di KOH in soluzione e l'allineamento quasi perfetto dei punti dei nostri diagrammi A, B, C, E, F. Nel caso delle reazioni a due stadi.

$$\left.\begin{aligned} &RCl \rightleftarrows R^+ + Cl^- && \text{(lenta)} \\ &R^+ + H_2O \rightarrow ROH + H^+ \\ &R^+ + OH^- \rightarrow ROH \end{aligned}\right\} \text{(veloci)}$$

poichè la velocità di reazione è determinata dal primo stadio, il secondo stadio non ha influenza sulla velocità medesima e pertanto la formazione di Cl^- procede con egual velocità in ambiente acido, alcalino o neutro. Nel nostro caso è vero che la formazione progressiva di acidità non ha alcun effetto sull'andamento della reazione, ma l'influenza della presenza di ioni OH^- è decisiva ed in misura tale da escludere una interpretazione del fenomeno in base a variazioni di forza ionica nel mezzo, costante dielettrica, ecc. Per il cloronitroetano c'è però da ricordare in soluzione alcalina la presenza della forma « aci » del nitroderivato e l'apparire della reazione di eliminazione. Inoltre la reazione potrebbe anche avvenire secondo il meccanismo S_{N_1} in assenza di alcali, e passare al meccanismo S_{N_2} in presenza di alcali.

Nel caso della reazione a due stadi il progressivo aumento delle concentrazioni di ioni Cl^- agisce sul processo di ionizzazione via via che la reazione procede, anche se l'equilibrio per il secondo stadio è spostato completamente o quasi a destra, così che in condizioni in cui l'influenza dovuta alla variazione della forza ionica del mezzo sia piccola in confronto a quella della legge di azione di massa, anzichè delle rette sono prevedibili curve a concavità rivolta verso il basso e curvatura, sia pur leggera, crescente nel tempo; questo fatto è completamente assente nelle nostre esperienze. Assumendo per la nostra reazione il meccanismo bimolecolare, le costanti apparenti K_1 vanno trasformate nelle costanti vere dividendole per la concentrazione (costante) dell'acqua $K_2 = \frac{K_1}{[H_2O]}$.

Dai valori così calcolati di K_2 e da quelli dell'energia di attivazione apparente si può ricavare per una certa temperatura il coefficiente di Arrhenius A: $K_2 = A\ e^{-E_A/RT}$ e da questo il fattore sterico $P = \frac{A}{Z}$ (Z numero di urti tra le molecole A e B per cc. e per secondo) si calcola per via teorica e, in base alla teoria della collisione nella sua forma più semplice è dato da:

$$Z = \frac{N}{1000}(r_A + r_B)^2 \left[8\pi RT\left(\frac{1}{M_A} + \frac{1}{M_B}\right)\right]^{1/2}$$

(6) G. H. GRANT e C. N. HINSHELWOOD, « J. Chem. Soc. », 258 (1933).

dove N è il numero di Avogadro, R la costante dei gas, M_A e M_B i pesi molecolari delle sostanze reagenti, r_A e r_B i loro raggi molecolari, che in prima approssimazione si ricavano a loro volta dalla relazione:

$$r = 0{,}665 \cdot 10^{-8} \sqrt[3]{V_M} \text{ in cm.}$$

dove V_M è il volume molecolare. Nel nostro caso è $Z = 2{,}74 \cdot 10^{11}$ (a 60°). Per la temperatura di 60° abbiamo ottenuto:

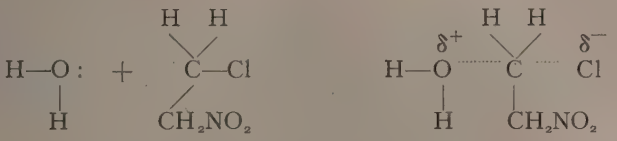
	Acqua–diossano			Acqua–acido formico	
	1 : 1	1 : 2	1 : 5	1 : 2	1 : 5
K_2	$2{,}397 \cdot 10^{-6}$	$2{,}070 \cdot 10^{-6}$	$1{,}119 \cdot 10^{-6}$	$2{,}157 \cdot -6$	$1{,}044 \cdot 10^{-6}$
E_A	18520	14860	15100	17230	13260
A	$3{,}4 \cdot 10^{6}$	$1{,}1 \cdot 10^{4}$	$1{,}10 \cdot 10^{4}$	$5{,}0 \cdot 10^{5}$	$5{,}3 \cdot 10^{2}$
P	$1{,}24 \cdot 10^{-5}$	$4{,}15 \cdot 10^{-8}$	$3{,}65 \cdot 10^{-8}$	$1{,}82 \cdot 10^{-6}$	$1{,}94 \cdot 10^{-9}$
D	27,4	16,5	7,32	42,5	37,6

D è la costante dielettrica della soluzione.

Rileviamo che i valori per P sono in genere assai bassi (infatti per le reazioni « normali » P = 1).

Esaminando i valori K_2 si vede che non sono costanti nelle varie soluzioni acqua–diossano e acqua–acido formico ma crescono con la concentrazione dell'acqua. Ciò dipende dal valore elevato di tale concentrazione per cui l'acqua oltrechè un reagente risulta essere un componente del solvente e al crescere della sua concentrazione cresce la costante dielettrica del mezzo in cui ha luogo la reazione. Sia la teoria della collisione che quella dello stato di transizione, offrono una interpretazione dell'influenza della costante dielettrica del mezzo sulla velocità delle reazioni bimolecolari. La prima dà una visione semimacroscopica del fenomeno: le due molecole reagenti vengono considerate come due dipoli e si calcola la loro energia di interazione elettrostatica alla distanza critica di reazione. Questa energia dà un contributo elettrostatico all'energia di attivazione: tale contributo in generale è positivo (il che corrisponde a repulsione) e diminuisce al crescere della costante dielettrica del mezzo (il cui valore macroscopico generalmente si corregge tenendo conto del fatto che una molecola di soluto può essere solvatata anche da molecole dell'altro soluto, oltrechè del solvente). La seconda teoria prende in esame la struttura dello stato di transizione in confronto allo stato iniziale dal punto di vista microscopico; passando da questo a quello si ha un aumento di carica elettrica che sarà tanto più favo-

rito quanto più elevato è il potere ionizzante del mezzo, cioè quanto più elevato è il contenuto in acqua del solvente:



Nello stato di transizione inoltre si avrà un aumento del contributo delle strutture di risonanza con legame ionico tra l'ossigeno e i due atomi di idrogeno a causa dell'aumento di elettronegatività dell'ossigeno; tale energia di risonanza abbasserà il valore dell'energia di attivazione. Entrambe le teorie sembrano così rendere conto dei fatti sperimentali considerati, compresa l'influenza del solvente. Se però esaminiamo la variazione di K_2 con la costante dielettrica del mezzo confrontando fra loro le soluzioni acqua–diossano e acqua–acido formico troviamo un fatto che non rientra negli schemi precedenti. Precisamente la variazione di velocità di reazione nel caso dell'acido formico al variare della concentrazione in acqua è circa eguale a quella che si ha nel caso del diossano, mentre la variazione di costante dielettrica è molto diversa. Inoltre nelle soluzioni a tenori bassissimi di acqua la reazione sembra non aver luogo, anche quando, per il caso dell'acido formico, il valore della costante dielettrica del solvente è notevolmente superiore a quello di soluzioni acqua–diossano in cui la reazione procede rapidamente. Sembrerebbe pertanto che il fattore determinante sia la quantità di acqua presente in soluzione. La molecola di cloruro per poter reagire con una molecola di acqua che si trovi nella posizione opportuna sembra aver bisogno di uno speciale ambiente creato dalla vicinanza di un certo numero di molecole d'acqua. Qualcosa di simile si ha per l'idrolisi di molti esteri: esteri che si idrolizzano facilmente in acqua liquida si possono distillare in corrente di vapore senza decomposizione [2]. Casi analoghi sono già noti in letteratura: ad esempio le reazioni [7].

$$(C_6H_5)_2CHCl + H_2O = (C_6H_5)_2CHOH + H^+ + Cl^-$$

$$CH_3—(C_6H_5)CHCl + H_2O = CH_3(C_6H_5)CHOH + H^+ + Cl^-$$

L. P. Hammet e collaboratori hanno interpretato questa reazione come polimolecolare nel senso che a ciascun atto elementare di reazione devono prendere parte una molecola di cloruro ed un certo numero di molecole di acqua.

Se n molecole d'acqua sono implicate nell'atto di reazione si può pensare che $n - 1$ molecole polarizzino il legame C — Cl, preparando il distacco dell'alogeno sotto forma di anione, mentre l'altra molecola d'acqua interviene dal lato opposto del legame C — Cl. Tale schematizzazione del fenomeno è consistente con tutti i nostri risultati sperimentali.

(7) J. STEIGMANN, L. P. HAMMETT, « J. Am. Chem. Soc. », *59*, 2536 (1937); N. T. FARINACCI, L. P. HAMMETT, « J. Am. Chem. Soc. », *59*, 2542 (1937).

Chimica. – *Sul comportamento polarografico di alcuni derivati dello iodo positivo*. Nota II di Elena Fornasari, Maria Scarpa e Pietro Lanza, presentata(*) dal Corrisp. G. Semerano.

A proseguimento dello studio polarografico dei composti organici contenenti lo iodo positivo, si è preso in esame lo iodosobenzene che, prima d'ora, non era mai stato oggetto di misure polarografiche.

La conoscenza del suo comportamento al catodo a goccia di mercurio presentava inoltre un certo interesse quale completamento alle notizie riguardanti la polarografia dello iodilbenzene, oggetto della Nota precedente.

In questa Nota si discutono insieme i risultati delle esperienze riguardanti lo iodilbenzene e quelli riguardanti lo iodosobenzene.

Comportamento polarografico dello iodosobenzene. – Lo studio dello iodosobenzene ha presentato qualche difficoltà data la facile alterabilità e la bassa solubilità del composto. Le esperienze preliminari sono state effettuate con soluzioni idroalcoliche. In tali condizioni però non si ottennero gradini di riduzione ben definiti. Ciò era stato attribuito, in un primo momento, alla insufficiente solubilità della sostanza; si è potuto però poi accertare che lo iodosobenzene, dato il suo notevole potere ossidante, veniva rapidamente decomposto dall'alcool. L'uso della piridina come solvente non ha portato vantaggi apprezzabili; il solvente più adatto per lo studio di questa sostanza è risultato l'acqua. Anche con questa i primi risultati furono molto incerti, dovendosi lavorare a concentrazioni molto basse di una sostanza instabile. Esaminando soluzioni di iodosobenzene appena preparate e operando rapidamente, si sono potuti ottenere polarogrammi riproducibili che permettono di dedurre in modo indubbio alcuni aspetti del comportamento dello iodosobenzene.

Anch'esso fornisce due gradini, il primo dei quali è sprovvisto di base e presenta il tetto già a potenziale zero, in accordo con le notevoli proprietà ossidanti del composto. Il secondo, di altezza circa uguale a quella del primo, si presenta a $\pi_{1/2} = -1{,}62$ V con la soluzione base di KCl 0,1 N, cioè allo stesso potenziale del secondo gradino dello iodilbenzene nello stesso ambiente.

Durante lo studio delle deformazioni presenti sulle curve polarografiche di iodilbenzene ad elevata concentrazione è stata esaminata l'attività superficiale dello iodosobenzene in modo perfettamente analogo a quanto detto prima per lo iodilbenzene. Data la necessità di eseguire le misure con rapidità, i valori sono di carattere più qualitativo che quantitativo. Si può

(*) Nella seduta del 13 dicembre 1952.

sempre dire però che l'attività dello iodosobenzene è circa tre volte maggiore di quella dello iodilbenzene.

L'apparente discordanza tra l'elevata attività superficiale e la regolarità delle curve polarografiche dello iodosobenzene è dovuta al fatto che la sua solubilità in acqua è appena dell'ordine 10^{-4} M, cioè non è possibile raggiungere per lo iodosobenzene quelle concentrazioni alle quali si riscontrano le deformazioni dei gradini dello iodilbenzene.

Discussione dei risultati. – Per il valore del potenziale e per le caratteristiche generali, il secondo dei gradini presentato sia dallo iodilbenzene sia dallo iodosobenzene può essere attribuito al processo: $C_6H_5J + H^+ + 2e \longrightarrow C_6H_6 + J^-$, già studiato da altri Autori direttamente sullo iodobenzene.

v. Stackelgerg e Stracke [3] avevano trovato per $\pi_{1/2}$ il valore di —1,62 V, da bromuro di tetraetilammonio in diossano al 75 %; tale valore era risultato indipendente dal pH. Gergely e Iredale [16] hanno trovato, sempre per lo iodobenzene, $\pi_{1/2} = -1{,}616$ in alcol etilico al 66 % e bromuro di tetraetilammonio come elettrolita.

Lo studio dello iodobenzene è stato da noi effettuato usando alcol isopropilico al 50 % come solvente e Li_2SO_4 come elettrolita. Il $\pi_{1/2}$ è risultato di ca. —1,8 V; è da notare però che lo iodilbenzene nello stesso ambiente presenta i suoi gradini spostati di ca. 0,2 V verso i potenziali più negativi, cosicché risulta giustificata la differenza riscontrata per lo iodobenzene tra i nostri valori e quelli degli Autori su citati.

Una conferma che il secondo gradino dello iodilbenzene sia dovuto al processo di riduzione dello iodobenzene, con formazione di ione iodidrico, si è avuta osservando l'elettrodo a goccia di Hg al microscopio con una soluzione che, oltre allo iodobenzene conteneva anche nitrato d'argento. Operando la riduzione dello iodobenzene in soluzione alcolica al potenziale già citato, si nota all'intorno della goccia, e di più alla base, la formazione di un precipitato delle caratteristiche dello ioduro d'argento. Anche con una soluzione acquosa concentrata di iodilbenzene, si osserva a —1,6 V un abbondante precipitato, molto simile all'altro.

La determinazione del numero di elettroni messi in gioco nel processo, o nella serie di processi, responsabile del primo gradino di riduzione dello iodilbenzene, presenta notevoli difficoltà; si giunge a risultati diversi a seconda del metodo usato.

Ammessa la bivalenza del secondo gradino, il primo gradino avendo altezza circa doppia, dovrebbe corrispondere ad un processo tetravalente, ad esempio

$$C_6H_5JO_2 + 4H^+ + 4e \longrightarrow C_6H_5J + 2H_2O.$$

L'esame analitico della curva di polarizzazione ed il calcolo di n dalla pendenza della curva log $i/i_d - i)/E$ non conduce a risultati soddisfacenti,

(16) E. Gergely e T. Iredale, « J. Chem. Soc. », 13 (1951).

poiché con soluzioni tamponate non è possibile ottenere un polarogramma avente sviluppo regolare del gomito.

Per confermare la supposta tetravalenza del processo corrispondente al primo gradino, si sono fatte numerose misure coulombometriche in condizioni polarografiche, secondo il metodo proposto da Lanza e Corbellini [17]. Dalle misure risulterebbe un valore di $n = 2$ all'inizio dell'elettrolisi e una rapida consecutiva modificazione di esso fino a $n = 4$. Dall'esame dei diagrammi coulombometrici $\log i/t$, si è portati ad ammettere che nella riduzione polarografica della sostanza in esame possano intervenire vari processi atti a complicare notevolmente il meccanismo elettrolitico.

Da opportuni esperimenti non risulta che la sostanza agisca direttamente sul mercurio, ma non è affatto da escludere un'azione sul metallo da parte di prodotti intermedi di riduzione (C_6H_5JO) e una formazione intermedia di veri e propri composti del mercurio.

A sostegno di questa ipotesi starebbe il fatto che i potenziali di semigradino dei polarogrammi sono notevolmente più positivi dei potenziali di ossidoriduzione del sistema:

$$C_6H_5JO_2 + 2e + 2H^+ \rightleftharpoons C_6H_5JO + H_2O$$

studiato da Grossmann [10].

Data l'instabilità dello iodosobenzene, non si sono potute realizzare misure coulombometriche su questo composto; per esso perciò l'unico criterio per definire il valore di n rimane il confronto dell'altezza dei gradini. E poiché essi sono sensibilmente della stessa altezza, si dedurrebbe così per n il valore 2 già ammesso per lo iodobenzene. I due processi elettrolitici cui soggiace l'iodosobenzene all'elettrodo a goccia di Hg sarebbero quindi i seguenti:

$$C_6H_5JO + 2H^+ + 2e \longrightarrow C_6H_5J + H_2O$$

$$C_6H_5J + H^+ + 2e \longrightarrow C_6H_6 + J^-.$$

Questa conclusione si inserisce assai bene nel quadro del comportamento dello iodilbenzene.

Gli schemi proposti per i vari processi di riduzione, che decorrono al catodo a goccia di Hg nell'elettrolisi polarografica delle due sostanze esaminate, sembrano sufficienti a rendere conto complessivamente del quadro sperimentale descritto; è certo tuttavia che almeno per quanto riguarda i processi interessanti il primo gradino di ambedue le sostanze, le reazioni suddette non possono indicare che la risultante di processi contemporaneamente decorrenti e non deducibili con le usuali tecniche di lavoro. Le difficoltà e la scarsa riproducibilità riscontrate nelle misure coulombometriche ne sono la prova più diretta. È forse sostenibile l'ipotesi che nella riduzione dello iodilbenzene a iodobenzene si passi attraverso lo stadio C_6H_5JO, che

(17) P. Lanza e A. Corbellini, «Chimica e Industria», *84*, 314 (1952); recensione.

per le sue spiccate proprietà ossidanti (già riducibile a oV), per la sua probabile azione sul mercurio e per la sua notevole attività superficiale, porti gravi alterazioni al decorso del processo polarografico, compromettendo la reversibilità del processo ossido–riduttivo del sistema, esistente invece su elettrodi di platino, e rendendo impossibile la distinzione del processo polarografico primario. Per quanto riguarda le caratteristiche elettrochimiche del sistema iodosobenzene–iodilbenzene, non possono infine sfuggire le analogie con quelle del sistema nitrosobenzene–nitrobenzene ed altri sistemi organici ed inorganici per i quali pure la forma meno ossigenata presenta le più energiche caratteristiche ossidanti.

Chimica organica. — *Sintesi eterocicliche con l'alcool propargilico e il butindiolo.* Nota II di ELSO MUGNAINI e PAOLO GRÜNANGER, presentata (*) dal Corrisp. A. QUILICO.

Nella Nota I su questo argomento è stata descritta la sintesi di alcooli e glicoli pirazolici, triazolici e isossazolici a partire dall'alcool propargilico e dal butindiolo. Nel presente lavoro vengono forniti i dati sperimentali relativi.

I. – AZIONE DELLA FENILAZIDE SULL'ALCOOL PROPARGILICO.

1-fenil, 4-ossimetil, 1·2·3-triazolo (form. VII) (**) e *1-fenil, 5-ossimetil, 1·2·3-triazolo* (form. IX). – Gr. 8,0 di fenilazide (1,2 moli) e gr. 3,1 di alcool propargilico (1 mole) vengono sciolti in cc. 5 di benzolo in un palloncino munito di refrigerante a ricadere e fatti bollire per 15 ore con bagno ad olio a 120–130°. Allontanato il benzene per evaporazione, rimane una massa collosa, che per l'aggiunta di qualche goccia di etere si trasforma in una massa bianco-giallastra microcristallina, che viene raccolta su filtro e lavata con etere (gr. 8,5 di prodotto grezzo). Per cristallizzazione dall'acqua è possibile isolare due prodotti: uno a p. f. 113° e uno a p. f. 82°.

La parte a p. f. 113° cristallizza in aghetti dall'acqua, in cui a freddo non è molto solubile, e da acqua alcool in scagliette. Il p. f. non varia neppure dopo ripetute cristallizzazioni. Questo prodotto ha tutte le caratteristiche dell'*1-fenil, 4 ossimetil, 1·2·3-triazolo* già noto (6). Resa ca. gr. 4,0 (ca. 34 % del teorico).

All'analisi:

trovato %: N 23,78

per $C_9H_9ON_3$ calcolato 23,99.

(*) Nella seduta del 13 dicembre 1952.

(**) Per le formule e le citazioni bibliografiche antecedenti alla (14), vedi Nota I.

Benzoilderivato. – Benzoilando secondo il metodo Schotten–Baumann, si ottiene un prodotto in aghi incolori p. f. 115–116° (da metanolo). Analisi:

trov. %: N 14,91; 15,09

per $C_{10}H_{13}O_2N_3$ calc. 15,05.

Ossidazione ad acido. – Gr. 0,4 del prodotto p. f. 113° vengono sciolti in acqua, indi si aggiungono alla soluzione leggermente alcalinizzata a poco a poco e a freddo gr. 0,5 di $KMnO_4$. L'ossidazione avviene piuttosto rapidamente. Quando la soluzione decantata è limpida, si filtra e si lava ripetutamente con acqua calda. Il filtrato viene evaporato a piccolo volume e quindi acidificato con H_2SO_4 dil.: si ha un precipitato bianco, che, ricristallizzato dall'acqua, dà gr. 0,37 di aghetti p. f. 149–150°. Il p. f. dato dalla letteratura per l'*acido 1–fenil, 1·2·3·triazol(4)carbossilico* è 151° [5].

Per *metilazione* con la quantità calcolata di diazometano si ottiene l'estere metilico p. f. 120–121°, in scagliette incolori (per evaporazione dall'etere). La letteratura [14], dà p. f. 121°.

Per cauto riscaldamento al disopra del p. f., l'acido p. f. 149–150° si decarbossila e si trasforma in un olio, che per raffreddamento solidifica. Cristallizzandolo dall'acqua, si ha un prodotto a p. f. 55–56°, che corrisponde a quello dell'1–feniltriazolo.

La parte a p. f. 82° si ottiene concentrando le acque madri della prima cristallizzazione. Viene giù come massa collosa che a poco a poco solidifica. Si può cristallizzare non molto bene dall'acqua. Pesa gr. 4,0 (ca. 34 % del teorico). Analisi:

trov. %: N 24,40

per $C_9H_9ON_3$ calc. 23,99.

Ossidazione ad acido. – L'ossidazione, condotta nel modo descritto per l'isomero, conduce con resa pressochè quantitativa ad un acido che, cristallizzato dall'acqua, fonde a 176° dec. e corrisponde per proprietà all'*acido 1–fenil, 1·2·3·triazol(5)carbossilico.*

Per *metilazione* con la quantità calcolata di diazometano si ottiene l'estere metilico, che cristallizza da poco metanolo in lunghi e soffici aghi incolori p. f. 101–102°. Il p. f. dato dalla letteratura è 102° [15].

II. – Azione dell'estere diazoacetico sull'alcool propargilico.

Estere etilico dell'acido 3 ossimetilpirazol 5 carbossilico form. XI. Gr. 5,4 di alcool propargilico 1 mole e gr. 11,0 di estere diazoacetico 1,2 moli, si sciolgono in 15 cc. di benzene in un palloncino munito di refrigerante a ricadere. Si fa bollire per 20 ore, indi si svapora il benzene: rimane

(14) O. Dimroth, « Ber. », *35*, 1038 (1902).
(15) O. Dimroth, « Ber. », *35*, 1035 (1902).

una massa vischiosa semisolida, che per aggiunta di qualche goccia d'etere solidifica tutta in una massa biancastra. Si spappola in etere e si filtra su setto poroso.

La sostanza bianca che rimane cristallizza in aghetti piramidali dal benzene con p. f. non molto netto 86–89°, dall'estere acetico in bellissimi aghetti p. f. 93°. Resa gr. 9,0 (ca. 78 % del teorico).

La stessa reazione, svolta in soluzione eterea, ha dato rese molto inferiori (ca. 25 % del teorico).

Analisi:

trov. %: N 16,78

per $C_7H_{10}O_3N_2$ calc. 16,47.

Acido 3-ossimetilpirazol(5)carbossilico (form. XII). – Gr. 1,65 di estere si sciolgono in 50 cc. di acqua addizionata di 5 cc. di una soluzione di NaOH al 10 %. Si scalda la miscela su b. m. per 5 ore. Si svapora poi fin quasi a secco, e rimane un residuo bianco solubile in acqua e in acidi, e che lascia un residuo bianco se scaldato in tubicino. Si scioglie allora in acqua e si tratta con acetato di Cu. Si ha dopo un breve tempo un precipitato azzurro chiaro fioccoso, che a poco a poco si raccoglie in minuti cristallini azzurri chiari e precipita sul fondo.

Dopo averlo filtrato e asciugato in stufa a 110°, se ne fa l'analisi:

trov. %: Cu 18,87

per $C_{10}H_{10}O_6N_4Cu$ calc. 18,40.

Il sale di Cu si scioglie in HCl dil. (1 : 1) e quindi si decompone con una corrente di H_2S. Si filtra e si tira a secco il filtrato su b. m. Si riprende con acqua e si ripete varie volte l'operazione fino ad eliminazione completa dell'acido cloridrico. Rimane un residuo bianco cristallizzabile da poca acqua p. f. 210–211°. Resa quasi teorica. Analisi:

trov. %: N 19,55

per $C_5H_6O_3N_2$ calc. 19,71.

Ammide. – Gr. 0,5 di estere p. f. 93° vengono sciolti in un eccesso di NH_3 conc. e si tengono a temperatura ambiente per 24 ore. Si allontana quindi l'ammoniaca e si tira a secco su b. m. Si ripete il trattamento con NH_3 e dopo aver tirato nuovamente a secco, rimane una massa cristallina. Si riprende con poca acqua, si tratta con carbone animale, si scalda e si filtra. Per raffreddamento precipitano bei cristalli bianchi prismatici p. f. 180 181°.

Analisi:

trov. %: N 29,96

per $C_5H_7O_2N_3$ calc. 29,78.

Per *saponificazione* dell'ammide con HCl al 10 % si ottiene l'acido p. f. 210 211°, identico, per le sue proprietà e per il p. f. in miscela, a quello ottenuto saponificando l'estere attraverso il sale di Cu.

Ossidazione. – Per ossidazione permanganica a freddo dell'acido libero p. f. 210–211° si ottiene una sostanza acida cristallizzabile dall'acqua in aghetti p. f. 283° (il p. f. della letteratura oscilla tra 282° e 297° [9]).

III. – Azione del benzonitrilossido sull'alcool propargilico.

γ-fenil, α-isossazolcarbinolo (form. XIV). – Ad una soluzione di gr. 1,25 di alcool propargilico in poco etere viene aggiunta una soluzione eterea di benzonitrilossido, preparata nel solito modo da gr. 5 di cloruro benzidrossamico [16], e la miscela viene riscaldata a ricadere su b. m. per circa 1 ora. Al termine dell'ebollizione si svapora il solvente: rimane un residuo oleoso lievemente giallino, che viene ripreso con metanolo, bollito con carbone animale e filtrato. Il solvente viene svaporato a temperatura ambiente sotto vuoto, e la massa cristallina che rimane schiacciata su piatto poroso. Per ripetute cristallizzazioni da miscele ligroina–benzene, il prodotto, insol. in acqua e fac. sol. in alcool, etere e benzene, si presenta in scagliette incolori p. f. 52°. Analisi:

trov. %: N 8,21

per $C_{10}H_9O_2N$ calc. 8,00.

Benzoilderivato. – Benzoilando secondo Schotten–Baumann, si ottiene un prodotto ben cristallizzabile in aghetti p. f. 74–75°. Analisi:

trov. %: N 5,24

per $C_{17}H_{13}O_3N$ calc. 5,02.

Ossidazione ad acido. – Per ossidazione cromica a caldo si ottiene facilmente il relativo acido, cristallizzabile dall'acqua in aghetti p. f. 179–180°. Il p. f. e le altre proprietà corrispondono a quelle dell'acido γ fenil, α isossazolcarbonico già noto [11].

IV. – Azione della fenilazide sul butindiolo.

1-fenil, 4·5-diossimetil, 1·2·3-triazolo (form. XVII). – Gr. 5,4 di fenilazide (1,2 moli) e gr. 3,3 (1 mole) di butindiolo vengono disciolti in 5 cc. di benzene. La miscela viene messa in un palloncino munito di refrigerante a ricadere e scaldata su bagno ad olio a 120° per 12 ore. Alla fine si notano grossi cristalli prismatici. Si allontana il benzene e la fenilazide inalterata facendo passare una corrente di vapore, poi si riprende con acqua e si bolle con nero animale. Dopo filtrazione precipitano per raffreddamento gr. 6,2 di bei cristalli prismatici bianchi p. f. 161–162°. Per ricristallizzazione da acqua si hanno gr. 6,0 di prodotto puro p. f. 161–162° (resa ca. 77% del teor.).

(16) A. Quilico, G. Stagno d'Alcontres e P. Grünanger, lav. cit., p. 487.

Analisi:

trov. °/₀: N 20,81

per $C_{10}H_{11}O_2N_3$ calc. 20,48.

Dibenzoilderivato. – Benzoilando secondo Schotten–Baumann, si ottiene un prodotto che cristallizza da metanolo in prismi incolori allungati p. f. 91–92°. Analisi:

trov. °/₀: N 10,34; 10,27

per $C_{24}H_{19}O_4N_3$ calc. 10,16.

Ossidazione ad acido. – Gr. 0,5 di glicole triazolico vengono sciolti in 100 cc. di acqua leggermente alcalinizzata con qualche goccia di NaOH diluita, e poi vengono addizionati a poco a poco di gr. 1,1 di $KMnO_4$. L'ossidazione procede in un primo tempo abbastanza veloce a freddo, verso la fine bisogna scaldare. Dopo filtrazione, evaporazione e acidificazione con H_2SO_4 dil., si ottiene un prodotto cristallino acido, che cristallizza dall'acqua in aghetti p. f. 147–148° dec. (p. f. della letteratura 147–150° [12]).

Per *metilazione* con la quantità calcolata di diazometano si ottiene un prodotto che fonde grezzo a 123–125°, e, cristallizzato ripetutamente da metanolo, forma begli aghi incolori p. f. 126–127°. Il p. f. dell'estere dimetilico dell'acido 1–fenil, 1·2·3·triazol(4·5)bicarbossilico dato in letteratura [17] è 127°.

Acido 1–fenil, 4–ossimetil, 1·2·3·triazol(5)carbossilico (form. XVIII). – Si sciolgono gr. 1,0 di glicole triazolico in cc. 120 di acqua, si alcalinizza con qualche goccia di NaOH dil., e si aggiungono a poco a poco gr. 1,0 di $KMnO_4$. Dopo filtrazione, evaporazione e acidificazione con H_2SO_4 dil. si ottengono gr. 0,8 di prodotto cristallino, che ricristallizza dall'acqua e dall'alcool in aghetti p. f. 173° dec. Analisi:

trov. °/₀: N 19,37

per $C_{10}H_9O_3N_3$ calc. 19,17.

Il prodotto, purificato da alcool, venne titolato con NaOH N/10: gr. 0,3313 richiesero cc. 15,0 (teor. cc. 15,11).

Decarbossilazione. – Gr. 0,22 dell'ossiacido triazolico vengono scaldati in una provetta immersa in bagno ad olio per 10 minuti a 180°. Si ha decarbossilazione e rimane un prodotto che a freddo solidifica. Cristallizzato dall'acqua in aghetti ha p. f. 112–113°.

Il p. f. in miscela con 1–fenil, 4–ossimetil, 1·2·3·triazolo preparato direttamente non ha dato abbassamento.

Il prodotto, ossidato con $KMnO_4$, dà l'acido 1–fenil, 1·2·3·triazol'4 carbossilico p. f. 149 150° dec., che, decarbossilato a sua volta, dà 1 feniltriazolo p. f. 55°.

(17) O. DIMROTH, « Ber. », *35*, 1036 (1902).

V. – Azione dell'estere diazoacetico sul butindiolo.

Estere etilico dell'acido 3·4-diossimetil, pirazol(5)carbossilico (form. XX). – Gr. 10,0 (1,5 moli) di estere diazoacetico vengono sciolti in 10 cc. di benzene, e vi si aggiungono gr. 5,7 di butindiolo (1 mole), in un palloncino munito di refrigerante a ricadere. Si fa bollire la miscela su bagno ad olio a 120–130° per 20 ore. Dopo aver allontanato per evaporazione il benzene, rimane una poltiglia densa semisolida, che, per aggiunta di poco etere, solidifica in una massa biancastra. Asciugata su piatto poroso, e cristallizzata da acetone dà p. f. 145–145°,5, da acetato d'etile p. f. 145°,5. Il prodotto, in begli aghi bianchi è solubile in acqua, alcool e insolubile in etere. Resa gr. 4,45 (ca. 37 % del teor.).

Analisi:

		trov. %:	N 13,91
per	$C_8H_{12}O_4N_2$	calc.	13,99.

Ossidazione ad acido. – Gr. 1,0 dell'estere sopra descritto vengono sciolti in 50 cc. di acqua lievemente alcalinizzata, e addizionati a piccole porzioni di gr. 2,8 di $KMnO_4$. L'ossidazione è piuttosto lenta e difficile, e bisogna scaldare di frequente su b. m.; alla fine si filtra dal MnO_2 e si svapora il filtrato a piccolo volume. Si acidifica con H_2SO_4 dil. e si raccoglie il precipitato bianco formatosi. Si tratta del sale monopotassico dell'acido tricarbossilico, che cristallizza dall'acqua calda in aghi setacei. Resa gr. 0,8 di sale potassico cristallino.

Analisi:

		trov. %:	N 12,00	K 16,46
per	$C_6H_3O_6N_2K$	calc.	11,76	16,41.

Per ottenere l'acido libero, si bolle per breve tempo il sale potassico con HCl dil.; lasciando raffreddare si separa un prodotto cristallino in aghetti p. f. 228° dec. Il p. f. dato dalla letteratura [13] è 232° (*acido 3·4·5·pirazoltricarbossilico*).

Per metilazione con la quantità calcolata di diazometano si ottiene un prodotto che cristallizza da poco metanolo in aghetti incolori p. f. 117–118°. Il p. f. dell'estere trimetilico noto in letteratura [18] è 118°.

Analisi dell'estere trimetilico:

		trov. %:	N 11,70
per	$C_9H_{10}O_6N_2$	calc.	11,57.

(18) E. Buchner, « Ber. », *22*, 843 (1889).

Chimica. — *Cella polarografica a volume variabile di soluzione, adatta per misure cinetiche a controllo continuo del pH*(*). Nota di ANTONIO FOFFANI, presentata(**) dal Corrisp. G. SEMERANO.

Durante lo svolgimento di una serie di ricerche cinetiche per via polarometrica (1), tuttora in corso, sull'idrolisi alcalina della cumarina e di alcuni suoi metil–, metossi– e cloro–derivati, si è resa necessaria la misura continua del pH durante tutto il decorso della reazione, dato che il processo in esame è fortemente catalizzato dagli ioni ossidrilici e la costante di velocità risulta quindi fortemente influenzata dal pH.

È stato d'altra parte necessario orientarsi verso tipi di celle che, pur realizzando tale misura continua di pH, permettessero anche l'impiego di piccoli volumi di soluzione, data la limitata disponibilità dei composti in esame, di faticosa preparazione. Tali condizioni si sono potute realizzare adottando il tipo di cella di fig. 1.

Essa è costituita da un corpo cilindrico di 50 mm. di altezza e 50 mm. di diametro, terminante in un cono di 25 mm. di altezza. Il fondo del cono, mediante capillare, rubinetto e tubo di vipla, è collegato con una riserva di mercurio. In tal modo è possibile sia la misura con anodo interno, sia la regolazione accurata del livello della soluzione in cella a seconda del volume impiegato, allo scopo di permettere in ogni caso la completa immersione dell'elettrodo a vetro. L'idrogeno necessario per disareare la soluzione viene introdotto per il tubicino *A* di fig. 1. L'orifizio di tale tubicino è situato quasi al fondo della zona conica ed affiora sulla superficie del mercurio durante il periodo di disareazione. In tal modo è possibile la completa eliminazione dell'ossigeno dalla soluzione ed una rapida agitazione ed omogeneizzazione di essa al momento

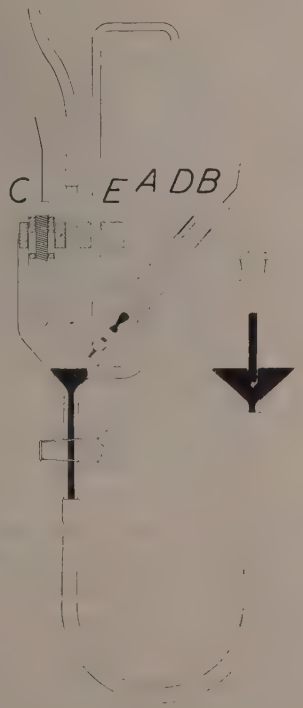


Fig. 1. – Cella polarografica.
A) tubo di entrata dell'idrogeno; *B*) elettrodo a calomelano; *C*) elettrodo a vetro; *D*) tubo di uscita dell'idrogeno; *E*) ponte ad agar.

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica fisica dell'Università e Centro di Studio per la Polarografia del C.N.R., Padova, 15 gennaio 1953.

(**) Nella seduta del 14 febbraio 1953.

(1) A. FOFFANI, A. MANGINI, R. PASSERINI e G. SEMERANO, manoscritto in compilazione; A. FOFFANI, *Ricerche cinetiche per via polarometrica nel gruppo delle cumarine*. «Atti Accad. Naz. Lincei», Classe Sci. fis. mat. e nat., ser. VIII, vol. XIV, fasc. 3 (1953).

della introduzione dei reattivi; ciò rende possibile lo studio accurato di cinetiche rapide, fino a periodi di semitrasformazione di circa $30'' \div 45''$.

L'idrogeno impiegato, prodotto per via elettrolitica, veniva purificato per borbottamento su soluzioni alcaline di pirogallolo; prima della cella vi era una bottiglia di saturazione con acqua. Il tempo di disareazione non si può ridurre oltre un dato limite (circa un'ora), a causa del notevole volume d'aria sovrastante la soluzione.

Il ramo *B* della cella, avente la stessa inclinazione del cono della stessa, serve per l'introduzione dell'elettrodo di riferimento a calomelano per la misura del pH. La punta di esso viene a trovarsi molto vicina all'orifizio del tubetto d'arrivo dell'idrogeno, lasciando così libero il massimo volume di soluzione per l'immersione in essa delle altre parti necessarie.

L'elettrodo a vetro era introdotto attraverso il tappo mediante un manicotto di vetro a tenuta di gas, che si prolungava per quasi tutta la sua lunghezza, proteggendolo così in modo efficace da pericolose sollecitazioni meccaniche; altri fori nel tappo permettevano l'introduzione dell'elettrodo a gocce, dei reattivi e di un ponte di collegamento ad agar, nel caso di impiego di un elettrodo di riferimento esterno a calomelano per la misura accurata di potenziali di semigradino.

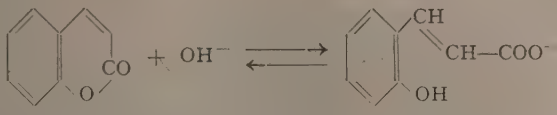
La cella ora descritta rende possibile la misura con volumi relativamente piccoli di soluzione; sono stati normalmente impiegati $10 \div 15$ cm^3 di soluzione; tale volume è però riducibile a circa $7 \div 8$ cm^3 mediante opportuno spostamento del livello del mercurio in cella; con 15 cm^3 lo spessore di soluzione in cella è di circa 2 cm.

La cella, con la riserva di mercurio e l'elettrodo di riferimento esterno, era mantenuta in termostato termoregolato, mediante dispositivo Stabyl-Vertex, a $\pm$ 0,05° C; le varie parti erano fissate, mediante opportuni anelli, su di una piastra e potevano quindi con facilità essere immerse nel termostato. In tal modo era possibile una rapida e semplice sostituzione della cella in misure successive, come pure il lavaggio della stessa.

La forma della cella, data la notevole altezza della sua parte cilindrica e la sua posizione nel termostato, garantiva l'immersione del piccolo volume di soluzione e della parete sovrastante nel bagno termostatico per un tratto notevole; ciò assicurava la costanza della temperatura d'esperienza nei limiti sopra riportati ed escludeva il fenomeno, spesso riscontrato in misure di questo genere, della parziale evaporazione della soluzione e condensazione sulle pareti più fredde.

Le misure di pH sono state eseguite sia con elettrodo a vetro del tipo schermato, sia con elettrodo semischermato, con risultati in ottimo accordo. Gli elettrodi a vetro impiegati (tipo EA-107 ed EA-113 della Metrohm A. G., Herisau, Schweiz) presentavano, pur nelle condizioni sperimentali adottate, una curva di taratura del tutto lineare fino a circa pH = 12, con pendenza normale, e la lettura di pH era perfettamente riproducibile nel tempo anche a temperatura notevolmente diversa da quella ambiente.

In fig. 2 è riportato un esempio di curva cinetica, ottenuta nelle condizioni sperimentali sopra descritte e riferentesi alla reazione di apertura, per idrolisi alcalina, dell'anello lattonico della cumarina [2], secondo il processo reversibile:

(1) 

che si attua in modo analogo anche per i suoi derivati. In base alla (1) il corrispondente andamento cinetico dovrebbe risultare, a pH costante, del

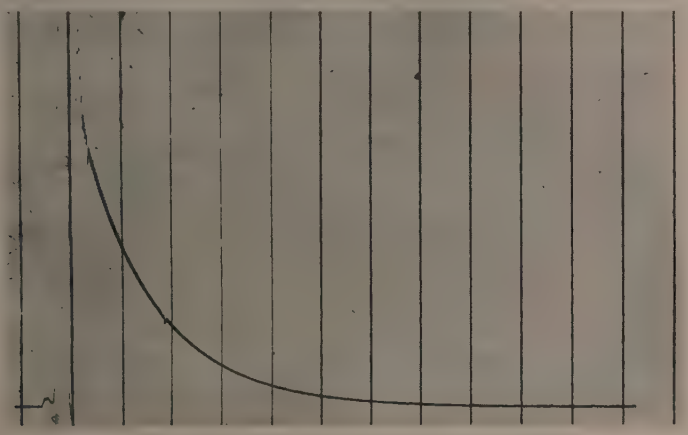


Fig. 2. – Esempio di esperienza cinetica per la reazione diretta (di apertura dell'anello lattonico) nel caso della cumarina. Sens. galvan. 1/70 della massima. La differenza di tempo fra due verticali è di 140 sec.

Conc. cumarina $c = 1{,}668 \cdot 10^{-3}$ mole/litro; pH = 11,80; potenziale di misura −1,72 V rispetto all'E. C. N.

primo ordine sia per la reazione diretta che per quella inversa; la validità di tale meccanismo si è potuta verificare con ottima approssimazione in tutte le misure finora eseguite, sulle quali verrà riferito in dettaglio in seguito [1].

La curva cinetica sperimentale di fig. 2 dà la dipendenza della corrente di diffusione della forma lattonica dal tempo, per la cumarina a pH = 11,80; si può osservare come in tale esempio la reazione decorra fino a completa apertura dell'anello lattonico. In fig. 3 sono riportati, per la cumarina, i risultati di alcune esperienze eseguite a differenti pH e a 25° C, sempre

(2) A. J. HARLE e L. E. LYONS, « J. Chem. Soc. », 1575-8 (1950); J. WRATIL, *Dissertation*, Univ. Wien (1948); R. PATZAK e L. NEUGEBAUER, « Monatsh. », *82*, 662 70 (1951); *83*, 776 85 (1952); O. ČAPKA, « Coll. Czechoslov. Chem. Communs », *15*, 965 71 (1950); « Proc. I int. polar. congr. », Praga, I, 701-3 (1951).

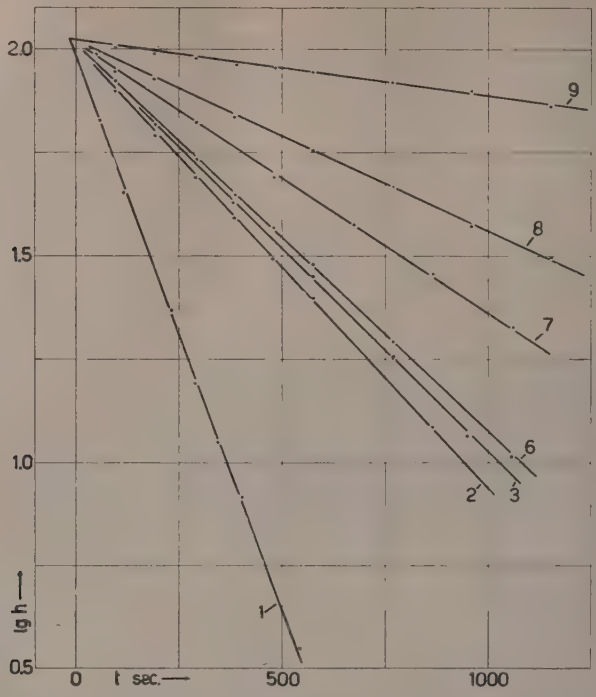


Fig. 3. – Dipendenza della corrente di diffusione della forma lattonica dal tempo, a vari pH, per il caso della cumarina.

Curva 1, pH = 11,84; curva 2, pH = 11,48; curva 3, pH = 11,43; curva 6, pH = 11,40; curva 7, pH = 11,25; curva 8, pH = 11,10; curva 9, pH = 10,55.

per il caso di reazioni decorrenti in modo completo. In ordinata si hanno i valori di $\log h$, dove h è la corrente di diffusione della forma lattonica in mm. per una sensibilità galvanometrica 1/70 della massima.

TABELLA I.

Esp. n.	pH	k sec.$^{-1}$	$\log k$
1	11,43	$2{,}21 \cdot 10^{-3}$	— 2,656
2	»	$2{,}19 \cdot 10^{-3}$	— 2,660
3	»	$2{,}22 \cdot 10^{-3}$	— 2,654

In Tabella I sono riportati i valori di k corrispondenti a tre esperienze ripetute in condizioni identiche per pH = 11,43; tali esperienze si riferiscono alla retta 3 di fig. 3. Anche la ripetizione di altre esperienze ha por-

tato ad un errore relativo dello stesso ordine di grandezza. È da notare che la reazione in esame, in tutto l'intervallo di pH considerato, era catalizzata fortemente dagli ioni ossidrilici (cfr. rette 2, 3 e 6 di fig. 3, che si riferiscono a variazioni rispettivamente di 0,05 e 0,03 unità di pH), e quindi ogni variazione occasionale di pH nel corso di essa avrebbe avuto un forte effetto sulla costante di velocità; è pure da osservare che, in base all'energia di attivazione e al fattore di frequenza del processo in esame [1], si calcola una variazione di log k di 0,003 unità per 0,1° di variazione di temperatura.

Chimica. — *Elettroforesi su carta di proteine muscolari.* Nota di AURELIO MARIANI e GIOVANNI TOSCHI, presentata [*] dal Socio D. MAROTTA.

Lo studio elettroforetico delle proteine muscolari in rapporto con le diverse condizioni fisiologiche del muscolo è stato oggetto negli ultimi anni di numerose ricerche, cui ha dato un largo contributo il Crepax, dell'Istituto di Fisiologia dell'Università di Bologna. Il Dubuisson, nelle sue rassegne sull'argomento, ha fornito una estesa raccolta di dati sperimentali [1]. Basandoci sulle tecniche già sviluppate per l'elettroforesi in fase libera di proteine muscolari, abbiamo voluto mettere a punto per le stesse proteine la tecnica di elettroforesi su carta. Abbiamo impiegato la semplice e comoda attrezzatura descritta da Kunkel e Tiselius [2], già sperimentata con successo per le proteine seriche. Fin dalle prime prove abbiamo constatato varie difficoltà, dipendenti principalmente da: 1° necessità di operare con soluzioni tamponate di forza ionica superiore a quella delle soluzioni normalmente impiegate nella elettroforesi su carta; ne conseguono bassi voltaggi e conseguenti lunghe elettroforesi da eseguire tutte in camera fredda; 2° forti correnti di elettroosmosi che trascinavano verso il polo negativo molte proteine a bassa mobilità; 3° forte perdita di proteine per fissazione sulla carta. Per ovviare al massimo a questi inconvenienti abbiamo adottato i seguenti accorgimenti: 1° impiego di strisce lunghe e strette (cm. 4×30) per aumentare la resistenza del mezzo e poter lavorare con voltaggi fino a 8-10 V/cm.; 2° pretrattamento della carta con soluzione di siero-albumina secondo la tecnica già proposta da uno di noi [3]; 3° la soluzione proteica in esame si depone in un tratto della striscia precedentemente saturato di siero-albumina, in modo che sia il movimento verso il polo positivo che quello verso il polo negativo avvenga su carta già saturata. In tal modo è stato possibile: *a*) rilevare la presenza di piccole quantità di mioalbumina, la quale

(*) Nella seduta del 10 gennaio 1953.

(1) M. DUBUISSON, *Exposés annuels de Biochimie Medicale*, IX série, 1948, Masson, Paris.

(2) H. G. KUNKEL, A. TISELIUS, « J. Gen. Physiol. », *35*, 89 (1951).

(3) A. MARIANI, « Rendic. Ist. Sup. San. », *15*, 337 (1952).

per la sua alta mobilità percorre un lungo tratto della striscia; *b*) separare i componenti che, per effetto dell'elettroosmosi, vengono a spostarsi verso il polo negativo, senza una eccessiva perdita per fissazione sulla carta.

Gli estratti di proteine muscolari, preparati secondo le modalità indicate da Dubuisson [4] e da Crepax [5], sono stati deposti sulla carta in quantità di 5–10 mm³. L'elettroforesi si è svolta in camera fredda a 0° — 2° C.,

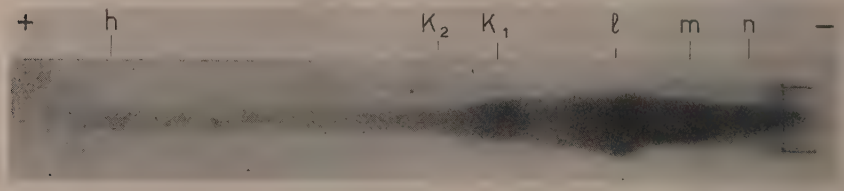


Fig. 1.

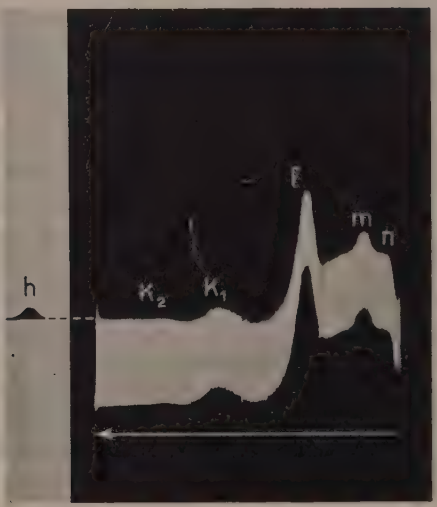


Fig. 1 *a*. – Elettroforesi per 15.900″ a 6.48 V/cm.

per una durata di circa 20 ore. Di ogni estratto si è eseguita contemporaneamente una normale elettroforesi in fase libera, servendoci di un apparecchio *Tiselius 38* della Perkin Elmer con cella di cm³ 2, seguendo l'andamento della separazione soltanto nel braccio ascendente.

RISULTATI: 1° *Estratti a bassa forza ionica.*

(Estrazione: 1 g di polpa muscolare si estrae con cc. 1,5 di Na_2HPO_4 NaH_2PO_4 di f.i. 0,10 e pH 7,7. Dialisi: per 48 ore con Na_2HPO_4 NaH_2PO_4 di f.i. 0,10 e pH 6,8).

(4) M. DUBUISSON, « Biol. Review », *25*, 46 (1950).
(5) P. CREPAX, « Biochim. Biophys. Acta », *7*, 87 (1951).

Le macchie che si identificano sulla carta corrispondono per numero, posizione e intensità ai « picchi » identificabili nel proteinogramma in fase libera (Fig. 1 e 1 *a*).

2° *Estratti a forza ionica elevata.*

A) (Estrazione: 1 g di polpa muscolare si estrae con cc. 2 di soluzione di Weber–Edsall: KCl 0,6 M; Na_2CO_3 0,01 M; $NaHCO_3$ 0,04 M.

Fig. 2.

Fig. 2 *a*. – Elettroforesi per 33.000″ a 4,42 V/cm.

La f.i. è 0,67; il pH 8,6. Durata dell'estrazione: 10′. Prima di centrifugare si aggiungono 3 volumi di soluzione di W.–E. Dialisi: per 48 ore in: Na_2HPO_4-0,032 M; NaH_2PO_4 0,004 M; NaCl 0,25 M. La f.i. è 0,35 e il pH 7,1) (Fig. 2 e 2 *a*).

Si osserva che sulla carta la macchia della miosina α è da noi indicata *dietro* quella della miosina β, mentre nel proteinogramma in fase libera la miosina α si trova davanti, in posizione regolare. Ci siamo resi conto di questo fatto eseguendo le prove successive con estrazioni di durata maggiore,

in cui è possibile seguire l'aumento di miosina α (actomiosina) e la parallela diminuzione di miosina β (miosina).

B) (Estrazione: come sopra. Durata: 4 ore. Prima della centrifugazione si aggiungono 5 volumi di soluzione di W.–E. Dialisi: come sopra) (Fig. 3 e 3 *a*).

Fig. 3.

Fig. 3 *a*. – Elettroforesi per 25.200″ a 4,42 V/cm.

La macchia della miosina α è cresciuta d'intensità mentre si è ridotta quella della miosina β; tali variazioni corrispondono a quelle dei rispettivi « picchi » nel proteinogramma in fase libera.

C) (Estrazione: come sopra. Durata 24 ore. Prima della centrifugazione si aggiungono 7 volumi di soluzione di W.–E. Dialisi: come sopra) Fig. 4 e 4 *a*).

Sia dal proteinogramma su carta che da quello in fase libera risulta chiaramente come la miosina β sia praticamente assente, essendosi trasformata in miosina α; la quantità di quest'ultima è assai alta, tenendo conto anche della forte diluizione dell'estratto.

In tutte le prove eseguite è stato notato il fatto che la miosina α (actomiosina) non si è mossa affatto dal punto in cui è stata deposta. Questo comportamento può avere una spiegazione nel fatto che una soluzione di actomiosina è in realtà un gel liquido in cui i filamenti di actomiosina si intrecciano a formare una rete continua [6]. È pertanto molto probabile che

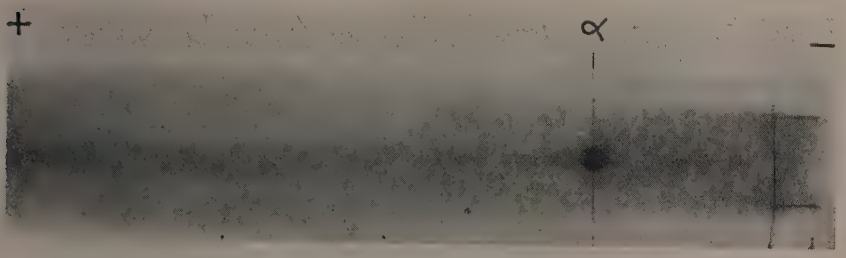


Fig. 4.

Fig. 4 *a*. – Elettroforesi per 11.100" a 4,42 V/cm.

tale proteina non riesca a spostarsi, sotto l'azione del campo elettrico, attraverso la fitta trama delle fibre di cellulosa della carta.

6) A. SZENT GYORGYI, *Chemistry of Muscular Contraction*, p. 34, Academic Press, New York, 1951.

Chimica. — *Ricerche polarografiche su soluzioni in ammoniaca anidra a temperatura ambiente e pressione normale (soluzioni di Divers)* (*). Nota di ENRICO VECCHI, presentata (**) dal Corrisp. G. SEMERANO.

In questi ultimi anni vanno assumendo importanza sempre crescente le ricerche polarografiche in ambiente non acquoso: come solventi sono stati volta a volta impiegati acido acetico, glicole etilenico, alcol metilico, etilico, acetone, ecc. [1].

Di particolare interesse sono state le ricerche di Laitinen e Collaboratori [2, 3, 4, 5, 6] eseguite in ammoniaca liquida. Questi Autori, prendendo lo spunto dall'impiego fatto da Murtazaev [7] di un elettrodo a goccia di mercurio per la determinazione di curve elettrocapillari di diversi sali in ammoniaca liquida, iniziarono nel 1948 uno studio polarografico sulla riduzione di ioni alcalini in analogo ambiente [2]; seguirono poi le ricerche sull'elettrodo « ad elettroni » [3], sul comportamento polarografico dei metalli alcalino-terrosi [4], sull'ossidazione del mercurio [5] e sulla riduzione di tallio, rame, ammonio e ossigeno [6].

In tale genere di ricerche il maggiore inconveniente sperimentale è costituito dalla bassa temperatura di ebollizione dell'ammoniaca; essa costringe ad eseguire le misure a ca. — 36° C, cioè a temperature molto prossime a quella di solificazione del materiale costituente l'elettrodo, a meno di non lavorare sotto pressione. Trascurando però questa possibilità, per ovvie ragioni di praticità, bisogna necessariamente impiegare il mercurio in condizioni così critiche da non escludere le complicazioni derivanti dalla struttura pseudo-cristallina del mercurio stesso [8].

È noto tuttavia, in base alle esperienze di Divers [9], che le soluzioni di nitrato di ammonio in ammoniaca liquida esistono anche a temperature maggiori di 0° C; anzi, per la loro preparazione, non è neppure necessario liquefare l'ammoniaca e poi sciogliervi il nitrato ammonico, ma è sufficiente far passare l'ammoniaca gassosa secca sul sale pure secco, per ottenere a temperatura ambiente una soluzione limpida e incolora.

Il fenomeno è stato paragonato alla deliquescenza di un sale e diverse ricerche, per lo più qualitative, sono state eseguite parecchi anni fa su tali soluzioni [10]: in particolare ne sono state esaminate le proprietà chimiche ed il potere solvente.

Le conclusioni tratte da queste ricerche pongono in luce il notevole parallelismo esistente, per le proprietà chimiche, fra le soluzioni di Divers e le soluzioni di nitrato ammonico in ammoniaca liquida, e, per il potere solvente, tra le soluzioni di Divers e l'ammoniaca liquida sotto pressione [11].

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica-Fisica dell'Università e Centro di Polarografia del C. N. R., Padova.

(**) Nella seduta del 14 febbraio 1953.

La considerazione di queste proprietà mi ha suggerito di esaminare il comportamento polarografico di sostanze riducibili in tali soluzioni; sui primi risultati, necessariamente orientativi, riferisco in questa Nota.

PARTE SPERIMENTALE. — Il polarografo impiegato era un Sargent mod. XXI, la cui taratura era stata accuratamente controllata [12].

La cella polarografica è analoga a quella descritta da Laitinen e Nyman [5], con il tubo laterale, per l'ingresso dell'ammoniaca, prolungato fino a sfiorare il mercurio anodico; tale tubo serviva sia per l'introduzione della soluzione, sia per l'agitazione della stessa effettuata mediante corrente di ammoniaca gassosa, onde facilitare la soluzione dei sali riducibili già presenti in cella.

Il capillare aveva le seguenti caratteristiche: periodo di gocciolamento 3,62 s con una colonna di 60 cm di mercurio (misurato in soluzione ammoniacale a circuito aperto). La m misurata in aria valeva 1,950 $mg \cdot s^{-1}$. A titolo di confronto, il periodo di gocciolamento misurato in acqua a circuito aperto era 3,29 s.

Tutte le esperienze sono state eseguite a temperatura ambiente senza l'impiego di termostato (16–18° C).

L'ammoniaca, prelevata allo stato gassoso da una bombola, veniva seccata su idrato sodico e usata come tale senza ulteriore purificazione.

Il nitrato di ammonio impiegato era un prodotto Merck, puro per analisi, che era stato seccato per parecchi giorni a 110° C.

L'ammoniaca gassosa veniva fatta passare in un palloncino contenente il nitrato ammonico fino a formazione di soluzione limpida e incolora. Si prelevava quindi un volume noto (5 cm^3) di tale soluzione e si trasferiva in cella dove era già presente una quantità pesata del composto in esame; dopo aver atteso un tempo sufficiente ad assicurare l'omogeneità della soluzione, veniva registrata la curva polarografica. Si facevano quindi aggiunte successive di volumi noti di soluzione base (5 cm^3), per realizzare concentrazioni via via decrescenti della specie studiata.

Tutte queste operazioni venivano effettuate fuori dal contatto dell'aria ed in corrente di ammoniaca, sia per eliminare l'ossigeno, sia per impedire l'evaporazione di ammoniaca dalla soluzione e la conseguente formazione di una pellicola superficiale di nitrato ammonico che disturba i trasferimenti della soluzione da un recipiente all'altro.

Non è detto però che la formazione di questa pellicola sia sempre nociva; una volta formata, essa impedisce l'ulteriore perdita di ammoniaca e la conseguente separazione del nitrato ammonico. Ciò può essere utile allorché si desideri lavorare con la cella aperta all'aria.

La curva registrata in assenza di depolarizzatori è risultata perfettamente normale e con un campo utile di potenziale di ca. — 1,2 V rispetto all'anodo interno; non è tuttavia da escludere che tale campo possa essere ulteriormente ampliato impiegando al posto del nitrato ammonico altri sali che siano « deliquescenti » in ammoniaca.

I risultati che vengono qui riferiti sono relativi a misure effettuate sugli ioni di piombo e di cadmio, sia da soli che contemporaneamente presenti.

Le curve si presentano perfettamente regolari e senza massimi di corrente: i gradini si sviluppano completamente in un intervallo di potenziale così ristretto da giustificare l'ammissione di una riduzione reversibile.

Per quel che riguarda il valore dei potenziali di semigradino, esso è per ora puramente orientativo, data la notevole variabilità del potenziale dell'anodo di mercurio: per il piombo e per il cadmio è risultato rispettivamente — 0,30 e — 0,70 V.

La corrente di diffusione è rigorosamente proporzionale alla concentrazione: a titolo di esempio riporto nelle seguenti tabelle i risultati ottenuti per il cadmio da solo e per il piombo ed il cadmio contemporaneamente presenti.

TABELLA I.

$CdSO_4$: *concentrazione iniziale* $1{,}15 \cdot 10^{-3}$ M.

Esperienza N.	Volume totale (cm^3)	i_d (μA)	i_d/c ($\mu A/mM$)
1	5	4,09	3,56
2	10	2,06	3,58
3	15	1,37	3,57
4	20	1,03	3,58
		Media . . .	3,57 ± 0,01

TABELLA II.

$Pb(NO_3)_2$: *concentrazione iniziale* $1{,}33 \cdot 10^{-3}$ M.
$CdSO_4$: » » $0{,}76 \cdot 10^{-3}$ M.

Esperienza N.	Volume tolale (cm^3)	Piombo		Cadmio	
		i_d (μA)	i_d/c ($\mu A/mM$)	i_d (μA)	i_d/c ($\mu A/mM$)
5	5	6,12	4,60	2,73	3,59
6	10	3,07	4,62	1,33	3,50
7	15	2,07	4,67	0,90	3,55
8	20	1,56	4,69	0,67	3,52
		Media . . .	4,64 ± 0,04		3,54 ± 0,03

In accordo con i dati della letteratura [13], il gradino del piombo è, a parità di concentrazione, maggiore di quello del cadmio.

È stata misurata inoltre la resistenza della soluzione con il metodo di Semerano [14]: essa è risultata di ca. 350 ohm.

Un particolare comportamento presenta il periodo di gocciolamento che è quasi costante in tutto l'intervallo di potenziale (3,61 ± 0,03 s).

I risultati soddisfacenti ottenuti in queste prime misure mi suggeriscono di iniziare ricerche sistematiche in questo ambiente apportando all'apparecchiatura quelle modifiche che si sono rivelate necessarie. Di particolare importanza è la risoluzione del problema dell'elettrodo di confronto, onde poter fissare valori precisi di potenziale.

I risultati già ottenuti da Laitinen e Collaboratori in ammoniaca liquida, uno dei quali relativo all'ossigeno a 0° C in presenza di una elevata concentrazione di sale ammonico, e gli studi fondamentali della scuola russa [15] sull'elettrochimica in ammoniaca liquida e sui rapporti con l'elettrochimica in ammoniaca acquosa, mi rassicurano sulla possibilità di ottenere dati di un preciso significato teorico e di un'importanza pratica che non ha bisogno di ulteriori illustrazioni.

Ringrazio vivamente la dott.ssa Elena Gagliardo che ha collaborato nell'esecuzione delle misure descritte in questa Nota preliminare.

BIBLIOGRAFIA.

[1] D. MACGILLAVRY, « Trans. Faraday Soc. », *32*, 1447 (1936); G. B. BACHMAN e M. J. ASTLE, « J. Am. Chem. Soc. », *64*, 1303, 2177 (1942); C. H. R. GENTRY, « Nature », *157*, 479 (1946); L. RICCOBONI e P. POPOFF, « Gazz. chim. ital. », *79*, 573 (1949); P. ARTHUR e H. LYONS, « Anal. Chem. », *23*, 1891 (1951); *Ibid.* *24*, 1422 (1952); M. E. RUNNER, « J. Am. Chem. Soc. », *74*, 3567 (1952); A. A. VLCEK, « Chem. Listy », *45*, 297, 377 (1951); *Ibid.*, *46*, 258 (1952); S. WAWZONEK e M. E. RUNNER, « J. Electrochem. Soc. », *99*, 457 (1952).

[2] H. A. LAITINEN e C. J. NYMAN, « J. Am. Chem. Soc. », *70*, 2241 (1948).

[3] H. A. LAITINEN e C. J. NYMAN, « J. Am. Chem. Soc. », *70*, 3002 (1948).

[4] C. J. NYMAN, « J. Am. Chem. Soc. », *71*, 3914 (1949).

[5] H. A. LAITINEN, e C. E. SHOEMAKER, « J. Am. Chem. Soc. », *72*, 663 (1950).

[6] H. A. LAITINEN e C. E. SHOEMAKER, « J. Am. Chem. Soc. », *72*, 4975 (1950).

[7] A. MURTAZAEV, « Acta Physicochim. U.R.S.S. », *12*, 225 (1940).

[8] H. MENKE, « Z. Physik », *33*, 593 (1932); R. N. BOYD e H. R. R. WAKEHAM, « J. Chem. Phys. », *7*, 958 (1939).

[9] E. DIVERS, « Philosophic. Transact. of Roy. Soc. of London », *163*, 359 (1873).

[10] E. DIVERS, « Chem. News », *27*, 37 (1873); *Ibid.*, *28*, 278 (1873); « Compt. Rend. », *77*, 783 (1873); « Z. Physik. Chem. », *26*, 430 (1898).

[11] J. BRONN, *Verflüssigtes Ammoniak als Lösungsmitel Springer Verlag*. Berlino 1905, p. 37.

[12] E. VECCHI, « Suppl. alla Ricerca sci. », 1952, p. 67.

[13] J. J. LINGANE, « Chem. Revs. », *29*, 1 (1951); J. J. LINGANE, « Ind. Eng. Chem., Anal. Ed. », *15*, 583 (1943).

[14] G. SEMERANO, « Gazz. chim. ital. », *62*, 518 (1932).

[15] V. A. PLESKOW e A. M. MONOSSOHN, « Acta Physicochim. U.R.S.S. », *1*, 713, 871 (1935); *Ibid.*, *2*, 615, 621 (1935); *Ibid.*, *11*, 305 (1939); V. A. PLESKOW, « Acta Physicochim. U.R.S.S. », *6*, 1 (1937); *Ibid.*, *21*, 235 (1946).

Microcoulombometria. — *Coulombometria di sostanze gassose* (*). Nota III di Antonio Corbellini e Pietro Lanza, presentata (**) dal Corrisp. G. Semerano.

I buoni risultati ottenuti nella determinazione di n in un processo di riduzione polarografico mediante l'impiego del nuovo procedimento microcoulombometrico, descritto in due Note precedenti (1), ci ha suggerito di estenderlo allo studio di sostanze gassose.

Il procedimento si basa sulla misura della velocità di diminuzione dell'altezza di un gradino polarografico nel corso di una riduzione elettrolitica. Con semplice calcolo si dimostra che la valenza di un processo è ricavabile mediante l'impiego dell'espressione:

$$n = -\frac{K}{2{,}303\,Fv} \cdot \frac{dt}{d \lg i_d}$$

dove $K = \frac{i_d}{c}$, i_d è l'intensità della corrente di diffusione della sostanza interessata espressa in Ampere, c la concentrazione della sostanza riducibile espressa in mole/litro, F il faraday, v il volume della soluzione sottoposta a elettrolisi espresso in litri, t il tempo di elettrolisi espresso in secondi.

Il valore del rapporto $\frac{dt}{d \lg i_d}$, si ricava da un diagramma $\lg i_d/t$.

L'applicazione del metodo richiede l'uso di una cella di capacità sufficientemente piccola (non più di 0,5 cm^3) e di forma tale da consentire la disareazione del liquido, un completo riempimento, in modo da escludere la presenza di qualsiasi bolla gassosa a contatto della soluzione in esame e un'agitazione della soluzione sufficiente a garantire l'omogeneità per tutto il corso dell'elettrolisi.

L'apparecchiatura descritta è risultata soddisfacente alle esigenze richieste ed ha permesso di ottenere risultati attendibili e riproducibili nello studio coulombometrico dell'ossigeno e dell'ossido di azoto.

Apparecchiatura. – La cella impiegata è illustrata dalla fig. 1. Un tubetto di vetro (a) di diametro interno leggermente maggiore di quello del capillare a 3 goccie [ved. Nota I] è saldato al capillare stesso con del balsamo del canadà in modo che la parte sporgente costituisca un recipiente della capacità di ca. 2 cm^3. Un volume noto di soluzione base (0,2 ÷ 0,4 cm^3) viene introdotto in questo recipiente che si chiude con un capillare opportunamente sagomato (b) di 0,5 mm di luce (fig. 2) unito alla cella mediante un giunto di vipla.

Per disareare la soluzione e saturarla col gas in esame ci si serve del dispositivo illustrato in fig. 1$_2$: un tubo a T (c) nel cui braccio più lungo

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica Fisica e Centro di Polarografia del C.N.R. di Padova.

(**) Nella seduta dell'8 novembre 1952.

(1) Questi «Rendiconti», Nota I, vol. XIII, fasc. 6, pp. 406–411 (1952) e Nota II, vol. XIV, fasc. 1, pp. 65–69 (1953).

viene introdotto un tubetto tirato a capillare sottile (*d*) a tenuta di gas a mezzo di un giunto di gomma (*e*) lubrificato con glicerina.

La cella viene disposta in maniera che il gas entrando da (*d*) gorgogli nella soluzione per poi uscire da (*c*) la cui tenuta è garantita da una chiusura idraulica (non rappresentata in figura).

Si disarea prima per pochi minuti e poi si satura col gas in esame. A saturazione compiuta, si estrae *b* fino a ritirarlo completamente nel tubo a T e si apre il rubinetto della riserva di mercurio che uscendo dai 3 capillari catodici riempie il fondo della cella.

Quando la soluzione sospinta dal mercurio raggiunge il capillare *b* (fig. 1_1), si capovolge la cella sfruttando la flessibilità del tubetto di vipla (*v*). Staccata ora la cella da (*v*), la si introduce in un bicchiere pieno di mercurio e, tenendovela immersa, si provvede a liberarla dal capillare di chiusura, *b*. Si introduce quindi nella cella dal di sotto un ponte ad agar che si collega con un elettrodo a calomelano (fig. 1_3).

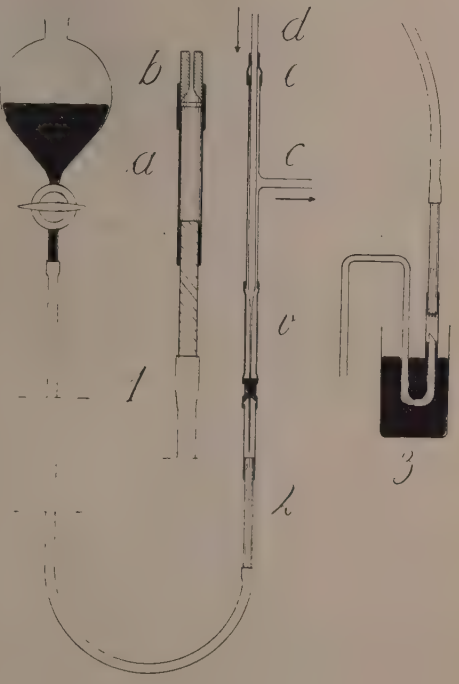


Fig. 1.

PARTE SPERIMENTALE.

Microcoulombometria dell'ossigeno. – È stato preso in esame inizialmente l'ossigeno con il quale le difficoltà tecniche sono evidentemente molto ridotte. Come soluzione base si è impiegato nitrato sodico N/1 per il quale la concentrazione di ossigeno in equilibrio con l'aria, alla pressione di un'atmosfera, è di $2{,}05 \cdot 10^{-4}$ m/l.

La microcoulombometria eseguita ai potenziali delle correnti di diffusione del primo e del secondo gradino di diffusione dell'ossigeno, rispettivamente ai potenziali di — 0,6 V e — 1.44 V (E.C.S.), su 0,3 cm^3 di soluzione, ha dato i valori di 2, 2,1 per il primo e 4,04 e 3,95 per il secondo gradino in successive esperienze.

Nelle tabella I e II sono riportati i valori relativi alla prima esperienza rispettivamente per il primo e secondo gradino dell'ossigeno. Nel diagramma è illustrato l'andamento di lg i_d in funzione del tempo per i valori della tabella I e II (fig. 2).

TABELLA I e II.

t (sec)	i_d(Amp)	log i_d
0	1,297 · 10—5	$\bar{5}$,1129
50	1,231 ·	,0902
100	1,162 ·	,0652
150	1,109 ·	,0449
200	1,047 ·	,0199
250	0,995 ·	$\bar{6}$,9978
300	0,944 ·	,9749
350	0,891 ·	,9498
400	0,848 ·	,9284
450	0,806 ·	,9063
500	0,752 ·	,8762

t (sec)	i_d(Amp)	log i_d
0	3,091 · 10—5	$\bar{5}$,4901
50	2,901 ·	,4625
100	2,711 ·	,4331
150	2,547 ·	,4060
200	2,388 ·	,3780
250	2,239 ·	,3500
300	2,097 ·	,3215
350	1,961 ·	,2925

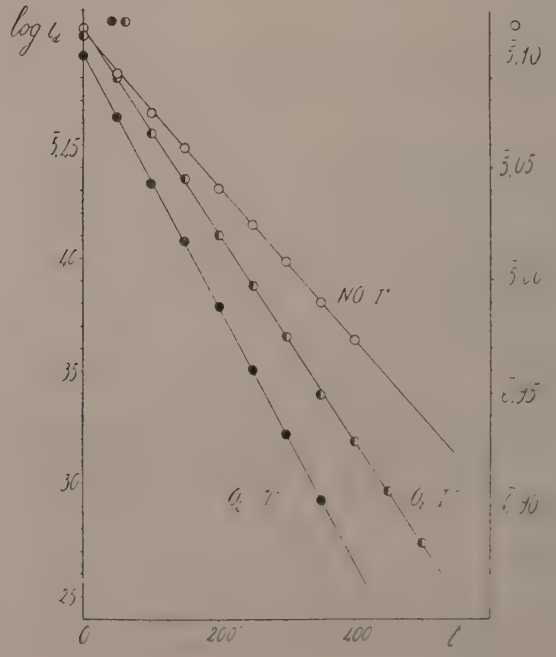


Fig. 2.

Nella fig. 3 è riportato un diagramma corrente/tempo registrato al polarografo. In esso le linee verticali rappresentano intervalli di tempo di 50" e la linea orizzontale rappresenta il valore della corrente residua (i_r) sempre notevole con questi capillari a più gocce.

Notizie più dettagliate sono esposte nella Nota precedente.

Coulombometria dell'ossido di azoto. – È stato preso quindi in esame l'ossido di azoto la cui coulombometria è stata eseguita col metodo classico di Lingane da L. Riccoboni, P. Lanza e P. Favero.

TABELLA III.

t (sec)	i_d(Amp)	log i_d
0	3,148·10−5	5.4980
50	3,034·	,4820
100	2,914·	,4645
150	2,808·	,4484
200	2,694·	,4304
250	2,600·	,4149
300	2,504·	,3986
350	2,399·	,3800
400	2,309·	,3634

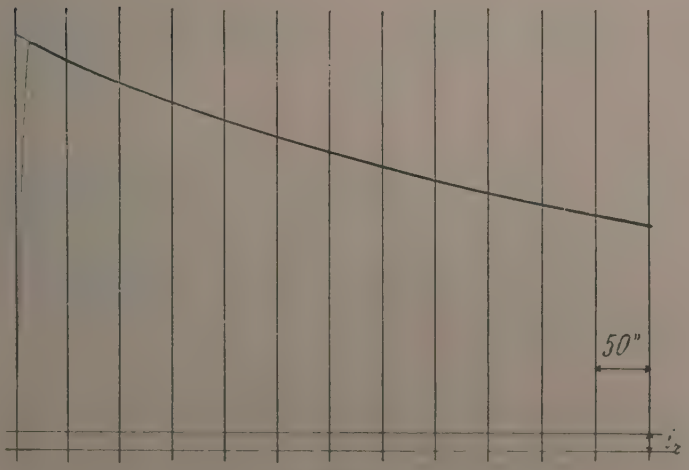


Fig. 3

Come soluzione base venne impiegato tampone all'acetato a pH 4,6 (acido acetico 0,2 N + acetato sodico 0,2 N). In tre successive esperienze, eseguite al potenziale di 0,80 V (E.C.S.), impiegando rispettivamente 0,25; 0,29; 0,29 cm³ di soluzione, essendo la concentrazione $1,5 \cdot 10^{-3}$ Mol/l. si sono ottenuti i valori di: 1,02; 1,03; 0,98. In tabella III sono riportati i dati relativi alla prima esperienza; il diagramma della fig. 2 illustra l'andamento di log i_d in funzione del tempo.

Conclusioni. – Dai due esempi riportati risulta come il procedimento proposto consenta una buona precisione anche nella valutazione di n di sostanze gassose con una apparecchiatura che può essere facilmente allestita in un qualsiasi laboratorio polarografico.

Data la forma particolarmente semplice della cella, non sono necessari speciali accorgimenti per garantire l'omogeneità della soluzione essendo a ciò sufficiente l'agitazione provocata dalle goccie cadenti.

Per quanto riguarda infine i risultati della coulombometria dell'ossido di azoto è opportuno ricordare come essi siano in ottimo accordo con quelli già ottenuti in questo Istituto nelle ricerche in precedenza citate e il meccanismo di riduzione allora proposto riceve da questo lavoro un'ulteriore conferma.

Geochimica. — *La ripartizione degli elementi fra fase silicata e metallica nelle meteoriti ed il calore di formazione degli ossidi.* – II. *Forma della relazione fra* log K *e* ΔI_o (*). Nota di Franco Tonani, presentata (**) dal Socio G. Carobbi.

In una Nota precedente (1) ho rilevato i rapporti fra la classificazione geochimica degli elementi (costruita in base alle affinità geochimiche) ed il fatto che sia stata introdotta una relazione di forma definita tra log K e ΔI_o, quale il Brown ed il Patterson hanno stabilito indipendentemente da ogni considerazione geochimica.

Verrà qui svolto il calcolo connesso con il problema dell'esistenza di una relazione di tipo definito fra la costante di ripartizione degli elementi tra fase metallica e fase silicata delle meteoriti da un lato, ed il calore di formazione degli ossidi degli elementi stessi dall'altro. Nella decisione relativa a tale problema sono implicite la definizione della forma di detta relazione, la stima del valore dei parametri che vi compaiono e la conoscenza dell'incertezza di tale stima.

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Mineralogia e Geochimica della Università di Firenze. Centro di studio per la geochimica del C.N.R.

(**) Nella seduta del 13 dicembre 1952.

(1) « Rend. Accad. Naz. Lincei », vol. XIII, fasc. 5, pp. 269–275 (1952).

Ho accettato a questo scopo i dati empirici raccolti dal Brown e dal Patterson senza introdurre alcuna variazione, anche perchè è interessante che restino sottolineate le conseguenze di un diverso trattamento degli stessi dati; però è probabile che le informazioni disponibili abbiano a subire una certa evoluzione, specie per ciò che concerne le misure termochimiche.

Si può considerare come stabilito intuitivamente già nella esistente letteratura geochimica, il fatto che $\log K$ e ΔI_o non sono indipendenti. Quanto alla forma di una relazione tra $\log K$ e ΔI_o, una volta che se ne sia introdotta l'idea, è in fin dei conti inutile prendere in considerazione le ipotesi che si possono già scartare intuitivamente alla vista del diagramma dei punti sperimentali nel piano ($\log K$, ΔI_o). Tale diagramma mostra che le deviazioni più pronunciate da una retta sono eventualmente due inflessioni simmetriche rispetto ad un tratto rettilineo centrale ed al baricentro della distribuzione dei punti, pressappoco come è stato indicato anche dal Brown e dal Patterson nel loro lavoro già citato. Il Brown ed il Patterson ritennero che una curva ad S rappresentasse le osservazioni meglio di una retta, e che ciò fosse dovuto all'effetto della pressione. Poichè non vi è motivo apparente che la pressione produca un effetto dipendente dal valore di ΔI_o, e per di più maggiore per valori di ΔI_o alquanto più grandi o alquanto più piccoli di un valore intermedio fra gli estremi osservati, sembra piuttosto lecito considerare la possibilità che si tratti di un effetto della mutua solubilità delle fasi metallica e silicata, o almeno del mutuo inquinamento all'atto della preparazione dei campioni per l'analisi.

Senza alterazioni essenziali si può ammettere che le frazioni di materiale inquinante nei due tipi di campioni, metallici e silicati, siano le medesime. Si ha allora per la costante di ripartizione *osservata* per un certo elemento l'espressione: $\log K = \log \frac{c_1 + ic_2}{c_2 + ic_1}$ in cui i è la frazione di materiale inquinante, e $\log \frac{c_1}{c_2}$ è la costante di equilibrio *vera* che compare nella relazione:

$$\log K = \frac{0{\cdot}43}{RT} \Delta I_o . \qquad (1)$$

Da ora in poi ci riferiremo soltanto alla costante osservata; sviluppandone l'espressione in serie di potenze di $\log \frac{c_1}{c_2}$, e tenendo conto del fatto che il baricentro dei punti sperimentali si trova abbastanza vicino al centro del tratto rettilineo, si possono rappresentare gli scarti di $\log K$ dalla media in funzione degli scarti di ΔI_o dalla media nel modo seguente:

$$y \simeq x - \left(\frac{0{\cdot}43}{RT}\right)^2 \cdot \frac{i}{3(1+i)^2} x^3 \qquad (2)$$

dove y ed x sono gli scarti dalla media di $\log K$ e ΔI_o rispettivamente.

TABELLA I.

Elementi	ΔI_o	Log K	$\Delta I_o \cdot \log K$	$(\text{Log K})^2$	$(\Delta I_o)^2$
Ca	86.3	2.447	211.0	5.988	7.448
Mg	78.3	3.544	276.5	12.567	6.131
Al	67.3	3.491	235.0	12.188	4.529
Ti	43.3	1.832	79.3	3.356	1.875
V	39.3	1.740	68.4	3.028	1.544
Si	35.3	2.255	79.6	5.085	1.246
Mn	25.1	1.845	46.3	3.404	630
Cr	23.6	1.944	45.9	3.779	557
Zr	23.6	1.929	45.6	3.724	557
Zn	19.3	0.653	12.6	0.426	372
Sn	4.1	— 0.569	— 2.3	0.324	17
Fe	0.0	0.0	0.0	0.0	0
Mo	0.0	0.0	0.0	0.0	0
Ni	— 7.8	— 0.509	4.0	0.259	61
Co	— 8.2	— 0.658	5.5	0.446	67
Pb	— 13.2	— 0.585	8.7	0.342	174
Cu	— 30.7	— 1.444	44.4	2.085	942
Pt	— 48.7	1.538	74.9	2.366	2.372
TOTALI	336.9	16.367	1.235.4	59.367	28.523
medie	18.7	0.909	68.6	3.298	1.585
Prodotti e quadrati delle medie			17.0	0.826	350
			51.6	2.472	1.234

TABELLA II.

(ΔI_o^3)	$(\Delta I_o)(\Delta I_o^3)$	$\text{Lg K} \cdot (\Delta I_o^3)$	$(\Delta I_o^3)^2$
643 $\cdot 10^3$	555 $\cdot 10^5$	1.573 $\cdot 10^3$	413 $\cdot 10^9$
480 $\cdot 10^3$	376 $\cdot 10^5$	1.701 $\cdot 10^3$	230 $\cdot 10^9$
305 $\cdot 10^3$	205 $\cdot 10^5$	1.064 $\cdot 10^3$	92.9 $\cdot 10^9$
81.2 $\cdot 10^3$	35.1 $\cdot 10^5$	149 $\cdot 10^3$	6.59 $\cdot 10^9$
60.7 $\cdot 10^3$	23.8 $\cdot 10^5$	254 $\cdot 10^3$	3.68 $\cdot 10^9$
44.0 $\cdot 10^3$	15.5 $\cdot 10^5$	99.2 $\cdot 10^3$	1.93 $\cdot 10^9$
15.8 $\cdot 10^3$	3.97 $\cdot 10^5$	29.2 $\cdot 10^3$	0.250 $\cdot 10^9$
13.1 $\cdot 10^3$	3.10 $\cdot 10^5$	25.6 $\cdot 10^3$	0.128 $\cdot 10^9$
13.1 $\cdot 10^3$	3.10 $\cdot 10^5$	25.4 $\cdot 10^3$	0.128 $\cdot 10^9$
7.19 $\cdot 10^3$	1.39 $\cdot 10^5$	4.7 $\cdot 10^3$	0.0517 $\cdot 10^9$
0.0689 $\cdot 10^3$	0.003 $\cdot 10^5$	— 0.04 $\cdot 10^3$	0.000005 $\cdot 10^9$
—	—	—	—
—	—	—	—
— 0.474 $\cdot 10^3$	0.037 $\cdot 10^5$	0.241 $\cdot 10^3$	0.000225 $\cdot 10^9$
— 0.551 $\cdot 10^3$	0.045 $\cdot 10^5$	0.363 $\cdot 10^3$	0.000304 $\cdot 10^9$
— 2.30 $\cdot 10^3$	0.303 $\cdot 10^5$	1.35 $\cdot 10^3$	0.00529 $\cdot 10^9$
— 28.9 $\cdot 10^3$	8.88 $\cdot 10^5$	41.8 $\cdot 10^3$	0.837 $\cdot 10^9$
— 115 $\cdot 10^3$	56.2 $\cdot 10^5$	178 $\cdot 10^3$	13.3 $\cdot 10^9$
1810.6 $\cdot 10^3$	1.287.3 $\cdot 10^5$	5.146 $\cdot 10^3$	763.42 $\cdot 10^9$
100.59 $\cdot 10^3$	71.5 $\cdot 10^5$	286 $\cdot 10^3$	42.41 $\cdot 10^9$
—	18.8 $\cdot 10^5$	91 $\cdot 10^3$	10.12 $\cdot 10^9$
—	52.7 $\cdot 10^5$	194 $\cdot 10^3$	32.29 $\cdot 10^9$

I dati della Tabella I sono quelli riportati dal Brown e dal Patterson (punti nel diagramma di figura 1); da essi si calcola il coefficiente di correlazione lineare $r = \frac{51.61}{55.22}$, $r = 0.935$.

I seguenti valori non compaiono nel calcolo, e nella figura 1 son rappresentati da ($_1$): $\Delta I_o = 19$, log K = 0.585 (fosforo); — 14 e — 0.407 (arsenico); — 11 e — 0.45 (antimonio); 22 e 1,1 (niobio).

Le costanti di ripartizione per questi quattro elementi sono desunte da Noddack, già citato da Brown e Patterson; i calori di formazione sono ottenuti da quelli degli acidi per il fosforo, e son quelli dell'ossido in cui compaiono con la minore valenza per gli altri tre. I dati sperimentali per tale calcolo sono estratti da Pascal (*Traité de Chimie Minérale*, voll. III e IV Parigi 1932-33).

In altre parole si suggerisce di interpolare sui punti sperimentali una relazione della forma

$$y = ax + bx^3 \tag{3}$$

il cui significato fisico è indicato dalla (1) per il termine di primo grado e dalla (2) per quello di terzo ove si accolga il meccanismo dell'inquinamento; se questo meccanismo non si vuole accettare, basta osservare che, siccome il diagramma appare simmetrico rispetto al baricentro, ci si può limitare a considerare i termini dispari. La prova della forma della relazione

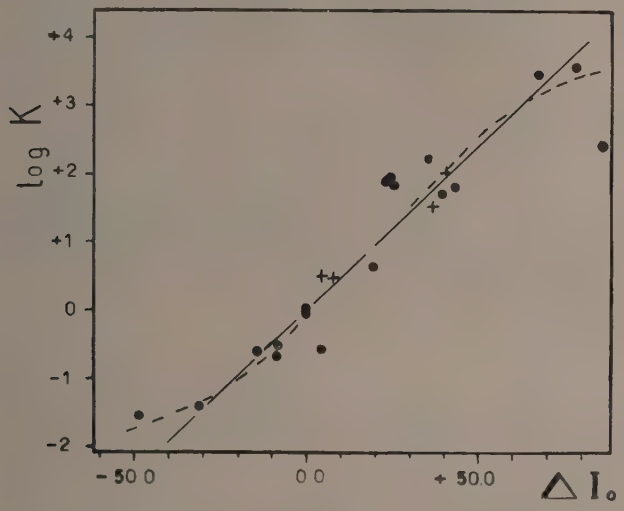


Fig. 1.

fra log K e ΔI_0 consiste nel verificare se i coefficienti della (3) differiscono significativamente da zero.

Per il calcolo di a e di b con il metodo dei minimi quadrati conviene procedere come se x^3 fosse una nuova variabile, e trattare la questione come la regressione lineare di y su due variabili; il calcolo è completamente riassunto nella tabella IV con i dati delle tabelle I e II. Mentre il coefficiente del termine di primo grado supera di alcune volte il suo errore standard, il coefficiente del termine di terzo grado è un po' inferiore al proprio. Risulta dunque preferibile l'ipotesi che il coefficiente del termine di terzo grado dell'espressione di log K per ΔI_0 sia nullo.

Vedendo la cosa sotto un altro punto di vista si può confrontare la varianza rispetto alla retta dei minimi quadrati, corrispondente all'ipotesi che valga una relazione come la (1), con la varianza rispetto ad una curva corrispondente alla relazione (3); il rapporto della prima alla seconda è 1,27, che non è significativo con i gradi di libertà del problema. La varianza

rispetto alla retta è desunta dal coefficiente di correlazione lineare (tabella III ottenuta con i dati di tabella I) la cui prova di significato trovasi nella tabella V.

Tabella III.

Calcolo del coefficiente di regressione lineare.

$$s^2 = y_i y_i (1 - r^2) \frac{n}{n-2} = 2{,}472\,(1 - 0{,}874)\,\frac{18}{16} = 0{,}350$$

$s = 0{,}592$ varianza attorno alla retta dei minimi quadrati.

$$a = \frac{51{,}61}{1234} \pm \frac{0{,}592}{\sqrt{1234}} = 4{,}18 \cdot 10^{-2} \pm 1{,}69 \cdot 10^{-2}$$ coefficiente angolare della retta dei minimi quadrati e sua varianza.

(Nella fig. 1 la retta di regressione è rappresentata a tratto continuo; i simboli delle tabelle sono quelli del testo, con la convenzione degli indici per la somma; le note formule per la varianza e per i coefficienti di regressione sono tratte rispettivamente da S. S. Wilks, *Mathematical Statistics*, Princeton 1944 (Cap. II, § 9) e da H. Jeffreys, *Theory of probability*. Oxford 1948 (Cap. III, § 3.5)).

Tabella IV.

Calcolo dei coefficienti di regressione non lineare.

$$\begin{cases} 1234 \cdot y_2 + 5269 \cdot 10^3 \cdot y_3 = 51{,}6 \\ 5269 \cdot 10^3 \cdot y_2 + 32294 \cdot 10^6 \cdot y_3 = 194{,}4 \cdot 10^3 \end{cases}$$ equazioni normali

$$y_3 = -2{,}643 \cdot 10^{-6} \pm \frac{s}{\sqrt{9797 \cdot 10^6}} \quad ; \quad y_2 = 5{,}309 \cdot 10^{-2} \pm \sqrt{26{,}713} \cdot 10^{-2} \cdot s$$

$$\frac{1}{n} S\left((y - ax - bx^3)^2\right) = y_i y_i - a x_i y_i - b x_i^3 y_i$$

$$= 2{,}472 - 51{,}6 \cdot 5{,}309 \cdot 10^{-2} + 194{,}4 \cdot 10^3 \cdot 2{,}643 \cdot 10^{-6}$$

$$= 0{,}246$$

$$s^2 = 0{,}295$$

$s = 0{,}543$ varianza residua sulla curva.

$$a = 5{,}309 \cdot 10^{-2} \pm 5{,}17 \cdot 10^{-2} \cdot 0{,}543 \quad ; \quad a = 5{,}309 \cdot 10^{-2} \pm 2{,}81 \cdot 10^{-2}$$

$$b = -2{,}643 \cdot 10^{-6} \pm 10{,}05 \cdot 10^{-6} \cdot 0{,}543 \quad ; \quad b = -2{,}643 \cdot 10^{-6} \pm 5{,}46 \cdot 10^{-6}$$

(Nella fig. 1 la curva di terzo grado è tratteggiata).

TABELLA V.

Riassunto del calcolo di t.

PROVA DELLA LEGGE LINEARE.

$t^2 = \frac{r^2}{(1-r^2)} \cdot (n-2)$, essendo $r = 0{\cdot}935$, $n = 18$ segue $t^2 = 111$ $t = 10{,}5$ con 16 g. l.

Questo coincide con la prova del coefficiente angolare:

$t = \frac{a\sqrt{(n-2)}}{s\sqrt{(x_i x_i/n)}}$ ed essendo $a = 4{,}18 \cdot 10^{-2}$, $n = 18$ $x_i x_i/n = 1234$ e lo scarto quadratico medio intorno alla retta $s = \sqrt{(y_i y_i/n)} \cdot (1-r^2)$, $s = 0{,}592$, dà:

$t = 9{,}9$ con 16 g. l.

La differenza indica l'effetto dell'approssimazione numerica usata nel calcolo di r da un lato, di a dall'altro.

PROVA DELLA LEGGE DI TERZO GRADO.

Per il coefficiente del termine lineare:

$t = \frac{5{,}31 \cdot 10^{-2}}{2{,}81 \cdot 10^{-2}} \sqrt{15}$ $\quad t = 7{,}3$ con 15 g. l. $(t^2 = 54)$.

Per il coefficiente del termine di terzo grado:

$t = \frac{2{,}64 \cdot 10^{-6}}{5{,}40 \cdot 10^{-6}} \sqrt{15}$ $\quad t = 1{,}9$ con 15 g. l. $(t^2 = 3{,}45)$.

Si può ritenere sostanzialmente provata l'esistenza di una relazione di tipo definito fra log K e ΔI_o nonostante che la distribuzione dei valori di log K si scosti dalla normalità, anche perché gli ulteriori dati riportati nella tabella I e segnati con croci nel diagramma, non compresi nel calcolo precedente, attenuano la disuniformità nella distribuzione di log K. La conclusione più ragionevole da trarre dai dati esistenti, che sono quelli riportati dal Brown e dal Patterson, è che vi sia una relazione lineare (del tipo della (1)) tra log K e ΔI_o. Si noti che l'effetto della non normale distribuzione di log K è di ridurre l'attendibilità dell'affermazione che i dati contengano qualcosa di più dell'indicazione che log K e ΔI_o non sono indipendenti, cioè della nomenclatura geochimica classica; invece si può escludere con una certa sicurezza che si debba ricorrere a relazioni più complicate della (1) suggerita per un sistema in equilibrio termodinamico.

Il controllo della linearità con un metodo sostanzialmente identico a quello del rapporto di correlazione di Kenney conferma tale risultato.

Microbiologia. — *Attività catalasica delle pettenkoferie da uretano* (*). Nota di GIUSEPPE PONTIERI, presentata (**) dal Corrisp. L. CALIFANO.

La normale morfologia della cellula bacterica subisce, in alcune circostanze, cospicue deviazioni, sia nel senso della lunghezza che dello spessore. Nel primo caso si ha la comparsa delle cosiddette forme filamentose, nel secondo quel grado assai più spinto di pleiomorfismo che consiste nella comparsa dei cosiddetti « large bodies » che, con denominazione più antica, si indicano come *pettenkoferie*, nome dato da Kuhn a tali formazioni in omaggio al Pettenkofer.

In ambedue i casi si ammette che si avveri disgiunzione tra crescita e divisione cellulare, in quanto mentre si avvera con ritmo più o meno normale la prima, la seconda è ritardata nel tempo o anche non si avvera affatto. Per le forme filamentose Hinshelwood (1) ha designato con la lettera L il fattore favorente l'allungamento, con D quello favorente la divisione ed ammette che i due fattori siano soggetti ad influenze molto specifiche.

Per il predominio del fattore L sul D hanno origine le forme filamentose.

Per quanto riguarda le pettenkoferie, dalle ricerche di Califano e Pontieri (2) è risultato che la diversità della forma è espressione della ineguale attività moltiplicativa dei vari nuclei che costituiscono una unità bacterica. Dalle ricerche di Robinow (3) e specialmente da quelle successive di Bisset (4) sappiamo che un bacillo adulto a lunghezza massima della specie non è già una cellula mononucleata ma che esso possiede due o quattro nuclei cioè è una entità morfologica che si risolve al primo processo moltiplicativo in due cellule mononucleate o in due cellule a due nuclei, ciascuna delle quali darà origine a due cellule mononucleate.

Naturalmente in una cultura ordinaria coesistono cellule ad un nucleo e sono quelle di più recente formazione insieme con entità a due e quattro nuclei. La interpretazione data da Califano e Pontieri parte da questa constatazione ed ammette che nelle pettenkoferie, a seconda del nucleo che entra in moltiplicazione, si genera la forma pleiomorfa.

Se è uno dei nuclei estremi a moltiplicarsi, si ha la forma a spermatozoo, se uno dei centrali ne deriva una formazione a clava, se i nuclei adiacenti si moltiplicano si ha la forma a palla.

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Microbiologia dell'Università di Napoli.

(**) Nella seduta del 13 dicembre 1952.

(1) C. N. HINSHELWOOD, *The chemical Chinetics of the bacterial cell*. Oxford, Clarendon Press, 1946.

(2) L. CALIFANO e G. PONTIERI, *Polimorfismo cellulare bacterico da uretano*. « Boll. Ist. Sier. Mil. », 30, 557 (1951).

(3) C. F. ROBINOW, *Nuclear apparatus and cell structure of rod-shaped bacteria*. Addendum in R. J. DUBOS, *The bacterial cell.*, Cambridge, Mass., 1947, p. 370.

(4) K. A. BISSET, *The citology and life. History of bacteria*. Edimburgh, Livingstone, L.T.D., 1950.

Ciò vale per tutte le forme che si possono osservare in quanto lo studio di esse ha dimostrato l'assoluta aderenza della morfologia della *pettenkoferia* alla avvenuta moltiplicazione nucleare onde il concetto che la *pettenkoferia* è il risultato della modellatura citoplasmatica su quella nucleare.

Nelle forme filamentose, invece, la moltiplicazione nucleare avviene per tutti i nuclei ed è ben dimostrato che i filamenti risultano costituiti da nuclei allineati lungo l'asse maggiore del filamento onde si può dire che è solo impedita la divisione del citoplasma e delle sue membrane mentre quella nucleare procede normalmente.

Riportandosi al concetto di Hinshelwood bisognerebbe pertanto riconoscere due fattori D uno nucleare ed uno citoplasmatico. Nelle forme filamentose si ha predominio del fattore L sul D citoplasmatico ma non su quello nucleare e pertanto i nuclei si dividono ma non possono formarsi cellule bacteriche.

Nei *large bodies*, invece, si ha predominio del D nucleare sia sul fattore L che su quello D citoplasmatico, però non per tutti i nuclei si avvera ciò, ma solo per alcuni. Ne risulta che la formazione cellulare si accresce poco nel senso della lunghezza e molto nello spessore, limitatamente però a quel nucleo o a quei pochi nuclei dove il fattore D nucleare è prevalente, e così si genera la difformità.

Se questo modo d'interpretare la morfogenesi delle *pettenkoferie* e delle forme filamentose sia esatto dirà l'indagine futura. Certo è che va ricercata la natura ed il meccanismo d'azione dei due fattori, o meglio dei tre fattori la cui ammissione è per ora soltanto formale e però assai comoda per la interpretazione.

La conoscenza dei tre fattori può aversi soltanto dallo studio del metabolismo delle forme filamentose e dei *large bodies*.

Due recenti lavori si occupano del problema per quanto riguarda le forme filamentose.

Il primo di Nickerson [5] dimostra che non vi è apprezzabile differenza di pentosio dell'acido nucleinico tra forme filamentose e forme normali di *Bacillus cereus* e pertanto la diminuzione di affinità per i colori basici caratteristica dei filamenti non può spiegarsi in base a diminuzione del contenuto in acido nucleinico.

Il secondo lavoro, apparso in questi giorni, di Nickerson e Sherman [6] stabilisce l'importante fatto che la crescita totale terminale su 16 ore di sviluppo è per il *Bacillus cereus* la stessa, sia se si tratti di forme normali che di forme filamentose e che identica è la quantità di N totale, ciò che significa che la velocità della sintesi è indipendente dalla divisione cellulare.

La respirazione endogena – cioè quella senza aggiunta di substrati ossidabili – è più bassa nelle forme filamentose di fronte a quella normale.

5) W. J. NICKERSON. *Metabolic aspects of bacterial growth in the absence of cell division.* « Abstracts of Papers. Fifth international Congress of Microbiology », 33 1950).

6) W. J. NICKERSON and F. G. SHERMANN. *Metabolic aspects of bacterial growth in the absence of cell division.* – II. *Respiration of normal and filamentous cells of Bacillus cereus.* « J. Bact. », *64*, 667 (1952).

Ma differenze molto cospicue si osservano per quella in presenza di substrati. Con il piruvato essa è per le forme allungate solo $^1/_3$ di quella delle forme normali. Da ciò gli Autori traggono la conclusione che mentre la crescita richiede solo $^1/_3$ dell'energia totale utilizzata dalle cellule normali, per la divisione sono invece necessari gli altri 2/3.

La presente ricerca riguarda il contenuto in catalasi dei *large bodies* da uretano, ricerca eseguita non solo per l'importanza che ha la catalasi nei fenomeni di respirazione cellulare, ma sopratutto per il fatto che da molti si riporta a presenza di perossidi il fenomeno della filamentizzazione.

Dalle ricerche di Spencer [7] e da quelle di Lea, Haines e Coulson [8] è risultato che la irradiazione di culture in crescita di *E. coli* porta alla formazione di lunghi filamenti fino a 150 μ (spaghetti – *like filaments*), fenomeno che sembra di evenienza generale, tanto vero che Lea nel noto libro sull'azione delle radiazioni sulle cellule viventi [9] dedica ad esso un capitolo con la indicazione dei tipi cellulari nei quali si avvera.

D'altra parte, dalle ricerche di Wyss, Haas, Clark e Stone [10] è risultato che l'effetto della radiazione si avvera anche se è irradiato soltanto il terreno di cultura poichè in esso si formano perossidi che sarebbero in ultima analisi i veri agenti dell'effetto sia per quanto riguarda la formazione di filamenti che per quanto riguarda la comparsa di mutanti. Naturalmente ciò vale per le forme filamentose perchè non esiste nessuna ricerca che lo dimostri per le *pettenkoferie*, ma, poichè, da quello che si è detto, i rapporti tra le prime e le seconde sono assai stretti, si può pensare che anche nella genesi di queste i perossidi abbiano una qualche influenza.

Si è sperimentato con cellule di *E. coli* (I.S.I.) L'etil uretano, sciolto in acqua distillata alla concentrazione 2 M, veniva aggiunto al brodo in modo da raggiungere la concentrazione finale di 0,33 M mentre nelle brodoculture di controllo veniva aggiunta uguale quantità di acqua distillata. Si ottenevano in tal modo forme altamente pleiomorfe che venivano osservate ogni volta al microscopio a contrasto di fase.

Le brodo–culture, lavate tre volte con soluzione fisiologica venivano sospese in soluzione fisiologica.

La determinazione dell'attività della catalasi è stata fatta in manometri di Warburg in bagno a 37° C.: cc. 0,20 di H_2O_2 a 5 volumi erano versati, a raggiunto equilibrio, dall'appendice laterale nella cavità centrale della vaschetta, in cui erano stati posti cc. 2 della sospensione di bacteri.

(7) R. R. Spencer, *Action of* β *and* γ *rays on bacteria.* « U.S. Public Health Report », *50*, 1642 (1935).

(8) D. E. Lea, R. B. Haines e C. A. Coulson, *The action of radiations on bacteria.* – III. *Rays on growing and on non proliferating bacteria.* « Proc. Roy. Soc. », B. 123, 1 (1937).

(9) D. E. Lea, *Action of radiation of living cells. Camb.* Un. Press, 1946.

(10) O. Wyss, F. Haas, J. B. Clark and W. S. Stone, *Some effects of ultraviolet irradiation on microrganism.* Symposium on radiation genetics 133. « J. cell. and comp. Phys. », *35*, suppl. 1 (1950).

Il contenuto in N veniva determinato per mezzo del micro-Kjeldhal. I valori sia per i controlli che per le *pettenkoferie* sono riferiti ad 1 mlgr. di N.

Exp. N.	Ore di sviluppo	Produzione di O_2 in mm³		Differenza in %
		E. coli sviluppata in brodo normale	*E. coli* sviluppata in brodo uretano	
		I valori sono riferiti ad 1 milligrammo di N.		
1	6	402	118	70,75
2	6	548	161	70,62
3	6	643	141	78,07
4	24	532	98	81,57
5	24	433	114	73,67
6	24	554	121	78,72

La fig. 1 e la tabella dimostrano un assai minore contenuto in catalasi nei *large bodies* da uretano in confronto con quello delle cellule normali. Da ciò si sarebbe condotti ad ammettere che nei processi di sintesi che si avverano nella morfogenesi delle *pettenkoferie* sia inibita quella di questo fermento.

Si può anche pensare che il fermento venga normalmente sintetizzato e solo successivamente esso venga inattivato, ma il fatto che la diminuzione si ha nello stesso grado sia per le forme di recentissima formazione che in quelle più antiche rende più probabile la prima ammissione.

Per il fatto che le determinazioni erano eseguite su *pettenkoferie* lavate con soluzione fisiologica si esclude la possibilità di un effetto narcotico da adsorbimento di uretano sulle superfici, quale fu scoperto da O. Warburg, essendo esso reversibile a mezzo della diluizione quale si effettua con il lavaggio in mezzo indifferente.

Si deve, infine, accennare al fatto che spesso si ha la comparsa nelle culture di forme filamentose rare o più frequenti ciò che può essere messo in relazione con l'accumulo di perossidi per scarsa presenza di catalasi nelle *pettenkoferie* e perciò possibilità per qualche cellula normale o per qualche cellula derivante dalle *pettenkoferie* alla morfogenesi filamentizzante.

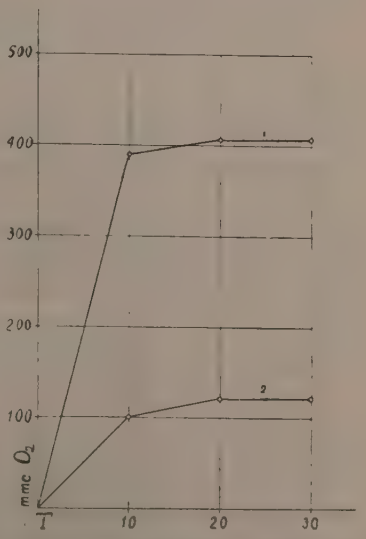


Fig. 1. - Sulle ascisse i tempi, sulle ordinate i mmc. di O_2 sviluppata.
1) - Sviluppo di O_2 da cellule normali di *E. Coli*.
2) Sviluppo di O_2 da *pettenkoferie*.
Valori riferiti ad 1 mgr. di N.

Botanica. — *Su « Hypericum elodes » Huds., relitto eu-atlantico della selva di San Rossore (Pisa)* (*). Nota di Roberto Corti, presentata (**) dai Soci A. Chiarugi e G. Negri.

Fin dal 1860 è nota, dal *Prodromo* di Caruel (1), la presenza in San Rossore – « loco dicto Palazzetto » – di una singolare specie eu-atlantica, *Hypericum elodes* Huds., raccoltavi dal prof. Pietro Savi (« in udis sylvae Pisanae ») fin dal luglio del 1841, poi dal Tassi nel 1842, e in seguito dal Beccari (1861), dallo stesso Savi (1862, 1869) e dal Fantozzi, come testimoniano gli *exiccata* dell'Herbarium Centrale Italicum dell'Istituto Botanico Fiorentino. Singolare stazione, questa, di una specie il cui areale è tipicamente circoscritto all'Europa occidentale atlantica, come appare con evidenza dalla cartina (fig. 1) elaborata sulla traccia di quella pubblicata da Stefanoff (2) in *Pflanzeareale*, ma modificata in base alla consultazione di numerose flore regionali e dei copiosi documenti conservati negli Erbari Centrale e Webb dell'Istituto Botanico Fiorentino. In particolare la Carta di Stefanoff indica un lembo isolato dell'areale, che comprende tutta la Liguria, e che falsa notevolmente il significato attribuibile ai relitti italiani di questa specie. Il reperto ligure infatti è in origine fondato su un esemplare raccolto da Figari nel luglio 1823 e pubblicato da Parlatore nel volume V della sua *Flora Italiana* (3): un minuscolo esemplare – sicuramente di *Hypericum elodes*, come facilmente ho potuto accertarmi, e con la determinazione specifica fatta di pugno di Parlatore – che porta, scritta da Figari, la molto generica indicazione: « Liguria occid.-Appennino marittimo (Genovesato). Riviera di Ponente ». Non c'è dubbio alcuno ripeto, sull'identità del campione, né dubbio ragionevole sulla sua provenienza: ma deve trattarsi anche qui di una stazione particolarissima, molto circoscritta, e forse successivamente non indagata da altri botanici, se non addirittura perduta per ragioni microclimatiche o antropiche. Lo stesso Penzig (4) contrassegna con « (?) » la sua presenza in Liguria. Le altre stazioni isolate sono quella delle Baleari (cfr. anche Knoche) (5) ed una della Germania centrale (6): mentre il complesso dell'areale è, come detto, rigidamente atlantico,

(*) Dall'Istituto Botanico di Firenze, diretto dal prof. Alberto Chiarugi. Pubblicazione n. 46 del Centro per lo Studio della Flora e della Vegetazione Italiana del C. N. R., diretto dal prof. Giovanni Negri.

(**) Nella seduta del 10 gennaio 1953.

(1) Th. Caruel, *Prodromo della Flora Toscana*, p. 114. Firenze (1860).

(2) B. Stefanoff, *Die Mediterran orientalischen Arten der Gattung Hypericum L.* « Die Pflanzenareale », 4 Reihe, Heft 1, Karte 1. Jena (1933).

(3) F. Parlatore, *Flora Italiana*, vol. V, p. 548. Firenze (1875).

(4) O. Penzig, *Florae Ligusticae Synopsis*. « Annali Mus. Civico Storia Nat. di Genova », ser. 2ª, vol. 18, pp. 421–531 (1897).

(5) H. Knoche, *Flora Balearica*, vol. II, p. 188 (1922).

(6) G. Hegi, *Illustrierte Flora von Mittel Europa*. V Bd., 1 Teil, p. 509. München (1925).

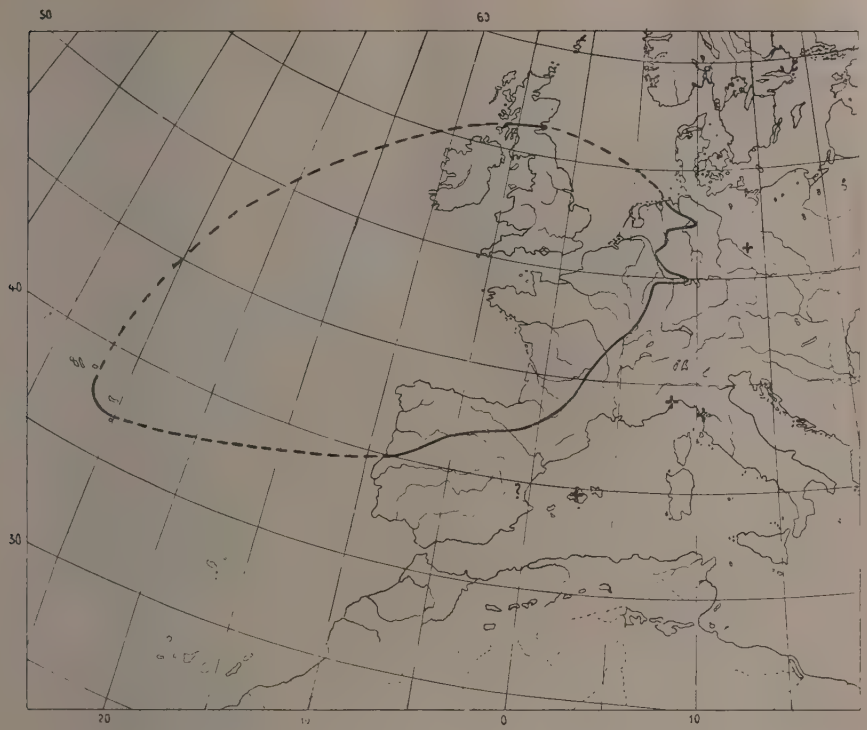


Fig. 1. – Area di distribuzione di *Hypericum elodes* Huds.

da Coimbra (Welwitsch, *Plantae Lusitanicae*, 1851, Herb. Webb; Colmeiro, 1885 [7]) alla Germania renana, dall'Inghilterra centrale ai Pirenei centrali, con speciale frequenza presso alle coste dell'Oceano Atlantico, del Golfo di Guascogna, della Manica e del Mare del Nord, con stazioni classiche nelle Lande, a Fontainbleau, nel Brabante, nel Surrey, nel Devonshire, ecc., e con un paio di stazioni in acquitrini dell'isola di Saint Michel delle Azorre.

Hypericum elodes Huds. Fl. Angl. ed. I, 292 (1762), indicato in *Index Kewensis* (vol. II, p. 1192) come *Hypericum Elodes* Huds., e pubblicato da Linneo nella II[a] edizione delle *Species Plantarum* (1863), tanto che Mansfeld [8] adotta la attribuzione della specie a Linneo, pur specificando in precedente lavoro [9] la priorità di Hudson, ed aggiungendo: « Als Autor wird meist Linné (1763) zitiert », ha i seguenti più usuali sinonimi: *H. Helodes* St. Lag. (ed anche *H. helodeum* St. Lag.), in « Ann. Soc.

7) M. COLMEIRO, *Enumeracion y revision de las Plantas de la Peninsula Hispano-Lusitana é Islas Baleares*, tomo I, p. 538. Madrid (1885).

8) R. MANSFELD, *Verzeichnis der Farn- und Blütenpflanzen des Deutschen Reiches*. Jena (1940).

9) R. MANSFELD *Zur Nomenklatur der Farn- und Blütenpflanzen Deutschlands. VII.* « Repertorium Spec. nov. regni vegetab. », XLVII, p. 278 (1939).

Bot. Lyon », VII (1880), p. 128; *Elodes palustris* Spach in « Ann. Soc. Nat. », ser. II, V (1836), p. 176. Secondo Hegi (loc. cit.) la grafia *H. Helodes* (adottata anche dal nostro Fiori) [10], sarebbe più giusta per ragioni etimologiche, ma è certo che quella esatta è l'altra, *elodes*, da noi riportata. L'isolamento di un genere speciale, *Elodes*, accolto da Spach, risale ad Adanson (1763); è stata anche fatta da alcuni vecchi autori una erronea inclusione nel genere *Elodea*. Comunque *Hypericum elodes* è l'unico rappresentante di una distinta sezione del genere *Hypericum*, che, secondo Steffen [11], si riallaccia filogeneticamente a ceppi nordamericani.

In tutto l'areale esso vive in stazioni acquitrinose o palustri, in popolamenti acidofili e idrofili. Come ho detto, è considerato da autorevolissimi Autori tra le specie tipiche del componente atlantico (nel senso precisato da Negri, 1927 [12]), gruppo eu-atlantico dell'elemento atlantico in Steffen 1937 [11], sottogruppo eu-oceanico del gruppo atlantico di Troll, 1925 [13], tipo atlantico di Watson in Stapf [14], elemento oceanico-west europeo di Matthews 1937 [15], elemento atlantico di Chevalier (1923) [16], mentre solo alcuni autori, come Braun-Blanquet [17], lo considerano « subatlantico », sopravalutando il valore delle stazioni in regione mediterranea e specialmente di quelle italiane, soprattutto in base alla vaga indicazione di Figari, che per esempio in Braun-Blanquet (loc. cit., p. 142) si trasforma addirittura in « Ligurie ».

L'esame accurato che ho potuto effettuare della stazione della Selva Pisana nella tenuta di San Rossore, in occasione di un ampio rilevamento floristico e fitogeografico dei più significativi aspetti di questo mirabile lembo della selva costiera Tirrenica, che sarà oggetto di una Memoria di imminente pubblicazione, consente una migliore valutazione del significato di relitto di tale « locus classicus », tanto che può meritare prospettarne le essenziali caratteristiche, al fine di contribuire a chiarirne il valore fitogeografico, e al tempo stesso confermarne l'assoluta evidenza di stazione naturale, di cui da qualche fitogeografo si è talvolta dubitato.

(10) A. Fiori, *Nuova Flora analitica d'Italia*. Vol. I, p. 519. Firenze (1923-25).

(11) H. Steffen, *Beiträge zur Begriffsbildung und Umgrenzung einiger Florenelemente Europas*. « Beihefte z. Botan. Centralb. », Bd. LIII, Abt. B, Heft 2/3, pp. 330-404 (1935).

(12) G. Negri, *Il componente atlantico della Flora piemontese*. « Atti R. Accad. Sci. Torino », vol. LXVIII, pp. 31-51 (1928).

(13) K. Troll, *Ozeanische Züge im Pflanzenkleid Mitteleuropas*. « Freie Wege Vergleichender Erdkunde . Festgabe Erich von Drygalski zum 60. Geburtstag. München und Berlin (1925).

(14) O. Stapf, *The southern element in the British Flora*. « Botanische Jahrbücher », vol. L, Suppl. Band, pp. 509-525 (1914).

(15) J. R. Matthews, *Geographical relationships of the British Flora*. « The Journ. of Ecol. », vol. XXV, pp. 1-90 (1937).

(16) A. Chevalier, *Les espèces atlantiques de la Flore française et la genèse des peuplements végétaux actuels de l'Ouest et du Nord Ouest de la France*. Rapport présenté au Congrès de Bordeaux de l'Ass. Franç. pour l'Avancement des Sciences », pp. 1-22 (1923).

(17) J. Braun-Blanquet, *L'origine et le développement des flores dans le Massif central de France*. Paris (1923).

La vasta area che porta il nome di Selva di San Rossore, fino ad oggi protetta dal dominio demaniale, e che già esisteva al tempo della repubblica romana e si estendeva allora anche alla tenuta di Migliarino, all'attuale lago di Massaciuccoli ed ai boschi dei monti di Fillettole (cfr. Toscanelli, 1933) [18], e divenne poi proprietà degli imperatori romani e luogo di caccia dei re longobardi, e, con varie vicende, restò riserva aulica fino ai nostri giorni, è tutt'altro che uniforme dal lato floristico-fitogeografico. La molteplicità dei suoi aspetti va senza dubbio connessa con le recenti vicende di quel settore costiero, gran parte del quale era occupato dal mare ancora al tempo di Augusto (cfr. Toscanelli, loc. cit.), che nell'area di Coltano e di Pisa formava una laguna, dietro lo sbarramento di una dorsale di dune pleistoceniche; laguna alla quale affluivano le acque del delta dell'Arno e quelle del Serchio (*Auser*), che, già versantesi nell'Arno presso l'attuale Pontedera, deviarono naturalmente per confluirvi a Pisa appena nel III secolo av. Cr., mentre solo nel VI secolo dell'era cristiana furono, per volere del vescovo lucchese san Frediano, incanalate nell'alveo autonomo attuale, per difendere la campagna lucchese dalle inondazioni, come testimonia una celebre omelia del pontefice Gregorio Magno (Toscanelli, loc. cit.).

Il « bosco del Palazzetto », detto anche « la Sterpaia », è sito su una porzione dell'antica duna pleistocenica che, a guisa di tombolo, separava dal mare la laguna di Fasania (cfr. Simoni, 1908 e 1910) [19], che arrivava fino entro le attuali mura occidentali di Pisa. Esso è senza dubbio il settore più antico della Selva di San Rossore. La duna si eleva a circa 23 m. di altezza s. m., e nelle porzioni più alte è popolata da una densa lecceta con spiccata *facies* mediterranea: ma nelle depressioni degli interduni, che di inverno e di primavera sono invasi da stagnanti acquitrini, ospita una foresta di farnia (*Quercus pedunculata* Ehrh.), prezioso lembo benissimo conservato di foresta mesofila retrocostiera (cfr. Chiarugi, 1939) [20], ormai pressochè scomparsa da gran parte della costa tirrenica.

In questi popolamenti mesofili ed igrofili, che ancora in epoca storica dovettero avere un facile collegamento – per il diverso corso del Serchio – con gli acquitrini dell'attuale lago di Massaciuccoli (parte dell'antico « lago Costiero » che si estendeva a occidente dei monti di Fillettole), vegeta tenacemente l'*Hypericum elodes*, resistendo agli assalti dei cinghiali che spesso liberamente vi grufolano, ed anche a qualche stretta di relativa siccità estiva, aggravata da una canalizzazione di bonifica, non molto giovevole dal lato naturalistico.

Non è questa la sede per una minuta illustrazione floristico-fitogeografica della interessante stazione, la cui analisi sarà del resto esposta altrove

(18) N. TOSCANELLI, *Pisa nell'antichità dalle età preistoriche alla caduta dell'Impero romano*, vol. I, Pisa, Lischi (1933).

(19) D. SIMONI, *San Rossore*. Pisa, Mariotti (1908); *San Rossore nella Storia*. II ediz., Firenze, Leo S. Olschki (1910).

(20) A. CHIARUGI, *La vegetazione dell'Appennino nei suoi aspetti d'ambiente e di storia dei popolamenti montano*. Atti della XXVII Riunione della Società Italiana per il Progresso delle Scienze », Bologna 4-11 settembre 1938, 6, pp. 1-37 (1939).

con ampiezza adeguata. Mi limiterò qui a tracciarne le più salienti caratteristiche, che valgono ad inquadrare dal lato fitogeografico e fitostorico il celebre, antico reperto.

Al margine di circoscritti acquitrini dal cui centro sorgono giganteschi esemplari di farnia (*Quercus pedunculata* Ehrh., Tav. I, figg. 1, 2), spesso circondati da grandi ciuffi di falaschi (*Carex stricta* Good., *Carex remota* L., *Carex elata* All., *Carex pallescens* L., *Carex pendula* Huds., ecc.), nella melma acida (pH da 4 a 4.8), vegetano densi popolamenti di sfagni (Tav. II, fig. 1), e precisamente del boreale *Sphagnum platyphyllum* (Sull.) Warnst [21], il cui reperto risulterebbe nuovo per l'Italia centrale (cfr. Bottini, 1919) [22] e di *Sphagnum crassicladum* Warmst [23], specie assai più diffusa anche nell'Italia centrale e meridionale. In queste stazioni acide e acquitrinose si incontrano densi popolamenti di *Hypericum elodes* (Tav. II, fig. 2), di varia ampiezza, mentre nelle zone più marginali vegetano *Calluna vulgaris* Hull., grossi ciuffi di *Osmunda regalis* (Tav. III, fig. 1), e, in un sol luogo, un popolamento di *Hibiscus roseus* Thore (Tav. III, fig. 2), specie atlantica del sottogruppo atlantico–submediterraneo (secondo Steffen, loc. cit.), che si ritrova anche a Bientina e a Massaciuccoli, e, tra la Lombardia e il Veneto, al lago di Mantova e nelle valli di Ostiglia. Ai popolamenti di *Hypericum elodes* si affiancano e si mischiano colonie di *Hydrocotyle vulgaris* L., specie atlantica–suboceanica (pseudo atlantica secondo Czeczott) [24], dell'atlantico–mediterranea *Ludwigia palustris* Ell., (*Isnardia palustris* L.; del gruppo euoceanico), ed ancora: *Lemna minor* L., *Juncus supinus* Moench. (*Juncus bulbosus* L.), *Ranunculus Flammula* L., *Potentilla procumbens* Sibth. f. *subsericea* Th. Wolf., *Lysimachia vulgaris* L., *Gratiola officinalis* L., *Galium palustre* L. var. *elongatum* (Presl.) Rouy.

Nelle porzioni marginali vegetano popolamenti di *Pteridium aquilinum* Kuhn., ciuffi di *Dryopteris dilatata* (Hoffm.) A. Gray, gruppi di *Helianthemum guttatum* Mich. e di *Teucrium Scorodonia* L. (ambedue specie atlantico suboceaniche), e di *Teucrium Scordium* L. var. *scordioides* (Schreb.) Fiori (continentale–boreale).

La stazione è poi popolata di frequenti germinazioni di *Alnus glutinosa* Gaertn. di *Populus alba* L. e di *Phytolacca decandra* L., specie che crescono nella circostante foresta; e vi si notano ancora: *Carex distans* L., *Juncus conglomeratus* L., *Iris Pseudacorus* L., *Polygonatum officinale* All., *Rumex sanguineus* L. var. *typicus* Fiori (*R. nemorosus* Schrad. , *Rumex Acetosella* L. var. *vulgaris* Koch, *Hypericum montanum* L., *Potentilla Tormentilla* Neck var. *typica* Th. Wolf, *Potentilla reptans* L. var. *typica* Th. Wolf, *Rubus nemorosus* Hayne, *Myrtus communis* L. var. *italica* (Mill.) L., *Oenanthe aqua-*

(21) Gentilmente determinato dal prof. Helmut Gams, di Innsbruck, che qui ringrazio.

(22) A. Bottini. *Sfagnologia Italiana*. « R. Accademia dei Lincei », Memorie, ser. V, vol. XIII, pp. 1–88 (1919).

(23) Individuato dal sig. U. Tosco e confermato a sua richiesta dal prof. A. Thomson.

(24) H. Czeczott. *Element atlantycki we Florze Polskiej. The Atlantic element in the Flora of Poland*. « Bull. Intern. de l'Acad. Polon. des Sciences », Cl. sc. math. et nat., sér. 3, pp. 391–407 (1926).

Fig. 1. - Lagaccio nel bosco a *Quercus pedunculata* Ehrh. del Palazzetto (San Rossore) fiancheggiato da popolamenti a *Osmunda regalis*, *Dryopteris dilatata*, Sfagni, *Hypericum elodes*. (Foto Corti).

Fig. 2. - Stazione a *Hypericum elodes* e *Hydrocotyle vulgaris* al margine di un lagaccio nel bosco del Palazzetto (San Rossore). Sul fondo si vede innalzarsi la pendice della duna pleistocenica col bosco a *Quercus Ilex*. (Foto Corti).

tica Poir., *Vincetoxicum officinale* Moench., *Myosotis palustris* Hill. var. *intermedia* (Lk.) Fiori, *Scrophularia nodosa* L., *Veronica scutellata* L., *Teucrium Chamaedrys* L., *Brunella vulgaris* L., *Sonchus oleraceus* L. var. *ciliatus* (Lam.) Fiori.

Tra le Bryophyta raccolte (oltre agli Sfagni) ricordo i Muschi [25]: *Leucobryum glaucum* (L.) Schimp., *Funaria hygrometrica* (L.) Sibth., *Mnium hornum* L., *Mnium affine* Bland., *Leskea polycarpa* Ehrh., *Acrocladium cuspidatum* (L.) Lindb., *Isothecium filescens* (Brid.) Moenk, *Thuidium tamariscifolium* (Neck) Lindb., *Brachythecium velutinum* (L.) Br. eur., *Eurhynchium striatulum* Br. eur., *Pseudoscleropodium purum* Fleisch., *Hypnum cupressiforme* L. var. *filiforme* Brid., *Atrichum undulatum* (L.) P. de B., *Polytrichum gracile* Diks (forma), *Polytrichum formosum* Hedw. e le Epatiche [25]: *Nowellia* cfr. *curvifolia* (Dicks) Mitten, *Chyloscyphus* cfr. *polyanthus* Corda: tutte entità ad ampio areale.

Di Licheni infine ho raccolto solo i seguenti [26]: *Cladonia rangiformis* Hffm., *Parmelia caperata* Ach.

L'elenco floristico potrebbe svilupparsi. Ma già mi sembra che risulti chiaro trattarsi di un armonico complesso di specie che fanno parte di un consorzio, che in massima può riferirsi a quella « fascia di rifugio » a *Quercus Robur-Calluna* di Schmid (1949) [27], che lo stesso Schmid (1945) [28] considera variamente ricca (nelle sue varie *facies*) di specie relitte, tra le quali ricorda lo stesso *Hypericum elodes*.

Questi popolamenti atlantici debbono essere indubbiamente penetrati nel cuore dell'attuale regione mediterranea in varie riprese, coincidenti con periodi di oceanicità climatica, alcuni dei quali è presumibile risalgano anche al terziario (come testimoniano entità atlantiche isolate, per esempio, in Corsardinia). Ma le colonie di San Rossore debbono avere una storia più recente. Penetrate negli anaglaciali oceanici del Mindel-Riss, del Riss-Würm o addirittura in una fase climatica post-würmiana (cfr. Negri, 1927, loc. cit.), devono avere invaso rilievi e valli della zona subcostiera, mentre successivi periodi continentali hanno presumibilmente rotto la continuità degli areali, determinando l'isolamento di relitti, rifugiati in stazioni eccezionalmente favorevoli per ragioni ecologiche e microclimatiche, molte delle quali sono state successivamente distrutte dall'avanzare delle colture nei settori più umidi e planiziari. Molti fatti d'altronde stanno a testimoniare, che le specie atlantiche abbiano subìto un recente ritiro, come dimostra Braun-Blanquet (1923, loc. cit., p. 130) che afferma: « Le recul des espèces atlantiques sur les limites de leur aire semble . . . un fait assez général ». Lo testimoniano le disgiunzioni planiziarie delle foreste mesofile montane e queste stesse selve mesofile costiere. Ciò del resto è anche confermato dal-

(25) Determinazioni del sig. U. Tosco, che vivamente ringrazio.

(26) Determinazioni del sig. C. Sbarbaro, che qui vivamente ringrazio.

(27) E. SCHMID, *Principien der natürlichen Gliederung der Vegetation des Mediterrangebietes*. « Berich. Schweiz. Botan. Gesell. », Bd. 59 (1949).

(28) E. SCHMID, *Die « atlantische » Flora, eine kritische Betrachtung*. « Berich. Geobotan. Forschungsinstitut Rübel in Zürich fur das Jahr 1944 ». Zurich (1945).

l'andamento dei cicli forestali, quale risulta dai diagrammi pollinici della zona montana dell'Appennino toscano (cfr. Chiarugi, 1950) [29].

Tutte le località palustri e subpalustri che costituiscono gli odierni residui della antica rete di lagune e di laghi, quali i pantani di San Rossore, il lago di Massaciuccoli, il lago di Sibolla [30], i paduli di Bientina e di Fucecchio, ospitano interessanti relitti di piante atlantiche, affiancate a piante boreo–artiche ed a piante nettamente termofile, grazie alla capacità conservativa dello speciale ambiente ad alta umidità e a relativa mitezza climatica. Ma la selva di San Rossore, grazie a una felice coincidenza di fattori climatici, morfologici e storici, conserva qualcosa di più che una serie di singolari relitti e di microendemismi, e cioè un complesso di *facies* forestali di eccezionale interesse. In particolare la foresta mesofila di Farnia, che le vicende climatiche e le azioni antropiche hanno distrutto quasi ovunque sul litorale tirrenico, è qui conservata in un luogo non vasto, ma ancora estremamente espressivo. A ciò probabilmente è dovuto se solo a San Rossore – loco dicto Palazzetto – si conservano anche oggi in piena vitalità le colonie di *Hypericum elodes* altrove irreperibili, e interessanti popolamenti di specie submontane e montane, quali *Narcissus poeticus* e *Leucojum aestivum*. E ciò nel cuore della lecceta mediterranea, a pochi metri dalla macchia litoranea e in quella Selva Pisana che, nelle sue lame più prossime al mare e di più recente popolamento, ospita, nella stessa tenuta di San Rossore (come nella vicina foresta del Tombolo e di Migliarino) altri singolari relitti, quali *Periploca graeca*, la liana colchica di ben diverso significato fitogeografico (cfr. Chiarugi, 1934 [31]; Francini e Pardi Riccadonna, 1936 [32]), le cui piccole colonie dell'Italia meridionale sono forse ormai definitivamente scomparse per l'avanzare delle bonifiche costiere.

Mi sembra perciò da auspicare che l'Alto Consesso, al quale questi brevi appunti verranno presentati, consideri l'importanza naturalistica che avrebbe il conservare integra la Selva che da millenni è protetta dai re e dai demani, erigendola in Parco Nazionale [33] e salvandola da appalti, utilizzazioni e sfruttamenti, che, anche se effettuati con le maggiori cautele, sicuramente romperebbero quel mirabile delicato equilibrio nel quale questo vero Monumento Naturale si è potuto sino ad oggi conservare.

(29) A. Chiarugi, *Le epoche glaciali dal punto di vista botanico*. Accademia Nazionale dei Lincei, « Problemi attuali di scienza e di cultura », Quaderno n. 16, pp. 56–107 (1950).

(30) E. Francini, *Ricerche sulla vegetazione dell'Etruria marittima*. II. *La vegetazione del Lughetto di Sibolla (Valdarno inferiore)*. « Nuovo Giorn. Botan. Ital. », n. s., vol. XLIII, pp. 62–130 (1936).

(31) A. Chiarugi, *La station de la Periploca graeca L. dans la forêt de Pise (Tombolo)*. « Septième Excursion Phytogéographique Internationale. Italie 1934 ». N. 1. Guide Itinéraire, pp. 24–26. Firenze, Ricci (1934).

(32) E. Francini, e P. Pardi–Riccadonna, *Ricerche sulla vegetazione dell'Etruria marittima*. IV. *Ecologia e significato della Periploca graeca L. sul litorale toscano*. « Nuovo Giorn. Bot. Ital. », n. s., vol. XLIII, pp. 167–196 (1936).

(33) *Per l'istituzione del Parco Nazionale di San Rossore (Pisa)*. « Nuovo Giorn. Botan. Ital. », n. s., vol. LV, pp. 577–578 (1948).

Botanica. — *Alcuni dati sulla struttura submicroscopica delle fibre di tensione di un campione di legno di pioppo* (*). Nota di ALBINA MESSERI, presentata (**) dal Socio A. CHIARUGI.

Il campione di legno oggetto di questa Nota mi è stato fornito dal prof. Giordano della Università di Firenze, e proviene da una piantagione di Casale Monferrato, di individui identificati come *Populus euroamericana* Guigner, Clone 214, di 7 anni di età. Il mio campione rappresenta una zona « specchiata » del tronco. Le cosiddette specchiature ricorrono molto spesso nei legni di queste piantagioni, specialmente negli individui marginali, che nel crescere mostrano tendenza ad incurvarsi, e vengono chiamate così per il colore argentino splendente del legno, in confronto al colore giallo paglierino normale; si tratta di zone ben localizzabili anche ad occhio nudo, che si sviluppano preferibilmente dalla parte più convessa del tronco, dove gli anelli sono più spessi. Durante la stagionatura, in corrispondenza di queste specchiature, la retrazione del legno è diversa da quella del tessuto normale, cosicchè nei punti di contatto si aprono grosse spaccature, che limitano l'utilizzazione di questo materiale; oltre al « ritiro » anomalo del legno, anche altre qualità di esso si rivelano diverse da quelle del legno normale, costituendo un importante problema tecnologico.

Dal punto di vista anatomico le specchiature altro non sono che zone di « legno di tensione » che si sviluppano nelle Angiosperme sotto sollecitazioni di varie forze. Siccome le anomalie di questo tipo di legno interessano soltanto le fibre, esse si rivelano tutte a carico della membrana. Il comportamento di questi legni nei confronti dei vari fattori fisici (umidità, calore, suono, ecc.), più che dall'aspetto morfologico della membrana, dipende dalla microstruttura di essa, sia chimica che fisica, cosicchè la conoscenza delle caratteristiche microstrutturali di questi elementi può aiutare fondamentalmente a risolvere i problemi ad esse connessi.

Le conoscenze fino ad oggi acquisite sulla microstruttura delle membrane cellulari, particolarmente di quelle vegetali, sono esposte nel chiaro volume di Frey-Wissling (1951) (1) e ad esso rimando per un aggiornamento sull'argomento. Da questi studi risulta che la cellulosa della membrana ha struttura cristallina, e che le micelle microcristalline sono in massima parte ordinate in catene affiancate, parallele, isoorientate e a loro volta variamente inclinate rispetto all'asse longitudinale della cellula. Per la cono-

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto Botanico dell'Università di Messina e nell'Istituto Botanico dell'Università di Firenze.

(**) Nella seduta del 10 gennaio 1953.

(1) A. FREY-WISSLING, *Morfologia submicroscopica del Protoplasma e dei suoi derivati*. Edizioni Scient. Einaudi, Torino (1951).

scenza del comportamento della membrana, oltre la impalcatura microcristallina, ha importanza la sua struttura microchimica, in quanto molte specie di cellulosa possono concorrere a formarla e possono comparire in varie proporzioni nei diversi strati di essa. Infine il grado di lignificazione della membrana, specialmente nelle fibre del tessuto legnoso, ha un valore notevole nel determinarne la resistenza.

Caratteristiche anatomiche del legno di tensione. – Esse sono assai ben conosciute e recentemente descritte dal Giordano (1951, 1952) [2] per il legno di pioppo, dove le fibre di tensione hanno la parete completamente dissociata in due strati (fibre gelatinose) di cui uno esterno a contorno rigido, *lignificato*, ed uno interno generalmente a perimetro maggiore dell'esterno, ondulato, *non lignificato* (fig. 1). Nel legno di pioppo però anche le fibre normali hanno tendenza alla scarsa lignificazione della membrana interna.

Caratteristiche microstrutturali.

Analisi in luce polarizzata. – È noto che nel caso di fibre vegetali con parete cellulosica, sia pure lignificata, la tessitura micellare della parete è birifrangente di per sè, cioè le catene micellari cellulosiche, che formano la trama della membrana, sono di per sè stesse anisotrope, cosicchè si ha una birifrangenza intrinseca, oltre a quella di tessitura. Si sa anche che le fibre presentano una birifrangenza positiva (cioè $n > n_{\perp}$) rispetto all'asse longitudinale della fibra (Frey–Wissling, loc. cit., p. 108).

Premesse brevemente queste nozioni e determinato il segno della birifrangenza, conviene rendersi conto dell'orientamento che le catene cellulosiche hanno rispetto all'asse longitudinale della fibra. L'angolo che fa l'asse maggiore del cosidetto ellissoide degli indici (angolo ϑ) con l'asse longitudinale della fibra e che corrisponde al punto di massima estinzione della fibra in visione longitudinale, ci dà questo valore. Le catene di micelle cellulosiche infatti possono estinguere parallelamente all'asse longitudinale della fibra (tessitura a fibra, $\vartheta = 0$) oppure presentare estinzioni inclinate (vari valori di ϑ) come conseguenza di quella che comunemente viene chiamata « tessitura a spirale », dove il passo della spirale può avere varie inclinazioni. Oltre ai vari fattori che possono falsare l'interpretazione di queste osservazioni (dispersione angolare, ecc.) può darsi però che anche la tessitura della membrana non sia omogenea nelle varie fibre o nei varî strati della medesima fibra: può darsi che essa varî dalle fibre del legno primaticcio a quelle del legno tardivo, infine che varî col variare della lunghezza di esse, cosicchè l'osservazione di quella che gl'inglesi chiamano normalmente *Maximum Extinction Position*, e che si indica con la sigla m. e. p., deve essere

(2) G. Giordano, *Il legno e le sue caratteristiche.* « Hoepli », Milano (1952); *Osservazioni sulla resa delle colture industriali del legno.* « L'Industria della Carta », anno 6, nn. 8–9 (1952).

fatta su un certo numero di elementi ed è bene che questo valore sia confermato con altri mezzi di indagine.

La m. e. p. è stata misurata al polariscopio in fibre dissociate con trattamento all'acido cromico al 5 % per tempi varî: da circa 7 h. fino a tre giorni di permanenza. Le fibre in visione longitudinale hanno dato un valore medio di m. e. p. di circa 8°,30 con minimi di 6°,60 e massimi di 10°.

È molto utile l'osservazione al polariscopio anche per distinguere le fibre di tensione da quelle normali, che, in visione longitudinale, sono male individuabili al microscopio ordinario. Le fibre di tensione a nicols incrociati mostrano molto birifrangente anche la membrana interna, nella quale si possono notare le pieghettature longitudinali per trasparenza, attraverso alla sottile membrana esterna (fig. 2). Le due membrane hanno la medesima m. e. p.; naturalmente l'estinzione della membrana interna è meno netta di quella esterna, data la sua ondulazione. Siccome le fibre di tensione sono sempre frammiste alle normali, ho potuto apprezzare che l'm.e.p. delle due categorie di fibre è circa la medesima.

All'osservazione in luce polarizzata di fibre in sezione trasversale, risulta però evidente che le due membrane non hanno eguale birifrangenza, mostrando una birifrangenza maggiore la esterna in confronto alla interna. Tale comportamento è da porsi in contrapposizione con quello delle fibre normali, nelle quali non esiste una differenza di birifrangenza fra la parte interna e quella esterna della membrana, almeno apprezzabile ad occhio.

Esame radiografico. – Esso rappresenta una conferma molto utile all'esame polariscopico, dato che molte cause possono falsarne la interpretazione. L'interpretazione del radiogramma si fa tenendo presente che in base alla disposizione delle interferenze si può ricavare la disposizione delle regioni bastonciniformi (Frey-Wissling, loc. cit., p. 121). Conoscendo la direzione del pezzetto di legno radiografato, e quindi delle sue fibre rispetto al fascio di raggi incidenti, si può desumere l'orientamento delle catene cristalline, che formano lo scheletro delle membrane in esame.

Il radiogramma che qui riproduco (fig. 3) è stato gentilmente eseguito e letto dal prof. Preston della Università di Leeds, al quale sono vivamente riconoscente. Come si vede dai dati che accompagnano il radiogramma, la inclinazione della spirale cellulosica delle nostre fibre risulta di circa 10°, ciò che corrisponde assai bene ai dati dedotti dall'analisi polariscopica. Si può quindi concludere con una certa sicurezza che le fibre di tensione del pioppo che abbiamo avuto in esame, hanno una netta microstruttura da fibra (diagramma da fibra di Frey-Wissling) dove le catene cellulosiche sono quasi parallele all'asse longitudinale della cellula. Il radiogramma ci conferma anche che le due membrane dissociate delle fibre di tensione, pur avendo una morfologia diversa, hanno la medesima microstruttura, come già era stato rilevato all'esame polariscopico.

Comportamento delle fibre al rigonfiamento. – Una ricerca del massimo interesse ai fini pratici è quella del comportamento delle fibre agli agenti rigonfianti. La deformazione da rigonfiamento, almeno nelle sue prime fasi, dovrebbe teoricamente mettere in maggiore evidenza le caratteristiche della microstruttura delle membrane delle fibre, ma alle volte si hanno comportamenti imprevedibili e quindi di difficile spiegazione (Preston, 1940, 1941, 1949)[3,4,5].

Sono state eseguite prove del legno specchiato: 1° su materiale integro, e 2° su materiale delignificato con acido cromico al 5 %, usando come sostanze rigonfianti NaOH al 10 % e al 5 %, H_2SO_4 al 50 % ed acqua di fonte. La fig. 4 rappresenta la sezione trasversale del legno specchiato misto ad isole di legno normale, non trattato da agenti rigonfianti, e va tenuta presente per il confronto. Il materiale integro trattato con soda (sottili sezioni longitudinali e trasversali) rigonfia lentamente: il rigonfiamento è ben visibile soltanto dopo 6–7 h., usando NaOH al 10 % (figg. 5–6). Prima a rigonfiare è la membrana interna non lignificata, mentre resta più rigida quella esterna. La differenza di comportamento fra le due membrane è molto bene evidente nelle fibre di tensione, però essa si nota bene (sia pure in maniera attenuata) anche nelle fibre normali, che si trovano intercalate alle anomale, nelle quali si rigonfia maggiormente, nella membrana unica, la parte più interna meno lignificata, in confronto a quella esterna più lignificata. Le lamelle mediane si mantengono più rigide ancora delle membrane primarie e contro di esse premono le pareti rigonfiate delle cellule.

A luce polarizzata, la lamella mediana in sezione trasversale appare isotropa, come avviene del resto anche nel materiale non rigonfiato, invece la membrana primaria abbassa il suo grado di birifrangenza, mentre la membrana secondaria perde ogni birifrangenza e si allarga notevolmente contorcendosi nel lume cellulare.

Il materiale delignificato, trattato con NaOH al 10 %, rigonfia rapidamente, specialmente a carico della membrana interna, che in capo a circa 15′ riempie completamente il lume cellulare, mentre la membrana esterna si rigonfia più debolmente (fig. 7). Le cellule rigonfiando cambiano di forma e divengono a sezione circolare, non avendo più la costrizione della lamella mediana. Nella Tabella I riporto i dati dimensionali (in sezione trasversale delle fibre di tensione, in tessuto integro rigonfiato ed in tessuto delignificato rigonfiato, in confronto al tessuto integro non rigonfiato.

(3) R. D. Preston and B. C. Kundu, *The fine structure of Phloem fibres.* – I. *Untreated and Swollen Hemp.* « Proceedings of the R. Soc. of London », ser. B. n. 851, vol. 128, pp. 214–231 (1940).

(4) R. D. Preston, *The fine structure of Phloem fibres.* – II. *Untreated and Swollen Jute.* « Proceedings of the R. Soc. of London », ser. B, n. 858, vol. 130, pp. 103–112 (1941).

(5) R. D. Preston, *The fine structure of Sisal fibres.* « Journ. of the Textile Institute », vol. 40, n. 10, pp. 1715–1726 (1949).

TABELLA I.

Fibre integre non rigonfiate, fig. 4	Fibre integre rigonfiate, figg. 5–6	Fibre delignificate rigonfiate, fig. 7
media . . μ 26,9 × 29,8	media . . . μ 28,8 × 22,5	media . . . . μ 30,9 × 32,7
minima . . . μ 23,10 × 15,14	minima . . . μ 23,10 × 19,8	minima . . . μ 26,4 × 26,4
massima . . μ 33,0 × 26,4	massima . . μ 33,10 × 26,4	massima . . . μ 39,3 × 42,9

Risulta dalla Tabella I che le fibre, che prima del rigonfiamento hanno una sezione trasversale leggermente rettangolare, tendono a perdere la differenza tra i diametri col rigonfiamento senza delignificazione, pur non divenendo del tutto isodiametriche, e finiscono per divenire quasi completamente cilindriche col rigonfiamento dopo delignificazione.

È difficile rendersi conto del comportamento delle fibre non delignificate in visione longitudinale, dato che gli stessi agenti che rendono possibile la dissociazione operano anche la delignificazione, ma si può osservare materiale incompletamente delignificato e dissociato. In esso il trattamento con NaOH al 10 % porta, dopo circa 15′, ad un breve raccorciamento della fibra, accompagnato da un leggero rigonfiamento trasversale, con comparsa di lievi solchi trasversali sulla membrana esterna della fibra (fig. 8). In materiale delignificato all'acido cromico e poi sottoposto all'azione di NaOH, le singole fibre disgregate, subito dopo il contatto con la soda, si incurvano caratteristicamente ad uncino, circa ad 1/3 dall'apice, e poi si contraggono fortemente in lunghezza, dilatandosi trasversalmente, e contemporaneamente caratteristici solchi trasversali compaiono in tutto il corpo della fibra (fig. 9, dopo circa 15′ di contatto); questi solchi, ad una osservazione poco attenta, possono essere scambiati per fessure, poste proprio in senso perpendicolare all'andamento delle catene cellulosiche della membrana, ma ad un esame accurato si vede che si tratta di una solcatura prodotta dal forte raccorciamento della membrana interna e dalla scarsa elasticità della membrana esterna, che segue passivamente la deformazione della prima, ripiegandosi a mantice. La causa del comportamento diverso delle due membrane non può essere dipendente dal modello microstrutturale delle due pareti, che risulta uguale, ma piuttosto esso può dipendere da un residuo di lignificazione o da una costituzione microchimica particolare della membrana esterna (presenza di-xilano nella membrana esterna, Preston *in litteris*).

È molto difficile calcolare il raccorciamento delle fibre isolate, a causa del loro incurvamento ad uncino che precede la retrazione, ma lo si può calcolare sui pacchetti di fibre che restano compatti anche dopo delignificazione; ecco i dati relativi ad alcuni gruppi di fibre.

Tabella II.

Pacchetti di fibre non rigonfiati	Gli stessi pacchetti di fibre rigonfiati con NaOH al 10 %, dopo 1'
μ 2380	μ 1955
μ 1616	μ 1445
μ 2295	μ 2004
μ 1802	μ 1275

L'accorciamento della membrana interna è accompagnato da una forte dilatazione della medesima in senso trasversale; a causa della sua rigidezza la membrana esterna finisce per lacerarsi e si hanno allora gli aspetti raffigurati nelle figg. 10–11. Come si vede dalla fig. 10 la membrana esterna si lacera per fessure longitudinali che cominciano ad aprirsi verso l'equatore della fibra e successivamente compaiono anche verso i vertici; alle volte il terzo apicale della fibra si scappuccia, perchè la membrana esterna di quel tratto viene distaccata dal resto del corpo dalla violenza con cui la membrana interna si espande; alle volte invece si fende tardivamente anche l'apice della fibra (fig. 11). Nel fare queste prove si è avuto cura di non esercitare nessuna pressione sulle fibre col vetrino copri-oggetto o in altra maniera.

In visione trasversale la prima alterazione che si osserva al polariscopio è la perdita della birifrangenza da parte della membrana interna, che si presenta estinta in qualunque posizione, tranne una sottilissima pellicola limitante il lume cellulare, che alle prime fasi del rigonfiamento appare leggermente birifrangente. La membrana esterna invece è sempre birifrangente, sebbene più debolmente del materiale non rigonfiato e la sua m.e.p. è di circa 8° 9° come nel materiale integro. Si deve aggiungere inoltre che il lento rigonfiamento provocato dal cloroioduro di zinco, che si adopera per saggiare il grado di delignificazione delle pareti (fig. 12), non fa scomparire la birifrangenza, neppure della membrana interna e non ne altera la m.e.p. La membrana esterna appare, dopo il rigonfiamento con soda, formata da due foglietti (lamellazione della membrana), dei quali il più esterno ha maggiore spessore. Col procedere del rigonfiamento anche la membrana esterna indebolisce la sua birifrangenza, mentre scompare del tutto quella della pellicola prospicente il lume cellulare.

Il materiale rigonfiato con H_2SO_4 al 50 %, non dà buoni risultati, in quanto il rigonfiamento è seguìto rapidamente dalla disgregazione delle pareti cellulari.

La macerazione in acqua di fonte invece, protratta per un mese su sezioni molto sottili di legno, dà risultati diversi da quelli osservati con gli altri rigonfianti. La deformazione non è apprezzabile morfologicamente, dato che la lamella mediana non è ancora completamente distrutta e contiene nelle sue maglie gli elementi fibrosi, invece si osservano variazioni del valore della m.e.p. al polariscopio ed in particolare l'angolo ϑ si riduce a 2°–3°,30′, tanto per le fibre lunghe (μ 1064) che per quelle più corte (μ 543). Inoltre l'estinzione è molto meno netta che sul materiale fresco o trattato come precedentemente ho descritto. Angoli di estinzione così bassi si osservano anche in materiale dissociato in acido cromico e successivamente lasciato qualche giorno in acqua.

Concludendo si può dire che le fibre di tensione del nostro campione di pioppo hanno una tessitura a spirale molto ripida (8°–10°) ed omogenea nei vari strati. La loro deformabilità invece è eterogenea per il comportamento più rigido della membrana esterna in confronto alla interna. La membrana esterna infatti in un primo tempo si piega trasversalmente, resistendo alla pressione esercitata da quella interna, ed in un secondo tempo si fende per fessure circa longitudinali, secondo il modello della sua microimpalcatura. Essa inoltre ha una tessitura cellulosica più stabile della interna, perchè stenta a perdere la sua birifrangenza anche dopo rigonfiamento, mentre la interna la perde con grande facilità.

Il lungo e lento rigonfiamento in acqua, mentre porta ad un modesto aumento di volume e cambiamento di forma, cambia l'orientamento delle micelle cellulosiche della membrana rendendole parallele o quasi all'asse longitudinale della fibra. I rapidi rigonfiamenti in NaOH sono invece più vistosi, ma non sembra che alterino l'orientamento delle spirali cellulosiche. Un sottilissimo strato ad impalcatura più stabile e rigida si osserva anche al limite tra la membrana secondaria ed il lume cellulare. La membrana interna durante il rigonfiamento si espande violentemente in larghezza e si raccorcia, cosicchè si può pensare che la perdita della birifrangenza che ne consegue sia dovuta anche ad un allontanamento, sia pure ordinato, ma eccessivo, delle catene micellari cellulosiche l'una dall'altra.

Molti altri rilievi microstrutturali andrebbero eseguiti ancora oltre quelli qui riportati per uno studio completo, tuttavia anche questi primi dati penso che possano fornire ai tecnologi elementi utili per la risoluzione dei loro problemi. Inoltre, dal punto di vista teorico, queste osservazioni chiariscono in parte il meccanismo di azione delle fibre di tensione in natura, che devono il loro funzionamento di tessuto meccanico altamente elastico non solo alla resistenza opposta dalla membrana primaria lignificata alla forza di espansione della membrana secondaria, che rigonfiando preme contro la prima come una molla, ma addirittura alla intima microstruttura della membrana esterna, che anche completamente delignificata si oppone abbastanza rigidamente alla espansione della membrana interna.

Tengo molto vivamente a ringraziare qui il chiar.mo prof. Preston, Direttore del Biophysic Subdepartment of the Department of Botany della Università di Leeds, che mi è stato largo di preziosi consigli durante l'esecuzione di questa ricerca, e che ha eseguito ed interpretato il radiogramma che illustra questa Nota; il prof. Guglielmo Giordano, della Facoltà Agraria–Forestale della Università di Firenze, che mi ha fornito il materiale, insieme a preziose indicazioni; il prof. Renzo Pieruccini della Facoltà di Scienze della Università di Messina per avere curato l'uso di alcuni vocaboli tecnici di questa Nota; infine un ringraziamento speciale tengo a rivolgere al prof. Alberto Chiarugi, Direttore dell'Istituto Botanico della Università di Firenze, che ha reso possibile l'elaborazione di questa Nota dandomi ospitalità completa nell'Istituto di Botanica e mettendomi a disposizione il Panphot della Casa Leitz, che fa parte della sua attrezzatura.

SPIEGAZIONE DELLA TAVOLA

Fig. 1. – Legno di tensione, fibre in sezione trasversale (×650).

Fig. 2. – Fibre normali e di tensione, dissociate, viste al polariscopio nella posizione di massima illuminazione (×145).

Fig. 3. – Radiogramma di legno di tensione eseguito con CuKα, da tubo Helger HRX, collimato con foro di 0,5 mm. di diametro, direzione della grana del legno: quella del margine lungo della pagina. Angolo spirale valutato dal film originale: 10° ca. (da Preston).

Fig. 4. – Legno normale e di tensione (×280).

Figg. 5–6. – Fibre normali e di tensione rigonfiate con soda (×280).

Fig. 7. – Fibre di tensione delignificate e rigonfiate con soda (×280).

Fig. 8. – Fibre di tensione incompletamente delignificate e trattate con soda (×350).

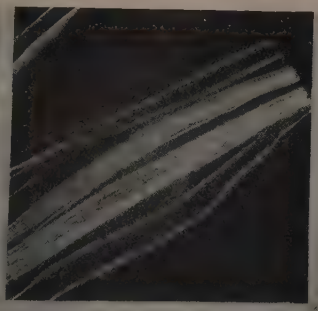
Fig. 9. – Fibre di tensione delignificate e trattate con soda (×650).

Fig. 10. – Fibre di tensione delignificate e trattate con soda (×100).

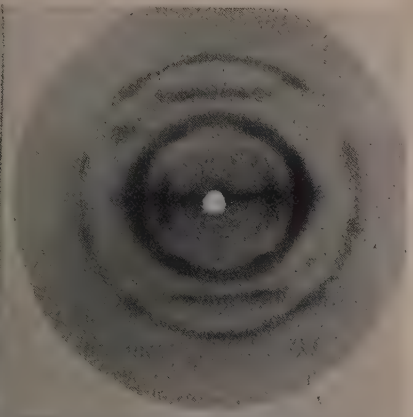
Fig. 11. – Apici di fibre di tensione delignificate e trattate con soda (×650).

Fig. 12. – Fibre di tensione, in sezione trasversale, trattate con cloroioduro di zinco (×360).

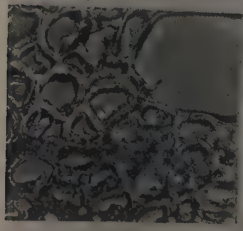
1



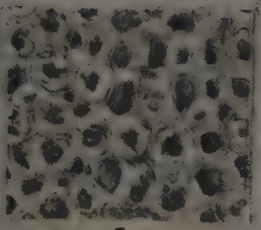
2



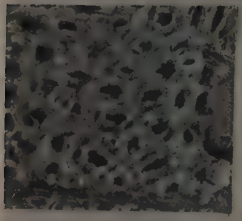
3



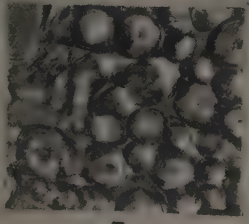
4



5



6

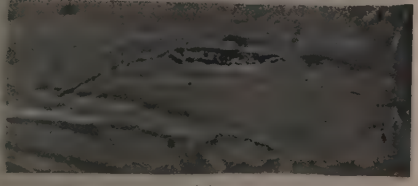


7

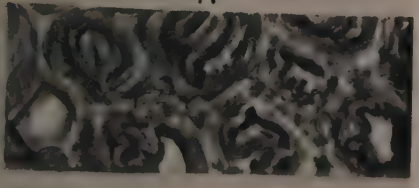
10

8

9



11



12

Biologia. — *Osservazioni citologiche sulla ghiandola dell'albume di «Eobania vermiculata» (Mueller)* [*]. Nota di LEA URBANI MISTRUZZI e RENATA GALASSO, presentata [**] dal Socio G. COTRONEI.

Da alcuni anni nell'Istituto di Anatomia Comparata di Roma si stanno svolgendo ricerche miranti a stabilire la natura chimica e la funzione di particolari formazioni cellulari.

Le ricerche di Urbani [1], che riprendono quelle di Cotronei [2] sulla natura e funzione della fascia vitellogena di *Antedon* e altre su formazioni analoghe che si riscontrano negli oociti di altri animali, quelle [3] sul comportamento delle strutture ergastoplasmatiche durante il processo secretorio di alcune ghiandole, rientrano in questo quadro.

Nella presente Nota si espongono le osservazioni dedotte dallo studio di alcune formazioni cellulari che si riscontrano in particolari condizioni funzionali della ghiandola dell'albume di alcuni Gasteropodi. Queste sono state chiamate « parasomi » per la loro posizione in vicinanza al nucleo e si trovano nella ghiandola dell'albume di Gasteropodi ibernanti, o che hanno subìto una inanizione prolungata, o in condizioni patologiche dovute all'infestazione di alcuni parassiti (Krahelska [4], Filhol [5]). Come struttura si avvicinano molto ai paranuclei e alle formazioni ergastoplasmatiche tanto che il Pensa [6] li accumuna. A parte le osservazioni dei riferiti Autori non abbiamo trovato nulla in letteratura sulla natura, funzione, origine e composizione chimica di questi parasomi.

Per questa ragione abbiamo ritenuto opportuno riprendere in esame dette formazioni con metodi citologici più moderni.

Prima di iniziare la esposizione dei nostri dati è opportuno fare una breve rassegna delle osservazioni compiute da altri autori sulla ghiandola dell'albume ed accennare ai suoi rapporti anatomici.

L'apparato genitale dei Gasteropodi risulta costituito da tre regioni: nella prima si trova la ghiandola ermafrodita ed il canale ermafrodita, nella seconda si ha la distinzione tra canale femminile e canale maschile nei quali separatamente passano gli elementi germinali femminili e maschili ed infine nella terza si ha la netta separazione dei due dotti i quali convergono all'orificio genitale esterno formando il vestibolo. La ghiandola dell'al-

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Anatomia Comparata «G. B. Grassi» della Università di Roma.

(**) Nella seduta del 10 gennaio 1953.

(1) F. URBANI, «Rend. Acc. Naz. Lincei», *6*, 131 (1949); «Riv. di Biologia», *41*, 331 (1949).

(2) G. COTRONEI, « Boll. Soc. Nat. Napoli », *24*, 155 (1910); « Arch. Zool. », *5*, 41 (1911).

(3) L. URBANI MISTRUZZI e V. PACINI, « Rend. Acc. Naz. Lincei », *10*, 427 (1951); vedi anche URBANI, « Riv. di Biologia », *41*, 1 (1949) e « Boll. di Zool. », *16*, 151 (1949).

(4) M. KRAHELSKA, « Arch. f. Zellforsch. », *9*, 552 (1913).

(5) J. FILHOL, « Arc. Anat. Micr. », *34*, 155 (1938).

(6) PENSA, *Trattato di istologia generale*, S.E.L., 1925.

bume, che serve a secernere la sostanza che circonderà le uova, si trova nel punto di congiunzione del canale ermafrodita con il canale misto, accanto alla piccola dilatazione del primo dove avviene la fecondazione delle uova.

Della ghiandola dell'albume di *Helix* e di altri Gasteropodi si sono occupati molti autori: Paravicini [7] (1899) ha studiato lo sviluppo anatomico, Beylot e Cavaliè [8] (1902) hanno preso in esame la struttura istologica, Krahelska (1912–13) oltre che di quest'ultima si è interessata della fisiologia della ghiandola. Altri Autori ancora (Moretti 1934) [9] si sono occupati del suo valore alimentare ed hanno fatto anche l'analisi delle sostanze proteiche e dei lipidi in essa contenuti.

Krahelska ha visto che la ghiandola dell'albume è una ghiandola tubulosa, ricoperta da uno strato connettivale anisto, attraversata da un grande canale centrale che termina a fondo cieco da un lato e dall'altro nell'ovidutto. Nella parte interna il dotto è rivestito da un epitelio cilindrico ciliato per mezzo giro e pavimentoso per l'altra metà. Nel canale principale sboccano molti canali laterali, però questi ultimi sono tanto accostati l'uno all'altro che è difficile distinguerli. Anche i canali laterali hanno la stessa struttura del dotto principale. Nella ghiandola in riposo estivo si osserva un sincizio centrolobulare che riveste la parte interna del tubulo. Le nostre osservazioni, sulla istologia della ghiandola, concordano in linea di massima con quelle della Krahelska.

Sia secondo Krahelska che secondo Filhol la ghiandola dell'albume è oloçrina. Nella stessa ghiandola le varie cellule si trovano in differente stato funzionale e per esempio in individui giovani (Krahelska) si ha che mentre alla periferia della ghiandola si hanno elementi che già elaborano il secreto al centro si osservano elementi non ancora completamente differenziati.

Nella cellula in riposo il nucleo occupa quasi tutta la cellula, quando ha inizio la elaborazione del secreto si ha uno spostamento dei costituenti cellulari ed il nucleo viene spinto alla base della cellula e con l'accumularsi nel citoplasma dei granuli di secreto, che in principio sono piccoli e poi si ingrandiscono, la ghiandola assume un aspetto tale che è difficile riconoscervi la originaria struttura.

La ghiandola dell'albume presenta variazioni stagionali più o meno accentuate a seconda che la specie in esame sia più o meno resistente al freddo; ma le variazioni più evidenti si osservano in rapporto all'inanizione sperimentale durante i mesi estivi. Il digiuno porta alla riduzione del volume della ghiandola che è in relazione alla diminuzione di volume dei tubuli secretori e delle singole cellule: dapprima il nucleo aumenta di volume e la cromatina assume una disposizione filiforme, poi i nuclei diventano più ricchi in sostanze colorabili. Nei preparati di animali estivanti il nucleolo è basofilo e solo quando ha assunto notevoli dimensioni compaiono nel citoplasma altre granulazioni che assumono la stessa colorazione. I nuclei secondo Krahelska non presentano modificazioni appariscenti.

I fenomeni di inanizione si manifestano prima alla periferia e poi al centro della ghiandola. Secondo Krahelska in questo stadio si ha un passaggio di sostanza cromatica dal nucleo al citoplasma. Nella ghiandola dell'albume durante l'ibernazione o durante l'inanizione estiva sperimentale si trovano i parasomi; essi secondo Krahelska sarebbero generati dalla presenza di prodotti di dissoluzione del secreto nel citoplasma. Nell'inanizione si ha variazione del rapporto nucleo plasmatico e nelle cellule parenchimatose si riscontrano amitosi.

Nell'inanizione a temperature basse i parasomi sono alquanto grossi, debolmente basofili a strati concentrici. Nell'inanizione a caldo invece i parasomi sono più piccoli, numerosi e intensamente basofili. Filhol considera questi parasomi di origine nucleolare come rappresentanti della sostanza utilizzabile per la formazione dei granuli di secrezione; essi avrebbero lo stesso significato fisiologico di certi parasomi di ovociti di Aracnidi, descritti da Jacquiert 1936 [10] sotto il nome di « deutoplasme d'attente ». Secondo questo Autore essi

(7) G. Paravicini citato da Krahelska (1899).

(8) Beylot e Cavaliè citati da Krahelska (1902).

(9) G. Moretti, « Boll. di Zool. », V, 7 (1934).

(10) C. Jacquiert, *Recherches sur l'oogenèse des Araignées et les corps vitellins de Balbiani*, Paris 1936.

sono indipendenti dai condriosomi e dai lepidosomi; non provengono dalla fusione di questi elementi perché si sono neoformati vicino alla membrana nucleare e perché i condriosomi sussistono anche dopo la loro apparizione.

Secondo il Filhol la loro presenza nella cellula ghiandolare al termine della sua attività secretrice rappresenta una specie di precipitazione di sostanze che non vengono utilizzate per la elaborazione del secreto.

Un altro lavoro sulla citologia della ghiandola dell'albume dei polmonati è stata eseguita da Augusto Stefanelli (1930) [11] il quale con il metodo della impregnazione aurica vi avrebbe messo in evidenza il reticolo di Golgi ché partirebbe dal nucleo. Filhol non concorda con queste osservazioni.

Il materiale adoperato nella presente ricerca è rappresentato da ghiandole dell'albume prelevato da 40 esemplari di *Eobania vermiculata* (Mueller) [12] di dimensioni pressoché uguali (diametri 2 e 2,4 cm.) fissate in parte durante l'inverno (novembre-dicembre) ed in parte all'inizio e durante la estivazione. Alcuni esemplari sono stati tenuti a digiuno durante l'estate per quattro mesi. La ghiandola dell'albume è stata fissata in Helly e in Carnoy. Le sezioni di 5 micron sono state colorate oltre che con i comuni metodi istologici, anche con la Feulgen, e con il verde di metile-pironina per mettere in evidenza gli acidi nucleici; i preparati colorati con la pironina sono stati sottoposti al controllo con la ribonucleasi che è stata da noi preparata dal pancreas di bue. Prima di fissarle, le ghiandole dell'albume sono state osservate al binoculare e misurate per vedere se ci fosse una relazione tra la loro grandezza, l'aspetto esterno e particolari strutture istologiche. Nei nostri preparati istologici la ghiandola dell'albume di *Eobania* ibernante si presenta con la tipica struttura descritta da Krahelska e da Filhol e cioè come una ghiandola tubulosa composta da cellule ghiandolari piuttosto grandi con un grosso nucleo alla base più o meno schiacciato contro la parete della cellula a seconda della quantità di secreto albuminoide raccolto nel citoplasma. La maggior parte delle ghiandole di animali ibernanti esaminate possedevano poco secreto o ne erano prive per cui era ben visibile la struttura della ghiandola stessa. Abbiamo così potuto osservare tubuli di diverso diametro più grandi alla periferia e più piccoli al centro; quest'ultimi erano costituiti da cellule più piccole dei primi e possedevano una quantità minore di secreto elaborato. Si è visto in tal modo come la ibernazione colpisca in misura diversa le diverse zone della ghiandola, fatto anche questo osservato già precedentemente dagli altri Autori.

Negli animali ibernanti la ghiandola dell'albume presenta una grande variabilità rispetto al volume, al colore e alla consistenza. Nelle cellule il nucleo è grande, centrale, il nucleolo è intensamente pironinofilo e il reticolo nucleare è rado e si colora in verde con il verde di metile e in viola con la Feulgen. Il citoplasma è scarso; in alcuni esemplari vi sono uno o due parasomi intensamente pironinofili. Nelle cellule nelle quali vi sono

(11) A. STEFANELLI, « Rivista di Biologia », *12*, 118 (1930).

(12) Gli esemplari sono stati classificati dal prof. G. Bacci al quale desideriamo esprimere qui i più vivi ringraziamenti.

ancora tracce di secreto, non vi sono parasomi. Il fatto che i parasomi non siano sempre presenti nella ghiandola di animali ibernanti e manchino là

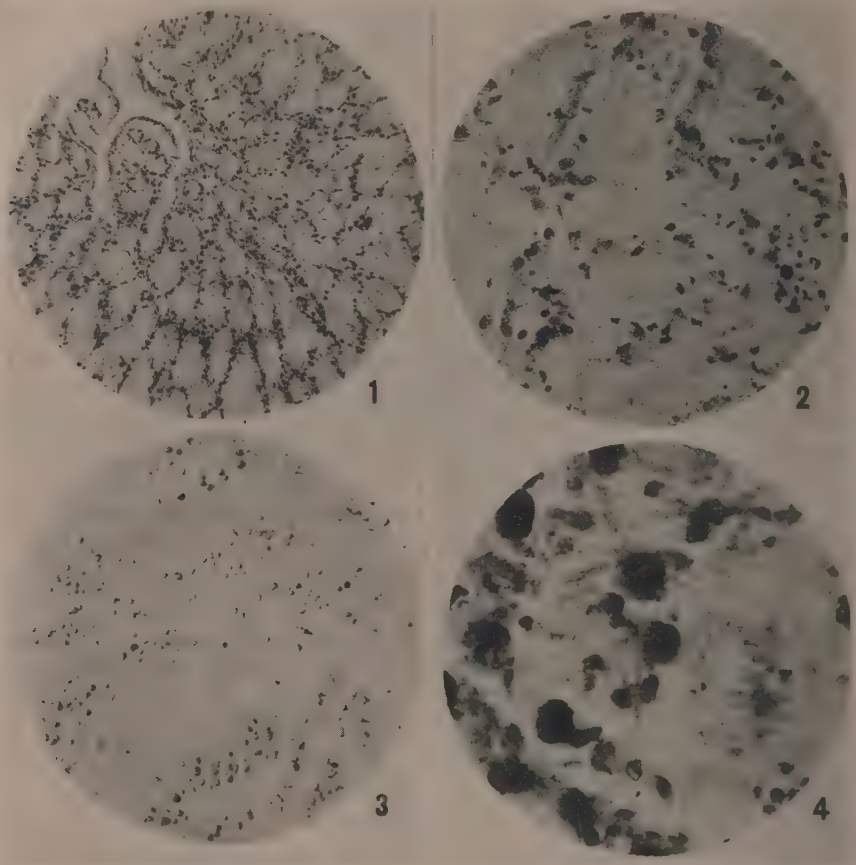


Fig. 1. – Ghiandola dell'albume durante l'ibernazione: si vedono i vari tubuli ed il dotto centrale della ghiandola (ob. 5; oc. 3– col. ematossilina ferrica)

Fig. 2. – Ghiandola dell'albume di *Eobania* ibernante; si notano i nuclei più chiari con evidente nucleolo e i parasomi scuri piuttosto radi (ob. 8 a secco; oc. 4– col. verde di metile pironina.

Fig. 3. – Ghiandola dell'albume dopo circa 4 mesi di diguno durante l'estate. Si osservano moltissimi parasomi nella parte centrale dei tubuli. I nuclei si vedono appena perchè la fot. è stata eseguita con filtro verde. (ob. 8; oc. 4– col. verde di metile pironina).

Fig. 4. – Particolare della ghiandola della foto 2 a più forte ingrandimento e colorata con la ematosilina ferrica.

dove vi sono ancora tracce di secreto può essere interpretato come dovuto ad un bassissimo tenore di RNA e degli altri composti (proteine, lipidi) che costituiscono i parasomi che non hanno raggiunto la concentrazione necessaria per dare origine a queste formazioni. Ciò in accordo alla ipotesi

di Cotronei sulla genesi della fascia vitellogena di *Antedon*. I parasomi presentano un nucleo centrale che non si colora con la pironina, con la ematossilina ferrica (nelle condizioni di mordenzatura e differenziamento del colore da noi adottate) e con il bleu di toluidina, attorno al quale vi è un mantello di lamelle concentriche che prende fortemente i coloranti usati. Dopo trattamento con la ribonucleasi la colorabilità con la pironina e con

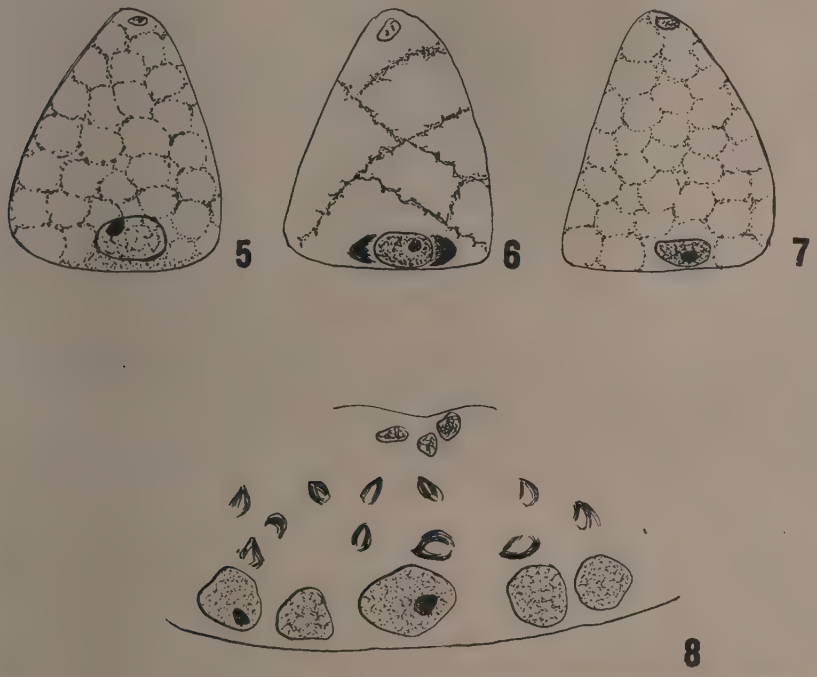


Fig. 5, 6, 7, 8. – Vari aspetti della ghiandola dell'albume rappresentati schematicamente: 5) a gennaio; 6) a maggio, attorno al nucleo ci sono ammassi intensamente pironinofili, il citoplasma è debolmente basofilo; 7) a settembre, tutto il citoplasma è debolmente basofilo ed il nucleo è spostato verso la base delle sfere di secreto; 8) a settembre dopo 4 mesi di digiuno, si osservano nuclei del sincizio e molti parasomi fra essi ed il lume del tubulo. I nuclei della parte apicale delle ghiandole fanno parte del sincizio centrolobulare. I disegni schematici sono stati detratti dai preparati colorati con la pironina-verde di metile.

il bleu di toluidina scompare ma rimane quella con la ematossilina ferrica e i parasomi sono bene visibili se osservati al microscopio in contrasto di fase.

Questo dimostra che, a somiglianza dell'ergastoplasma, delle fasce vitellogene e dei nuclei vitellini, i parasomi hanno una composizione chimica nella quale è presente l'RNA.

Negli animali all'inizio dell'estate (maggio) la ghiandola dell'albume mostra i prodromi dell'attività secretoria; il volume della ghiandola è sempre variabile ma di maggiori dimensioni, il colore è bianco crema e l'attività secretoria che s'inizia è rivelata anche dalla consistenza e dal turgore della ghiandola.

Nelle cellule ghiandolari il nucleo è spostato verso la base, il reticolo nucleare è più fitto e si colora con il verde di metile e con la Feulgen, il nucleolo è grande, pironinofilo. Il citoplasma è aumentato, leggermente basofilo al disopra del nucleo e fortemente alla base della cellula. Non si vedono parasomi. Il controllo con la ribonucleasi ha mostrato che la basofilia nucleolare e citoplasmatica è dovuta a RNA.

Negli animali sacrificati alla fine dell'estate (settembre) la ghiandola è molto grande, bianco–crema, turgidissima. Nelle cellule il nucleo è spostato verso la base con un reticolo molto fitto colorabile con il verde di metile e con la Feulgen. Il nucleolo è sempre ben evidente e pironinofilo, il citoplasma è tutto debolmente basofilo e infarcito di sfere del secreto albuminoso. Non vi sono parasomi.

Negli animali sacrificati alla fine dell'estate (settembre), ma tenuti digiuni fin da maggio, la ghiandola dell'albume era difficilmente reperibile date le sue piccole dimensioni e il colore brunastro che la faceva confondere con gli organi vicini. Nei preparati istologici non si riscontra più la tipica struttura della ghiandola, si osservano soltanto i tubuli dilatati circondati da una massa citoplasmatica nella quale non si distinguono bene le singole cellule ma si vedono i nuclei che si colorano debolmente con la Feulgen e con il verde di metile e presentano il nucleolo intensamente basofilo. Al disopra dei nuclei, fra questi e il lume dei tubuli, si osservano molti piccoli parasomi che si colorano intensamente con la pironina; questa colorazione scompare dopo trattamento con la ribonucleasi. Il citoplasma non presenta basofilia diffusa.

Riassunto e Conclusioni. – Dalle nostre osservazioni sulla ghiandola dell'albume di *Eobania vermiculata* (Mueller) risulta che alle formazioni descritte da vari Autori col nome di « parasomi » è legato dell'acido ribonucleico come si può desumere dalla applicazione della tecnica di Brachet [13].

Pensa considera i parasomi come formazioni analoghe ai paranuclei e ritiene che questi ultimi siano formazioni ergastoplasmatiche.

Dall'esame dei nostri preparati eseguiti con le tecniche specifiche risultano chiare le analogie tra i parasomi da una parte e l'ergastoplasma, alcuni nuclei vitellini e fasce vitellogene dall'altra. Infatti i parasomi compaiono nel periodo preparatorio alla elaborazione del secreto come l'ergastoplasma delle cellule ghiandolari e la fascia vitellogena degli oociti in crescita.

Quando il secreto è stato elaborato nelle ghiandole ed il vitello sintetizzato negli oociti non si riscontrano più nel citoplasma tali formazioni.

La presenza di RNA in tutte queste formazioni dà una convalida citochimica alle analogie morfologiche e funzionali. Riteniamo pertanto che la loro morfologia e la loro natura chimica autorizzino a considerarli degli indicatori, secondo la concezione di Cotronei [14], di un particolare stato funzionale di cellule ad attività secretoria.

(13) Il materiale non si è prestato per uno studio degli acidi nucleici nell'ultravioletto.

(14) G. Cotronei, « Rend. Adunanza solenne del 4 giugno 1950 », Accademia Nazionale Lincei, 5, fasc. V.

Biologia. — *La localizzazione delle sostanze sulfidriliche nel corpo bianco dei Molluschi Cefalopodi* (*). Nota di ARTURO BOLOGNARI, presentata (**) dal Socio A. RUSSO.

Ho potuto in precedenza rilevare [1] che la quantità di glutatione presente nel corpo bianco di *Sepia officinalis* L. con l'aumentare della mole corporea degli individui si accresce di poco, mentre nel corpo bianco di *Octopus macropus* Risso essa con l'età aumenta notevolmente. Ho pensato quindi che potesse esistere una relazione fra il tripeptide e la funzione nefrocitaria, che viene esplicata dal corpo bianco degli Ottopodi, ma non da quello dei Decapodi. Questa relazione implicherebbe un intervento del glutatione, forse come azione effettrice sugli enzimi, in quei processi di demolizione cui vanno incontro le sostanze proteiche per dar luogo ad un prodotto di escrezione, e che, secondo le mie ricerche, sarebbe in questo caso costituito dalla xantina [2]. Ho anche provato [3] come la xantina, pur passando nell'estratto tricloracetico, ottenuto ai fini delle determinazioni quantitative del glutatione, non influenzi per nulla i dosaggi eseguiti col metodo di Binet e Weller. La xantina costituirebbe la parte preponderante di quei globuli, di natura sicuramente purinica, che in notevole quantità si trovano nel corpo bianco degli Ottopodi, localizzati negli individui più giovani soltanto nei leucoblasti, e successivamente, col procedere dell'età, anche nei proleucociti e nei leucociti. Leucoblasti e proleucociti costituiscono in generale nei Cefalopodi il tessuto globuligeno dell'organo; i leucociti si trovano invece entro i seni che si trovano in mezzo a detto tessuto.

Ora nei leucoblasti degli Ottopodi i globuli purinici più grandi si trovano contenuti entro vacuoli, mentre quelli più piccoli sono compresi nel citoplasma. Nei proleucociti, che derivano dalla divisione per mitosi dei precedenti, e che passano attraverso tre stadi principali di maturazione, globuli grossi non se ne rinvengono quasi più; qualcuno di media dimensione si può trovare entro dei vacuoli alquanto ridotti rispetto a quelli dei leucoblasti, e quelli più piccoli si trovano nel citoplasma. Nei leucociti, che provengono dai proleucociti e che subiscono anch'essi un processo di graduale maturazione, i globuli sono sempre di dimensioni molto piccole. Ho quindi avanzato l'ipotesi [4] che, nel passaggio dalla forma di leucoblasta

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Zoologia e di Anatomia comparata dell'Università di Messina, diretto dal prof. F. Dulzetto.

(**) Nella seduta del 14 febbraio 1953.

(1) A. BOLOGNARI, *Sul contenuto in glutatione del corpo bianco di « Sepia officinalis » L. e « Octopus macropus » Risso.* « Boll. Soc. ital. biol. sper. », vol. 27, p. 898 (1951).

(2) A. BOLOGNARI, *Sulla probabile natura degli inclusi cellulari del corpo bianco dei Cefalopodi Ottopodi.* « Boll. Soc. ital. Biol. sper. », vol. 27, p. 896 (1951).

(3) A. BOLOGNARI, *Sul dosaggio del glutatione del corpo bianco dei Molluschi Cefalopodi.* « Boll. Soc. ital. Biol. sper. », 1953 (in corso di stampa).

(4) Loc. cit.

a quella di proleucocita, i globuli più grossi vengano espulsi dalla cellula, mentre quelli più piccoli restano inclusi, sicchè vengono a trovarsi in definitiva anche nel citoplasma dei leucociti. Non ho escluso tuttavia la possibilità che parte dei globuli purinici presenti nei proleucociti vengano da questi stessi prodotti, e ciò in special modo per opera di quelli del primo stadio.

In base a quanto sopra riportato, ho ritenuto degno di interesse cercare di individuare la localizzazione del glutatione nei diversi elementi che costituiscono il corpo bianco sia dei Decapodi che degli Ottopodi. A tal fine mi sono servito di individui di diversa età delle seguenti specie di Decapodi: *Loligo vulgaris* Lam., *Ommatostrephes sagittatus* D'Orb., *Sepia officinalis* L., e di Ottopodi: *Octopus vulgaris* Lam., *Octopus macropus* Risso, *Eledone cirrosa* Leach. L'organo, prelevato dagli animali ancora in vita, è stato fissato in formalina al 10 % in acqua di mare, e per una durata non superiore alle 48 ore. Ho eseguito le sezioni per congelazione, e dopo inclusione in paraffina. Le reazioni impiegate sono state quella al nitroprussiato sodico al 5 %, e quella al ferricianuro secondo il metodo di Chévremont e Frédéric. Ho dovuto scartare la tecnica proposta da Giroud e Bulliard, tendente a stabilizzare la reazione al nitroprussiato con un trattamento preliminare con una soluzione di acetato di zinco al 5 %, perché dava dei preparati troppo scarsamente colorati. Peraltro la semplice reazione al nitroprussiato, eseguita secondo i suggerimenti di Di Mattei e Dulzetto [5] a bassa temperatura, con la sua maggiore durata rispetto a quella eseguita a temperatura ambiente, mi ha consentito di fare le necessarie osservazioni, che, ai fini propostimi, dovevano servire di controllo a quanto rilevato con la tecnica di Chévremont e Frédéric. Le reazioni sono state eseguite tanto per il glutatione ridotto quanto per quello totale; in quest'ultimo caso sono ricorso ad un trattamento preventivo delle fette mediante una soluzione al 10 % di cianuro di potassio neutro. Ho voluto anche determinare la distribuzione delle sostanze sulfidriliche insolubili, e a tale scopo prima di eseguire le reazioni, ho sottoposto le fette ad un trattamento prolungato (circa un'ora) con una soluzione al 10 % di acido tricloracetico. Così operando infatti, mentre le sostanze sulfidriliche solubili vengono disciolte dall'acido, quelle insolubili si rendono manifeste, in conseguenza della denaturazione a cui vanno incontro le sostanze proteiche con radicale –SH per azione dello stesso acido.

Nel tessuto globuligeno dei Decapodi le reazioni cromatiche per la messa in evidenza del glutatione ridotto, del glutatione totale e delle sostanze sulfidriliche insolubili si sono dimostrate molto meno evidenti che in quello degli Ottopodi. La differenza si nota sempre qualunque sia l'età degli individui considerati.

Nei Decapodi gli individui più grossi presentavano poi una leggera differenza in aumento di glutatione ridotto rispetto ai più piccoli. Negli stessi Decapodi il glutatione ridotto, presente nel citoplasma dei leucoblasti e dei proleucociti, appare essere in quantità maggiore di quella contenuta nel

(5) P. Di Mattei e F. Dulzetto. *Dimostrazione istochimica del glutatione e sua distribuzione in alcuni organi*. « Rend. Acc. naz. dei Lincei », vol. 8. ser. 6ª. p. 317 (1928).

citoplasma dei leucociti, in cui le reazioni cromatiche sono appena apprezzabili. Fra leucoblasti e proleucociti degli stessi animali nessuna differenza riesce possibile apprezzare. Dopo l'azione del cianuro di potassio, le reazioni cromatiche nei diversi tipi di cellule anzidette non appaiono intensificate e ciò è da mettersi in relazione con la quantità piuttosto esigua di glutatione ossidato, come del resto avevo già riscontrato con l'analisi quantitativa. Il trattamento con acido tricloracetico determina invece delle colorazioni che sono, per quanto in modo non eccessivo, più intense. La distribuzione delle sostanze sulfidriliche insolubili nelle diverse cellule è tuttavia del tutto simile a quella delle solubili.

Nel corpo bianco degli Ottopodi la differenza, per quanto concerne il glutatione ridotto, fra gli individui più piccoli e quelli più grandi, è rimarchevole. Nei primi difatti la quantità del tripeptide è abbondante nel citoplasma dei leucoblasti, mentre è scarsa nei proleucociti ed ancor più nei leucociti. Nelle sezioni, dopo aver eseguito le reazioni, già a piccolo ingrandimento si notano delle zone che sono molto più intensamente colorate e che spiccano sul resto del campo. L'esame a forte ingrandimento permette di appurare che dette zone sono costituite da leucoblasti. Negli Ottopodi adulti, mentre il citoplasma dei leucoblasti si colora quasi con la stessa intensità, il citoplasma dei proleucociti, ed in special modo di quelli dei primi stadi di maturazione, presentano una colorazione più accentuata, rispetto a quella che si riscontra negli elementi corrispondenti degli individui più giovani. In generale ho potuto osservare che i leucoblasti assumono una colorazione la cui intensità è sempre superiore a quella di tutte le altre cellule, ma pressocché costante negli individui delle diverse età; invece i proleucociti, coll'avanzare dell'età, presentano una reazione cromatica che va man mano intensificandosi. Fra gli stessi proleucociti la colorazione è più accentuata in quelli del primo stadio, e meno in quelli dell'ultimo stadio. Nei leucociti la colorazione si rileva appena. Coll'impiego del cianuro di potassio non mi è stato possibile ottenere dei quadri nettamente differenti, rispetto a quelli riportati in precedenza, e ciò per le stesse ragioni che ho avanti esposte. Il trattamento con acido tricloracetico provoca delle reazioni cromatiche più intense, ma per quanto riguarda la diversità di distribuzione delle sostanze sulfidriliche insolubili i reperti si sono dimostrati del tutto simili a quelli avuti per le sostanze solubili.

Da quanto ho riferito si rileva come l'esame istochimico confermi i risultati ottenuti con le determinazioni quantitative, onde pare dimostrato che effettivamente nel corpo bianco dei Decapodi la quantità di sostanze sulfidriliche solubili sia minore di quella del corpo bianco degli Ottopodi. In questi ultimi poi la differenza fra quantità minima riscontrata negli individui più piccoli, e massima in quelli più grandi, sembra trovare piena rispondenza nell'intensificarsi progressivo della funzione escretiva. Appare quindi molto probabile che tale funzione, inizialmente esplicata soltanto dai leucoblasti, venga successivamente svolta anche dai proleucociti. Nei Decapodi in cui essa non ha luogo, non si manifestano variazioni sensibili delle sostanze con radicale —SH.

È interessante rilevare anche come la diversa concentrazione nei vari elementi del corpo bianco degli Ottopodi riguardi anche le sostanze sulfidriliche insolubili. A tal proposito va ricordato che, secondo Hopkins [6] esisterebbe una relazione fra sostanze proteiche con radicale —SH ed il glutatione, relazione che egli ha espresso con l'equazione:

$$2P{-}SH + G{-}S{-}S{-}G \rightleftarrows P{-}S{-}S{-}P + 2G{-}SH,$$

in cui P—SH rappresenta la catena proteica con radicale —SH, G—S—S—G il glutatione ossidato, e G—SH il glutatione ridotto. Tale relazione sembra trovi appoggio nelle mie osservazioni, per quanto ritengo che siano necessarie ulteriori indagini.

Fisiologia. — *Sulla formazione di actomiosina* [*]. Nota di Paolo Crepax, presentata [**] dal Socio G. C. Pupilli.

È noto che la composizione e le proprietà di estratti proteici di muscolo ottenuti a forze ioniche elevate (μ 0,35) dipendono dalla durata dell'estrazione [Banga e Szent-Györgyi [1]], il che è da riferire alla combinazione progressiva della miosina con una proteina dello stroma, l'actina.

I diagrammi elettroforetici di estratti ottenuti in durate di contatto progressivamente crescenti, sono riprodotti nella fig. 1.

Dall'esame dei proteinogrammi [2] risulta come il gradiente β, di notevole sviluppo negli estratti di breve durata, scompare successivamente. Il gradiente α si comporta in modo inverso; e con l'aumentare dell'importanza del gradiente α, si accrescono la viscosità, la torbidità e la birifrangenza da flusso delle soluzioni. Sul fondamento di questi dati s'identifica la miosina α di Dubuisson con l'actomiosina di Szent-Györgyi e la miosina β di Dubuisson con la miosina propriamente detta di Szent-Györgyi [Dubuisson [3]].

L'actomiosina presenta la proprietà di dissociarsi per azione dell'adenosintrifosfato (ATP) in actina e miosina, e tale dissociazione si accom-

(6) F. G. Hopkins, *Glutatione*, « Biochem. journ. », vol. 19, p. 787 (1925).

(*) Lavoro eseguito nel Laboratorio di Biologia generale dell'Università di Liegi e nell'Istituto di Fisiologia umana dell'Università di Bologna.

(**) Nella seduta del 14 febbraio 1953.

(1) J. Banga u. A. Szent-Györgyi, « Stud. Inst. med. Chem. Univ. Szeged », I, 5 (1941).

(2) Nel confrontare tali diagrammi tra loro si tenga conto del fatto che la percentuale di actomiosina compatibile con un'analisi elettroforetica tecnicamente soddisfacente, è piccola: all'incirca, 1,0–1,5 mg per ml di estratto, quando s'impieghino cellule di sezione quadrata [6 mm × 6 mm; cfr. Dubuisson, Distèche e Debot, « Arch. Sci. biol. », XXXV, 251 (1951)]. Un tasso di actomiosina superiore al valore indicato, obbliga a diluire l'estratto per un'analisi elettroforetica. Nei proteinogrammi totali, il grado della diluizione effettuata può desumersi dallo sviluppo del gradiente M: poiché la quantità di costituenti miogeni che si raccolgono in tale gradiente, può considerarsi in prima approssimazione costante in uno stesso tipo di tessuto muscolare, lo sviluppo del gradiente medesimo è inversamente proporzionale alla diluizione [cfr. anche Crepax, « Biochim. biophys. Acta », VII, 87 (1951)].

(3) M. Dubuisson, « Biol. Rev. », XXV, 46 (1950).

pagna a un forte abbassamento della viscosità specifica [Banga e Szent-Györgyi [1]; Straub [4]]. Poiché la viscosità di soluzioni contenenti solo miosina non è modificata dall'ATP, mentre la caduta della viscosità è massima nelle soluzioni di actomiosina pura, sembra *a priori* possibile desumere le proporzioni relative di miosina e di actomiosina contenute in un dato estratto dall'abbassamento di viscosità più o meno grande prodottovi dall'ATP. Questa possibilità esisterebbe in effetto secondo Csapò [5] e del resto

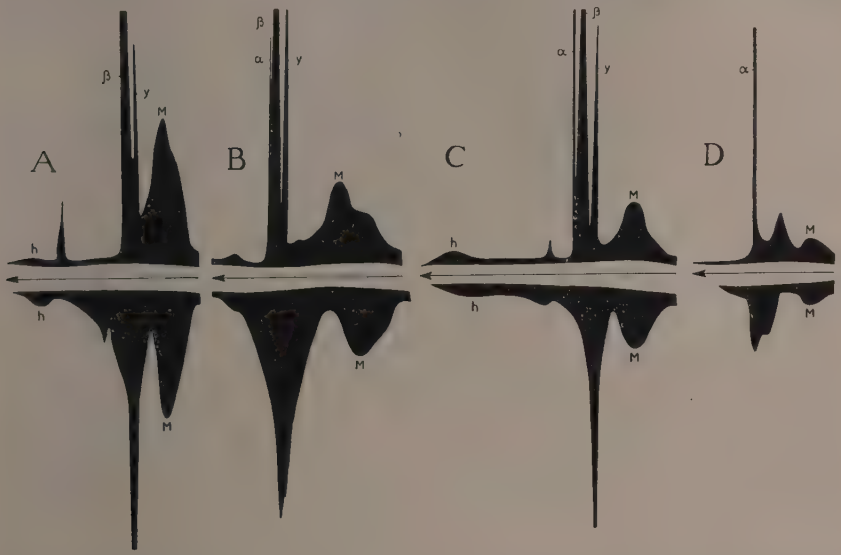


Fig. 1. – Proteinogrammi elettroforetici di estratti ottenuti da muscoli normali di uno stesso Coniglio, in differenti tempi di estrazione, mediante soluzione di Weber–Edsall.

A (esp. 344 III): estrazione di 10 min con 2 ml di soluzione per g di polpa.
B (esp. 346/IV): estrazione di 3 h con 2 ml di soluzione per g di polpa.
C (esp. 349/IV): estrazione di 8 h con 2 ml di soluzione per g di polpa; al termine dell'8ª h, avanti la centrifugazione si addizionano altri 2 ml di soluzione per g di polpa.
D (esp. 369/II): estrazione di 24 h con ml 3 di soluzione per g di polpa; avanti la centrifugazione, addizione di altri 4 ml per g di polpa.
Il gradiente α (actomiosina), assente negli estratti ottenuti con breve tempo di contatto, aumenta progressivamente d'importanza. Con estrazioni di 24 h si ottengono soluzioni contenenti esclusivamente actomiosina, mentre la miosina propriamente detta (gradiente β) è assente. Coll'aumentare della quantità di actomiosina aumenta la viscosità degli estratti: è necessario pertanto diluire in maggior misura [si veda la nota (2)].

diversi altri Autori prima di lui, avevano più o meno esplicitamente utilizzato i risultati delle determinazioni viscosimetriche a fine di valutazioni quantitative. Ma con l'impiego di tale metodo di analisi si conseguirebbe lo scopo, a condizione che nel processo di formazione dell'actomiosina le due proteine si combinassero secondo un rapporto costante. È da tenere presente che actina e miosina possono invece combinarsi, almeno *in vitro*, in proporzioni diverse; e le actomiosine così ottenute differiscono tra loro, in primo luogo, proprio per il comportamento della viscosità specifica delle

(4) F. B. STRAUB, «Stud. Inst. med. Chem. Univ. Szeged», II, 1 (1942).
5) A. CSAPÒ, «Amer. J. Physiol.», CLX, 46 (1950).

loro soluzioni in presenza di ATP: più precisamente, l'abbassamento della viscosità prodotto da tale sostanza diventa maggiore con l'accrescersi delle proporzioni di actina [Straub [4]; Balenovic e Straub [6]]. Ora, si tratta di sapere se nell'actomiosina « naturale », vale a dire l'actomiosina che si estrae dal muscolo mediante soluzione di Weber–Edsall, actina e miosina si uniscono in proporzioni costanti ovvero variabili: è chiaro che nel primo caso la caduta di viscosità provocata dall'ATP dipenderà soltanto dalla quantità di actomiosina formatasi e quindi permetterà di valutare tale quantità; nel secondo caso, il comportamento della viscosità dovrebbe informarci prevalentemente circa alla costituzione dell'actomiosina presente nel mezzo [loco citato [4], [6]].

Questo problema mi sono proposto di esaminare, confrontando sistematicamente i risultati delle determinazioni viscosimetriche con quelli della analisi elettroforetica. Le determinazioni di viscosità sono state eseguite secondo la tecnica e nelle condizioni indicate da Banga e Szent-Györgyi [1]. La caduta di viscosità prodotta dall'ATP rappresenta quella che con Straub [4] viene definita l'attività del campione di actomiosina in esame; la quale attività viene espressa con riferimento a un'unità arbitraria, attribuendosi il valore di *100* all'attività della miosina B di Banga e Szent Györgyi, vale a dire all'actomiosina naturale.

Per il calcolo dei valori di attività dei diversi estratti, mi sono servito delle curve determinate da Mommaerts [7] [cfr. Hamoir [8]]. I muscoli scheletrici di Coniglio, sezionati mediante microtomo a congelazione, venivano sottoposti a estrazione col liquido di Weber–Edsall (KCl 0,6 M; $NaHCO_3$ 0,04 M; Na_2CO_3 0,01 M) aggiunto nella proporzione di 3 ml per g di muscolo, alla temperatura di 2° C e per le durate indicate appresso.

L'attività dei diversi campioni è risultata essere la seguente, espressa in unità arbitrarie (vedi sopra): *3* dopo 10 min di estrazione; *12* dopo 30 min; *28* dopo 1 h; *53* dopo 3 h; *100* dopo 6 h; *119* dopo 9 h; *138* dopo 24 h. Ciascuno dei valori indicati rappresenta il valore medio di 5 determinazioni.

I valori sopra riferiti non variano parallelamente alla superficie dei gradienti α e β dei proteinogrammi e il disaccordo è particolarmente netto nel caso di soluzioni proteiche ottenute con estrazioni di media durata (6–8 h), quando sono rilevabili valori di attività pari a *100*, mentre esiste ancora una notevole quantità di miosina propriamente detta. Conforme alle premesse del metodo viscosimetrico, potremo concludere che l'actomiosina formata tra la 6ª e la 8ª h è già attiva al 100 per 100, pur non essendo il processo di formazione ultimato: tuttavia, l'ammettere che da una actomiosina di prima formazione, in cui actina e miosina entrano nel rapporto per esempio di 1 a 5 [cfr. Straub [4]; Balenovic e Straub [6]], si possa passare ad actomiosine progressivamente più ricche di actina, e quindi più attive,

(6) K. Balenovic u. F. B. Straub, «Stud. Inst. med. Chem. Univ. Szeged», II, 17 (1942).
(7) W. F. H. M. Mommaerts, « Arch. Kemi Miner. Geol. », XIX A, 17 (1945).
(8) G. Hamoir, « Bull. Soc. Chim. biol. », XXXI, 118 (1949).

equivale ad escludere la possibilità di risalire dai risultati delle determinazioni viscosimetriche alla valutazione delle quantità relative di miosina e actomiosina.

Csapò [5] fonda le sue conclusioni divergenti sui risultati di ricerche non pubblicate di Snellman e Erdös, eseguite mediante ultracentrifuga, dalle quali risulterebbe che « actin binds a definite amount of myosin to form actomyosin. Myosin and actin in excess is left unbound in solution. They accept Straub's value of 1 actin to 2,5 myosin for practical purposes and suggest an empirical curve, which enables one to read directly the values for actin, myosin and actomyosin from the viscosity data ».

La discordanza da me rilevata tra i risultati ottenuti mediante elettroforesi e quelli viscosimetrici, difficilmente potrebbe dipendere soltanto dalle particolarità della curva in riferimento alla quale sono stati calcolati i valori di attività [9]. Ulteriori ricerche potranno permettere di vedere più addentro le ragioni di tale discordanza; mi preme ora chiarire un dato sperimentale che si riferisce al comportamento elettrocinetico dell'actomiosina.

L'elettroforesi non dimostra l'esistenza di proprietà elettrocinetiche diverse in campioni di actomiosina ottenuti in tempi diversi di estrazione. Questo fatto, a mio avviso, non può considerarsi in contrasto con la possibilità che il rapporto quantitativo secondo cui actina e miosina si combinano, vari nel corso del processo di formazione dell'actomiosina; e ciò, sia perché una variazione del rapporto anzidetto importa essenzialmente modificazioni della massa e non di necessità variazioni della carica della molecola [10], sia perché in precedenti osservazioni [Crepax [11]] ho potuto rilevare come il metodo elettroforetico sia inadeguato a cogliere modificazioni anche importanti della actomiosina [12].

È da considerare, del resto, che la determinazione della velocità di migrazione di una data proteina importa un errore notevole ed è quindi relativamente raro trovare valori che facciano certi di una effettiva modificazione del comportamento elettrocinetico della proteina medesima.

(9) CSAPÒ [5] non riporta nella pubblicazione citata la curva impiegata per risalire dai risultati delle determinazioni viscosimetriche alla quantità di actina, miosina e actomiosina.

(10) Il dott. Hamoir, del Laboratorio di Biologia generale dell'Università di Liegi, mi segnalava appunto di aver potuto di frequente differenziare mediante l'ultracentrifugazione actomiosine che presentavano un medesimo comportamento elettroforetico.

(11) P. CREPAX, « Rend. Acc. Naz. Lincei », Cl. Sci. fis., mat. nat., ser. 8ª, XII, 439 (1952).

(12) Inoltre, quando si procede alla precipitazione dell'actomiosina ottenuta da muscoli che hanno subito la decongelazione, un'acidificazione del mezzo da pH 6 a pH 5,5 provoca in alcuni casi il ridisciogliersi parziale del precipitato già formatosi, anziché un aumento del medesimo. L'analisi elettroforetica dei campioni di actomiosina, la cui solubilità presenta tale comportamento anomalo, non rivela proprietà elettrocinetiche che si discostino in modo significativo dalla norma.

Questo fatto era stato notato nel corso di ricerche da me eseguite in collaborazione con HÉRION, « Biochim. biophys. Acta », VI, 54 (1950), sulle modificazioni delle proteine muscolari causate dalla contrattura da decongelazione: non venne poi riferito nella pubblicazione rispettiva, come non attinente in modo diretto ai fenomeni in istudio.

COMMEMORAZIONI

Commemorazione del Socio Gaetano Rovereto

Letta (*) dal Socio MICHELE GORTANI

Gaetano Rovereto finiva la sua vita terrena, più che ottantenne, il 20 dello scorso novembre. È scomparsa con lui una figura eminente della geologia italiana; che la nostra scienza aveva onorata anche oltre i confini della patria, e spaziando in campi svariati aveva in tutti lasciato un segno permanente del suo spirito sagacemente indagatore.

Era nato il 13 novembre 1870 a Mele presso Voltri. Fu allievo di tutti e di nessuno; perchè dopo i primissimi anni non frequentò scuole, e si fece da sè, come la coltura generale, così pure la coltura specifica e professionale, attingendo alle fonti che di volta in volta gli parevan migliori. E dell'autodidatta ebbe i pregi e i difetti: preminenti i primi con l'indipendenza e originalità di vedute e di direttive; riconoscibili i secondi in qualche deficienza di critica e nel metodo troppo personale di espressione e di esposizione.

Negli anni della sua giovinezza – come in certa misura anche oggi – era vivo e diffuso in Liguria l'amore per la storia naturale. Arturo Issel, naturalista completo secondo l'antico stampo, poteva raccogliere attorno a sé, nella Società Ligustica di Scienze naturali e geografiche, un gruppo zelante di ricercatori appassionati, mentre gettava le basi del Museo geologico dell'ateneo genovese e promoveva e compiva alacremente studi geologici, paleontologici, paletnologici. Senofonte Squinabol viveva i suoi migliori anni di studioso. Non poteva a meno di agire questa corrente di pensiero e di azione su l'animo del nostro giovane, già aperto alle scienze naturali, per sua testimonianza, mercé l'insegnamento paterno di Luigi Sbuttoni, che egli ebbe « per libera scelta, a maestro di botanica, di mineralogia, di geologia » (1).

Non desta perciò meraviglia la maturità di cognizioni e di pensiero che si rivela sin dal primo lavoro di Gaetano Rovereto. L'autore era poco più che ventenne, ma poteva affermare senza iattanza di avere perlustrato « per diversi anni, nelle vacanze autunnali », l'estesa regione ligure degli scisti e delle serpentine antiche, così da poterne dare un'illustrazione geologica ricca di osservazioni personali e nuove. Eppure soltanto in quell'anno, 1891, e senza titoli accademici, egli entrava ufficialmente nell'università, come

(*) Nella seduta del 14 febbraio 1953.

(1) Cfr. G. ROVERETO, *A Luigi Sbuttoni* (dedica premessa al lavoro sulle diabasi e serpentine della Liguria occidentale, 1894).

Assistente volontario presso il Museo geologico; e soltanto dieci anni più tardi passava nel ruolo degli assistenti ordinari, dopo un periodo di straordinariato con mansioni di ordinatore delle collezioni, che gli diede occasione ed impulso allo studio diligente dei fossili. Ma nuovi indirizzi di studi lo attraevano; e, senza trascurare le ricerche su problemi controversi della difficile geologia ligure, le venne alternando con sistematiche indagini rivolte a interpretare la genesi delle forme vallive e delle forme costiere della sua terra.

In questi campi svariati tanto si afferma, che nel 1904 il Consiglio superiore dell'Istruzione equipara i suoi titoli alla laurea in scienze naturali, e l'anno successivo gli viene conferita la libera docenza in geologia, e con essa il primo incarico d'insegnamento. Era il corso di geologia applicata: incarico ben meritato anche per gli studi già da lui pubblicati in tal campo, ed ai quali dava risalto la redazione del *Giornale di Geologia pratica*, da lui fondato e diretto con il collega Vinassa de Regny fin dal 1903.

Offertagli nel 1909 dal Governo Argentino una consulenza geologica presso la Direzione generale dell'Irrigazione, il Rovereto non si lasciò sfuggire il nuovo incarico, tanto più importante in quanto un larghissimo programma di grandi lavori pubblici si stava per attuare nelle varie parti di quella grande Repubblica. E ne seppe approfittare così bene, che in poco più di quattr'anni riuscì a visitare territori vastissimi, dal Chaco alla Patagonia. Naturalmente non era il caso d'intraprendere veri rilevamenti geologici; ed egli saggiamente si attenne al partito di circoscrivere approfondite ricerche su alcuni temi soltanto, e di sviluppare largamente le indagini geomorfologiche, nelle quali si era cimentato in patria con tanto successo.

Rientrato in Italia, egli non si staccò se non fugacemente dalla nativa Liguria, e attese a elaborare i risultati dei lunghi viaggi compiuti e delle sempre rinnovate ricerche. Fra queste non si possono dimenticare le indagini strutturali, a cui non abbiamo ancora accennato. Fu il Rovereto tra i primissimi in Italia ad accettare gli arditi concetti della teoria dei grandi ricoprimenti ed a tentare di applicarli a varie parti del nostro suolo: con risultati che se anche in parte caduchi, conservano per le montagne liguri un riconosciuto valore ed hanno in qualche misura contribuito al progresso delle moderne vedute tettoniche.

Raggiungeva i limiti di età nel 1917 il prof. Arturo Issel; ma solo nel 1922, vincendo il primo concorso che gli si offriva dopo il rimpatrio, Gaetano Rovereto potè salire la cattedra genovese, che nessuno più di lui aveva meritato e di cui tanto accrebbe il prestigio. Nella vasta e ricca produzione scientifica del Rovereto emergono in particolare la *Liguria geologica* e il *Trattato di geomorfologia.*

Quest'ultimo, in notevole parte innovatore quando comparve or sono quasi trent'anni, e nel quale tanta esperienza e tante ricerche e vedute originali sono trasfuse, continua ad essere il solo trattato italiano di geologia morfologica e di geografia fisica atto a sostenere il confronto con i migliori stranieri.

La *Liguria geologica* può dirsi monumentale, non soltanto per la mole dell'opera, ma per l'enorme lavoro analitico che l'ha preparata, per la compiutezza della rappresentazione, per le interpretazioni strutturali e paleogeografiche in essa delineate.

A queste opere fanno degna corona gli studi che le hanno di lunga mano promosse e accompagnate: da quelli giovanili ma già apportatori di elementi nuovi sulle ofioliti liguri a quelli ultimi sulle ofioliti alpine e appenniniche, dalla geomorfologia delle coste a quella del Gran Paradiso, dai lavori su la Patagonia e l'Argentina centrale agli accuratissimi contributi per la descrizione geologica dei fogli di Rapallo e di Chiavari, dalle singole descrizioni stratigrafiche alle sempre meglio elaborate interpretazioni morfologiche e strutturali. Né si possono dimenticare gli studi paleontologici, fra cui hanno più spiccato rilievo le monografie su gli anellidi fossili, sui molluschi terziari della Liguria, sui vertebrati terziari del Paranà, nonché su gli strati « araucani » dell'Argentina: memoria quest'ultima che per la prima volta permise di datare in modo sicuro questa formazione discussa e metterla in correlazione con il Pliocene nordamericano ed europeo.

Meritamente quindi l'Accademia Nazionale dei Lincei, che aveva accolto il Rovereto fra i soci corrispondenti nel 1922 e lo aveva insignito del premio reale nel 1926, lo promosse nel 1947 a socio nazionale. Lo ebbero socio corrispondente l'Accademia delle Scienze di Torino, accademico onorario l'Università di La Plata, corrispondente la Società geografica Italiana e la Società Argentina « Gaea » di Studi geografici.

Di famiglia patrizia, Gaetano Rovereto non amava fregiarsi del titolo di marchese a cui aveva diritto; e la nobiltà dei natali lasciava trasparire soltanto nella finezza del tratto, nella generosità dell'animo, nella sollecitudine verso gli umili. Schivo di onori e di manifestazioni rumorose, visse anche troppo appartato nel suo studio e nei suoi studi. Ma i tanti che nella sua lunga vita ebbero da lui ammaestramento e consiglio, i tanti che ebbero a sperimentarne l'affabilità accogliente e modesta, sanno come a lui convengano le parole che egli dedicava al suo primo maestro, esaltandone la figura « che fu quella dell'uomo retto, sapiente e buono ».

Pubblicazioni del prof. Gaetano Rovereto.

1. *La serie degli scisti e delle serpentine antiche in Liguria.* Parte I e II. « Atti Soc. Ligustica Sc. nat. e geogr. », II, pp. 325–46 (1891), e IV, pp. 97–141, 4 figg., 2 t. (1893).
2. *Carta ipsometrica e batimetrica della Liguria marittima* in collab. con S. Squinabol. In A. Issel, *Liguria geologica e preistorica*, Genova 1892.
3. *Nuove considerazioni sulla tettonica della zona scistosa antica di Voltri.* « Atti Soc. Lig. Sc. nat. », III, pp. 130–31 (1892).
4. *Orogenesi dell'Appennino Ligure.* « Riv. scient. ind. », Firenze, 3 pp. (1892).
5. *Sezione geologica da Genova a Piacenza.* « Atti Soc. Lig. Sc. nat. », III, pp. 215–35, 1 t. (1892).
6. *Origine delle anfiboliti della serie arcaica ligure.* « Boll. Soc. geol. It. », XII, pp. 94–95 (1893).

7. *Gneiss del Permocarbonifero.* Ibid., pp. 95–97.
8. *Fenomeni di contatto nel granito del Savonese.* Ibid., XIII, pp. 7–8 (1894).
9. *Osservazioni geologiche lungo la nuova linea ferrata Genova–Ovada.* Ibid., pp. 68–96, 1 t.
10. *Diabasi e serpentine terziarie della Liguria occidentale.* « Atti Soc. Lig. Sc. nat. », V, pp. 163–74, 1 t. (1894).
11. *Relazione della gita fatta all'isolotto e alla grotta di Bergeggi il 10 giugno 1894.* (In collab. con S. Orlandi). Ibid., pp. 384–88.
12. *Di alcuni anellidi del Terziario in Austria.* Ibid., VI, pp. 152–58, 1 t. (1895).
13. *Arcaico e Paleozoico nel Savonese.* « Boll. Soc. geol. It. », XIV, pp. 37–75, 4 t. (1895).
14. *Diaspri permiani a radiolarie di Montenotte* (in collab. con C. F. Parona). « Atti R. Acc. Sc. Torino », XXXI, pp. 123–27, 1 t. (1895).
15. *Alcune note sul porto di Genova.* « Atti Soc. Lig. Sc. nat. », VII, pp. 201–19 (1896).
16. *Sinonimie degli anellidi più frequentemente citati nel Terziario d'Italia.* « Riv. It. Paleont. », II, pp. 323–25 (1896).
17. *Sulla stratigrafia della valle del Neva (Liguria occidentale).* « Boll. Soc. geol. It. », XVI, pp. 77–91 (1897).
18. *Note preventive sui pelecipodi del Tongriano ligure.* « Atti Soc. Lig. Sc. nat. », VIII, pp. 309–22 (1897) e IX, pp. 153–87 e 312–17 (1898).
19. *Carta geologica della tratta Pegli–Rossiglione.* Scala 1 : 25.000. In TARAMELLI T., *Nozioni geologiche in occasione del traforo della galleria del Turchino e di Cremolino,* Roma, 1898.
20. *Serpulidae del Terziario e del Quaternario in Italia.* « Palaeont. It. », IV, pp. 47–92, 2 t. (1898).
21. *Prime ricerche sinonimiche sui generi dei gasteropodi.* « Atti Soc. Lig. Sc. nat. », X, pp. 101–10 (1899).
22. *Carta geologica dei territori di S. Giustina e Sassello.* (In collab. con A. Issel). Scala 1 : 50.000. Genova 1900.
23. *Illustrazione dei molluschi fossili tongriani posseduti dal Museo geologico della R. Università di Genova.* « Atti R. Univ. Genova », XV, pp. 1–210, 9 t. (1900).
24. *Briozoi, anellidi e spugne perforanti del neogene ligure.* « Palaeont. It. », VII, pp. 219–234, 5 fig., 1 t. (1901).
25. *Studio geologico di alcune ferrovie progettate attraverso l'Appennino Ligure.* « Atti. Soc. Lig. Sc. nat. », XII, 10 pp. (1901).
26. *Nuovi studi geologici sulle grandi gallerie transappenniniche di recente progettate.* Ibid., XIII, 1902, e « Giorn. Geol. prat. », I, pp. 44–49 (1902).
27. *Profilo geologico della galleria Isoverde–Rigoroso.* Genova, 1902.
28. *Geomorfologia delle coste, ossia appunti per spiegare la genesi delle forme costiere.* « Atti Soc. Lig. Sc. nat. », XIII–XIV, 190 pp., 40 figg. (1902–03).
29. *Sull'età del macigno dell'Appennino Ligure.* « Boll. Soc. geol. It. », XXII, pp. 390–394 (1903).
30. *Escursioni geologiche nel gruppo del Marguarese.* Ibid., pp. 399–417, 7 figg.
31. *Anellidi del terziario.* « Riv. It. Paleont. », IX, 1903, pp. 103–04.
32. *Giornale di Geologia pratica.* Fondazione e direzione, in collab. con P. Vinassa de Regny. Voll. I–VI (1903–08).
33. *Monografia degli anellidi fossili. - I. Terziario.* « Palaeont. It. », X, pp. 1–74, 2 figg., 4 t. (1904).
34. *Contributo allo studio dei Vermeti fossili.* « Boll. Soc. geol. It. », XXIII, pp. 67–82, 1 fig., 1 t. (1904).
35. *La sistemazione della bocca del porto di Genova.* « Giorn. Geol. prat. », II, pp. 94–96, (1904).
36. *La zona marmifera della Pania della Croce nelle Alpi Apuane.* Ibid., pp. 157–63, 2 figg.
37. *Nuovo massiccio cristallino dei dintorni di Calizzano.* « Atti Soc. Lig. Sc. nat. », XV, 8 pp., 3 figg. (1904).

38. *Geomorfologia delle valli Liguri.* « Atti R. Univ. Genova. », XIX, pp. 1–226, 50 figg., 3 t., 1 carta tett. (1904).
39. *Relazione della escursione sull'Etna compiuta dalla Società Geologica Italiana il 21 e 22 settembre 1904.* « Boll. Soc. geol. It. », XXIII, pp. 66–70 (1904).
40. *Guida delle Alpi Apuane* (In collab. con E. Questa e L. Bozano), 370 pp., Genova 1905, 2ª ed., 1922.
41. *Zone di flora in Liguria.* « Giorn. Geol. prat. », III, pp. 47–48 (1905).
42. *Sull'età degli scisti cristallini della Corsica.* « Atti R. Acc. Sc. Torino », XLI, pp. 72–86, 6 figg. (1905–06).
43. *La questione della direttissima Genova–Tortona.* « Giorn. Geol. prat. », IV, pp. 46–48 (1906).
44. *Di un recente studio sull'attività morfologica delle correnti marine.* Ibid., pp. 110–16.
45. *Programma del corso di Geologia applicata.* Ibid., pp. 241–42.
46. *Di alcuni recenti studi sulla serie dei terreni neogenici del bacino ligure–piemontese.* « Atti Soc. Lig. Sc. nat. », XVII, 7 pp. (1906).
47. *Geomorfologia del gruppo del Gran Paradiso.* « Boll. Club Alp. It. », XXXVIII, pp. 199–271, 24 figg. (1906).
48. *La evoluzione fisica e la teoria delle cause attuali.* « Riv. Ligure Sc. L. e A. », n. 4, 5 pp. (1906).
49. *Una lettera del Davis sul concetto del ciclo erosivo applicato allo studio delle forme glaciali.* « Arti Soc. Lig. Sc. nat. », XVIII, 17 pp., 4 figg. (1907).
50. *L'isola di Capri.* Ibid., 6 pp., 1 t.
51. *Sur le recouvrement du territoire de Savona (Ligurie).* « C. R. Soc. géol. France », pp. 9–10 (1907).
52. *L'île de Capri est un lambeau de recouvrement.* « C. R. Soc. géol. France », pp. 162–63 (1907).
53. *L'alpinismo in Corsica.* « Ann. Sez. Ligure C.A.I. » (1907).
54. *L'alta montagna in Corsica.* « Riv. Lig. Sc. L. e A. », n. 4, 12 pp. (1907).
55. *Studi di Geomorfologia.* 210 pp., 56 figg., 7 t., Genova (1908).
56. *Su di una nuova forma di ostrica del pliocene italiano.* « Riv. It. Paleont. », XIV, pp. 103–07, 1 t. (1908).
57. *La zona di ricoprimento del Savonese e la questione dei calcescisti.* « Boll. Soc. geol. It. », XXVIII, pp. 390–418, 13 figg., 1 t., 1 carta geol. (1909).
58. *I monti della Calabria in rapporto ai terremoti.* « Riv. mens. Club Alp. It. », pp. 152–53, 1 fig. (1909).
59. *Conclusions d'une étude sur l'oligocène des Apennins de la Ligurie.* « Bull. Soc. géol. France », (4) X, pp. 66–72, 1 fig. (1910).
60–64. *Studi di Geomorfologia Argentina.*
I. *La Sierra di Cordova.* « Boll. Soc. geol. It. », XXX, pp. 1–19, 9 figg., 2 t. (1911).
II. *Il Rio della Plata.* Ibid., XXX, pp. 313–50, 12 figg., 3 t. (1911).
III. *La Valle del Rio Negro.* Ibid., XXXI, pp. 181–237 (1912), e XXXII, pp. 101–142, 62 figg., 8 t. (1913).
IV. *La Pampa.* Ibid., XXXIII, pp. 75–128 (1914), e XXXIX, pp. 1–49, 20 figg., 5 t., (1920).
V. *La penisola Valdéz.* Ibid., XL, pp. 1–47, 16 figg., 1 t. (1921).
65. *Sulla morfologia del lago di Nauhuel Huapí e della valle del Rio Negro.* « Rend. Lincei », (5) XX, 2, pp. 526–27 (1911).
66. *Sulle correlazioni del Pampeano con i fenomeni quaternari della glaciazione.* Ibid., XXI, 2, pp. 460–62 (1912).
67. *Los cocodrilos fósiles en las capas del Paraná.* « An. Mus. nac. Hist. nat. », Buenos Aires, XXII, pp. 339–68, 18 figg., 3 t. (1912).
68. *Sulla tettonica della Pampa e delle regioni che la circondano.* « Rend. Lincei », 5, XXII, 1, pp. 647–52 e 720–22, 3 figg. (1913).
69. *La penisola Valdéz e le forme costiere della Patagonia settentrionale.* Ibid., XXIII, 1, pp. 103–5 (1914).

70. *Los estratos araucanos y sus fósiles.* « An. Mus. nac. Hist. nat. », Buenos Aires, XXV, pp. 1–250, 92 figg., 31 t. (1914).
71. *Nuovi studi sulla stratigrafia e sulla fauna dell'oligocene ligure.* «Ann. R. Univ. Genova». pp. 1–180, 19 figg., 8 t. (1914).
72. *Nuevas investigaciones sobra los Delfinos longirrostros del miocène del Paranà.* « An. Mus. nac. Hist. nat. », Buenos Aires, XXVII, pp. 139–51, 3 t. (1915).
73. *Monte Dente e Monte Argentèa.* Sez. Ligure Club Alp. It., Genova, 13 pp. (1915).
74. *Alcune applicazioni della teoria delle falde di ricoprimento al territorio italiano.* « Rend. Lincei », (5) XXV, 2, pp. 492–94 (1916).
75. *Sulla nozione del carreggiamento continuato.* Ibid., XXVI, 1, pp. 495–98 (1917).
76. *Sul riconoscimento nelle regioni italiane dell'eocene autoctono.* Ibid., XXVI, 2, pp. 294–297 (1917).
77. *Influenze morfologiche dei movimenti postumi sull'area italiana.* Ibid., XXVII, 1, pp. 407–10 e 446–49 (1918).
78. *Di alcune vicende tettoniche delle nostre areee vulcaniche.* Ibid., XXVII, 2, pp. 407–410 (1918).
79. *Ancora della zona di ricoprimento del Savonese.* « Boll. Soc. geol. It. », XXXVII, pp. 115–20 (1918–1919).
80. *Tentativo di ordinamento del Quaternario italiano.* Ibid., XXXVIII, pp. 7–14 (1919).
81. *In memoria dell'ing. Giovanni Anfossi.* « Atti Soc. Lig. Sc. nat. », XXX, 5 pp. (1919).
82. *Biografia di Lorenzo Bozano.* « Riv. mens. Club Alp. It. » pp. 31–32 (1919).
83. *Sui ramponi di Laminarie fossili detti fucoidi e sull'origine dei colloidi minerali di cui sono costituiti.* « Rend. Lincei », (5) XXIX, 1, pp. 155–59 (1920).
84. *Sur la nature des Fucoïdes du flysch éocénique.* « C. R. Soc. géol. France », pp. 91–92 (1920).
85. *I fenomeni erosivi di modellamento regionale considerati nel loro svolgimento continuato e non secondo cicli ripetuti.* « Rend. Lincei », (5) XXIX, 2, pp. 154–57 (1920).
86. *Lo svolgimento erosivo considerato a partire da una superficie fondamentale.* Ibid., XXX, 1, pp. 209–12 (1921).
87. *Lo svolgimento dei fenomeni carsici.* Ibid., XXX, 2, pp. 104–6 (1921).
88. *Lo svolgimento della morfologia costiera.* Ibid., pp. 427–29.
89. *Le grand Cervin* in « Augusta Praetoria », Torino, 15 pp., 13 figg. (1921).
90. *La géologie fondamentale de la Pampa.* « Bull. Soc. géol. France », (4) XXI, pp. 275–285 (1921).
91. *La prima ascensione del M. Marguarese.* « Boll. Sez. Ligure C.A.I. », 2 pp. (1922).
92. *A proposito del diapirismo.* « Rend. Lincei », (5) XXXI, 2, pp. 37–39 (1922).
93–100. *Note al rilevamento geologico dei fogli « Rapallo » e « Chiavari ».*

I. *Le trasformazioni meccaniche delle rocce.* « Boll. Soc. geol. It. », XLI, pp. 139–160, 13 figg., 1 t. (1922).

II. *Elementi della formazione eocenica.* Ibid., XLII, pp. 195–220, 7 figg., 1 t. (1923–1924).

III. *L'involtura della zona ofiolitifera Rovegno–Sopralacroce.* Ibid., XLIII, pp. 209–236, 19 figg., 2 t. (1924–25).

IV. *L'involtura della zona ofiolitifera del Barzonasco.* Ibid., XLIV, pp. 97–117, 5 figg., 2 t. (1925).

V. *Assetto tettonico fra la Trebbia e l'Aveto.* Ibid., XLV, pp. 123–34, 1 fig., 1 t. (1926).

VI. *Assetto tettonico della Riviera fra Genova e Sestri Levante.* Ibid., XLVI, pp. 97–110, 4 figg., 1 t. (1927).

VII. *Assetto tettonico a ponente e a nord di Genova.* Ibid., XLVI, pp. 242–58, 4 figg., 1 t. (1927).

VIII. *La tettonica delle regioni nelle sue grandi linee.* Ibid., L, pp. 25–45, 3 figg., (1931).

101. *Commemorazione di Arturo Issel.* « Ann. R. Univ. Genova », pp. 231–40 (1922–23, cfr. anche « Boll. C.A.I. » (1923) e « Atti Soc. Lig. » (1924).

102. *Sulle condizioni geologiche del promontorio Circeo*. « Rend. Lincei », (5) XXXIII, 1, pp. 479–82, 2 figg. (1924).
103. *La storia delle « fasce » dei Liguri*. « Riv. mens. Touring Club It. », XXX, pp. 529–35. 6 figg. Milano (1924).
104. *Le cascate dell'Iguazù*. « Vie d'It. e Amer. Lat. », pp. 911–18, 11 figg., Milano (1924).
105. *Geografia nella storia ligure*. In G. DELLE PIANE, *Guida della Liguria*, 5ª ed., Genova (1924).
106. *Trattato di Geologia morfologica* (*Geomorfologia*). 2 voll., pp. 1187, 428 figg., 37 t., Milano (1924–25).
107. *Un contributo allo studio della laguna Iberà*. « L'Universo », VI, pp. 1–21, 2 figg., 1 t. (1925).
108. *Nuove osservazioni sul massiccio cristallino di Savona*. « Rend. Lincei », (6) I, pp. 630–632 (1925).
109. *La conca di Courmayeur*. « Riv. mens. C.A.I. », pp. 181–89, 7 figg. (1925).
110. *Nella Patagonia settentrionale*. « Vie d'It. e Amer. Lat. », pp. 887–900, 22 figg. (1925).
111. « *Ciazze* » *e* « *Marine* » *di Liguria*. Ibid., pp. 715–22, 10 figg. (1926).
112. *La forza rabdica*. « Rass. Min. », n. 5 (1926) e « Ingegneria », n. 3 (1926).
113. *L'isola di Capraia*. « Vie d'It. », *32*, pp. 1111–17, 7 figg. (1926).
114. *Alberi stillanti acqua alle Isole Fortunate*. « Riv. geogr. It. », n. 6 (1927).
115. *Sur les charriages de l'Apennin central et méridional*. « C. R. Soc. géol. France », pp. 110–12 (1927).
116. *Visioni della Sierra del Tandil*. « Vie d'It. e Amer. Lat. », p. 1254, 2 figg. (1927).
117. *Dal Pico de Teide alla Caldera di Taburiente. Impressioni di un viaggio alle Canarie*. « L'Univ. », VIII, pp. 9–50, 20 figg., 2 t. (1927).
118. *Fondi di terra*. Ibid., pp. 383–91, 4 figg., 1 carta.
119. *A propos d'un mémoire de M. Vaufrey sur le paléolithique italien*. « C. R. Soc. géol. France », pp. 328–29 (1928).
120. *I Bàussi Rossi e la Riviera al confine francese*. « L'Univ. », IX, pp. 517–35, 18 figg. (1928).
121. *Monti e leggende alle origini del Tanaro*. « Vie d'It. », 34, pp. 859–70, 13 figg. (1928).
122. *Le coste di fango Argentine*. « Vie d'It. e Amer. Lat. », pp. 1249–56. 11 figg. (1928).
123. *Gli insegnamenti tettonici di una nuova galleria ferroviaria della costa ligure*. « Rend. Lincei », (6) IX, pp. 696–700, 2 figg. (1929).
124. *In memoria di Alessandro Roccati*. « Boll. Sez. Ligure C.A.I. » (1929).
125. *Un itinerario geomorfologico nel Trentino* (*Val di Nob–Mendola–Bolzano*). « L'Univ. », pp. 1–16, 12 figg. (1930).
126. *Nei boschi dell'alta valle dell'Olba*. « Vie d'It. e Amer. Lat. », 12 pp. 10 figg. (1930).
127. *I cimiteri e la geologia*. « Il Politecnico », pp. 599–600 (1930).
128. *Terrazzi lungo le coste e i fiumi dell'Argentina*. In « Deuxième Rapport de la Commission des Terrasses », Florence, pp. 119–25 (1930).
129. *I terrazzi delle Canarie*. Ibid., pp. 126–27.
130. *Geologia*. (*Teoria – Pratica – Applicazioni*). Man. Hoepli, XVIII–805 pp., 161 figg., 20 t., Milano 1931.
131. *Falde a trucioli e falde a doppio viaggio*. « Rend. Lincei », (6) XIV, pp. 75–77 (1931).
132. *Il confine occidentale del massiccio gneissico del Savonese e i suoi rapporti col mesozoico del Finalese*. « Boll. Soc. geol. It. », LI, pp. 221–36, 3 figg., 1 t. (1932).
133. *Valli troncate e valli sospese non glaciali*. « Boll. Soc. geogr. It. », (6) IX, pp. 243–58, 11 figg. (1932).
134. *Una interpretazione tettonica del promontorio occidentale del Golfo di Spezia*. « Rend. Lincei », (6) XVI, pp. 191–94 (1932).
135. *Geologia e morfologia delle Alpi Marittime e della Riviera Ligure*. In « Guida dei Monti d'Italia » del T.C.I. e del C.A.I., I, *Alpi Marittime*, pp. 22–25, 1 cartina geol. (1934).
136. *Itinerari geo-mineralogici per le escursioni nei dintorni di Sestri Levante e di Chiavari*. XLVII Congresso della Soc. Geol. Ital.; in collab. con A. Pelloux). « Boll. Soc. geol. It. », LIII, pp. XXXIX–LV (1934).

137. *L'isola di Capraia nelle sue condizioni geomorfologiche.* « Mem. R. Acc. Lincei », (6) V, pp. 319–336 (1934).
138. *Epirogenesi postpliocenica delle Alpi Marittime e della Riviera Ligure.* « Rend. Lincei », (6) XX, pp. 153–57 (1934).
139. *La serie di Montenotte come elemento costituente delle Alpi Occidentali e dell'Appennino.* Ibid., XXI, pp. 539–42 (1935).
140. *Un'antica industria della Liguria.* « Boll. Soc. geogr. It. », (6) XII, pp. 32–38 (1935).
141. *Inesistenza del glaciale a bassa quota nell'Appennino Ligure.* Ibid., pp. 522–24.
142. *I bradisismi come agenti di rapide modificazioni della costa ligure.* « Rend. Lincei », (7) I, pp. 32–33 (1936).
143. *Di una particolare « facies » continentale dell'oligocene ligure.* « Rend. Lincei », (6) XXIII, pp. 470–72 (1936).
144. *L'analisi panoramica nella descrizione geomorfologica della Liguria.* Ibid., XXIV, pp. 45–49 (1936).
145. *Carta geologica d'Italia. Foglio Ceva* al 100.000 (angolo SE). Roma. R. Ufficio Geologico, 1936.
146. *Necrologia di Marco Airoldi.* « Boll. Soc. geol. It. », LVI, pp. CXXXVII–IX (1937), e « Annuario R. Univ. Genova », pp. 373–74, ritr. (1938).
147. *Verso una nuova sintesi tettonica delle Alpi Occidentali.* « Rend. Lincei », (6) XXV, pp. 101–4 (1937).
148. *Dal più alto monte dell'Appennino Ligure.* « Strenna Pio Ist. Rachitici », Genova, 7 pp. (1937–38).
149. *Gradini e piè-di-monte.* « Boll. Soc. geogr. It. », (7) III, pp. 121–39 (1938).
150. *Genova e la geomorfologia urbanistica.* « La Ric. scient. », (2) IX, pp. 550–56 (1938).
151. *Liguria Geologica.* « Mem. Soc. geol. It. », II, pp. 1–743, 195 figg., 13 t.
152. Collaborazione alla *Guida per la XIII escursione geografica interuniversitaria*, Genova (1939).
153. *Monticelli artificiali e pietre mitiche.* « Boll. Soc. Geogr. It. », (7) IV, pp. 241–54 (1930).
154. *La Liguria geologica.* In *Storia di Genova* dell'Istituto per la Storia di Genova, Milano, pp. 343–59 (1941).
155. *Laghi alpini di passo e di sottopasso.* « Boll. Soc. geogr. It. », (7) VI, pp. 336–48 (1941) (e « Notiziario alpino » 1942).
156. *Datazione dell'ultimo innalzamento del livello marino. Ingressione stadiale neolitica.* Ibid., VII, pp. 85–96 (1942).
157. *Wolfango Goethe geologo in Italia.* « Mem. R. Acc. d'It. », XIII, n. 6, pp. 707–30, 6. t. (1942).
158. *Ancora dell'età del macigno.* « Rend. Lincei », (8) III, pp. 467–69 (1947).
159. *Sulla tettonica del Promontorio Circeo e sulla influenza della gravità nell'orogenesi.* Ibid., IV, pp. 383–86 (1948).
160. *Tettonica del metano e metaniti.* Ibid., VIII, pp. 448–50 (1950).
161. *Geologia del gruppo di Monte Resimauda e moderni problemi di tettonica e di petrogenesi.* (In collab. con S. Conti). « Mem. Lincei », (8) III, n. 3, pp. 43–130, 10 t. (1951).
162. *Sull'origine e i viaggi delle ofioliti appenniniche.* « Rend. Lincei », (8) X, pp. 430–42 (1951).
163. *Sull'origine e i viaggi delle ofioliti alpine.* Ibid., XI, pp. 17–20 (1951).

PERSONALE ACCADEMICO

Il Presidente comunica alla Classe la dolorosa notizia della scomparsa dei Soci Stranieri G. Edwin Conklin, illustre embriologo della « Princeton University », la notizia della cui morte, avvenuta il 21 novembre 1952, è stata comunicata all'Accademia solo in questi giorni, e di Paul Niggli, chiarissimo Professore di mineralogia e petrografia nel Politecnico di Zurigo, deceduto il 13 gennaio c. a.

Alla memoria dei due eminenti scienziati, il prof. Giordani invia un reverente pensiero d'omaggio.

Dà poi la parola al Socio Gortani che pronuncia l'orazione commemorativa del compianto Collega Gaetano Rovereto, ricordandone le grandi doti di mente e di cuore.

Il Presidente ringrazia l'oratore per le sue elevate parole, rinnovando l'espressione del cordoglio dell'Accademia e suo personale per la scomparsa dell'insigne geologo.

Il Presidente informa quindi la Classe che l'Ufficio Centrale dell'Associazione Elettrotecnica Italiana ha richiesto il consenso e l'autorevole adesione dell'Accademia in merito al voto presentato dall'ing. Novelli nell'Assemblea generale dell'Associazione stessa, tenutasi a Perugia il 25 ottobre 1952 e approvato per acclamazione, circa il riconoscimento internazionale del nome di « Numero di Allievi » alla costante ρ definita dall'Allievi e posta a base dei suoi calcoli. La proposta della denominazione di « Numero di Allievi » era già stata avanzata durante la commemorazione dello scienziato, tenuta a Milano nel dicembre 1941 e, ripresa dopo la guerra, fu confermata per acclamazione nella riunione degli Idraulici, svoltasi a Bologna nel maggio del 1951. Tale proposta è intesa a rendere un tributo di omaggio alla memoria di Lorenzo Allievi e a costituire un riconoscimento dei suoi fondamentali lavori sul Colpo di Ariete.

Il Socio De Marchi non crede opportuno che la Classe si pronunci subito in merito e propone che la questione sia deferita ad una Commissione, così come è stato fatto dall'Istituto Lombardo di Scienze e Lettere.

Il Socio Perucca approva la proposta del Collega De Marchi perchè ritiene preferibile che si adotti una procedura, sia pure più lunga, quale la nomina di una Commissione necessariamente comporta, ma che offra le massime garanzie per una decisione che egli comunque auspica possa essere favorevole.

Il Socio Polvani fa notare che la Società Italiana di Fisica, della quale egli è Presidente, ha anch'essa deferito l'esame della proposta dell'Associazione Elettrotecnica Italiana ad una Commissione.

Il Presidente invita pertanto la Classe a nominare una Commissione con il compito di esaminare la questione e di riferire in una prossima adunanza. Sono nominati i Soci Crocco, Pistolesi e De Marchi che accettano.

Il Socio Pistolesi, riferendosi al voto relativo alla Tenuta di S. Rossore, approvato dalla Classe nella seduta del gennaio scorso, prega la Presidenza di volere inviare copia di detto voto al Comune di Pisa.

Il Presidente risponde che il voto è stato trasmesso alla Classe di Scienze Morali, Storiche e Filologiche la quale lo esaminerà nella seduta odierna. Se il voto sarà approvato anche dalla predetta Classe, la Presidenza provvederà a trasmetterlo al Parlamento, al Governo e al Comune di Pisa.

COMUNICAZIONI VARIE

Il Presidente informa i Colleghi che sono presenti alla seduta il prof. Heinz Hopf del Politecnico di Zurigo e il prof. Oscar Zariski della « Harvad University » e porge ai due graditi ospiti il cordiale saluto della Classe.

PLICHI SUGGELLATI

Il prof. Giordani presenta un plico suggellato del col. Cesare Colangeli, consegnato all'Accademia in data 13 gennaio c. a. e contenente, come da annotazione sulla busta, uno studio su: « Materia – Radiazione – Gravitazione ».

La Classe, constatata l'integrità dei sigilli, dispone che il plico di cui trattasi sia conservato nell'archivio accademico a disposizione dell'interessato.

Il Presidente comunica che il prof. Guido Finzi, ha richiesto all'Accademia con lettera in data 23 gennaio c. a., di voler procedere all'apertura del plico suggellato da lui consegnato all'Accademia stessa e presentato nella seduta di Classe del 10 gennaio c. a. Accogliendo tale richiesta, il prof. Giordani, procede all'apertura del plico e prende atto dello studio ivi contenuto, dal titolo: « Natura e meccanismo della reazione alla tubercolina - Immunità antitossica e tubercolosi ».

Il Presidente, constatato che detto studio è composto di 10 pagine dattiloscritte, delle quali una come copertina e una contenente la bibliografia, contrassegna ognuna delle pagine con la sua firma e con la data e invita la Classe a nominare una Commissione incaricata di esaminare lo studio in parola e di riferire in una delle prossime sedute.

Dopo una breve discussione, la Classe, preso atto del desiderio del Socio Rondoni di non essere chiamato a far parte della Commissione per ragioni di delicatezza, essendo egli Collega del prof. Finzi nella stessa Università, designa, quali membri della citata Commissione, i Colleghi De Blasi e Vernoni che accettano.

PRESENTAZIONE DI LIBRI

Il Socio Corrispondente Sansone presenta, a nome dell'Unione Matematica Italiana, la prima parte del vol. I delle Opere di Luigi Bianchi.

L'edizione nazionale di queste Opere fu ideata nel 1928, alla morte del Bianchi, dal compianto Gaetano Scorza e da Enrico Bompiani, ma soltanto

dopo un decennio essa fu avviata alla realizzazione dalla Commissione Scientifica dell'U.M.I., la quale affidò ad Enrico Bompiani e ad Enea Bortolotti il compito di stendere il piano dei lavori.

Rapito nel 1942 alla famiglia ed alla scienza Enea Bortolotti, Giovanni Sansone sostituiva l'amico e collega scomparso.

Raccolte le 209 Memorie e Note del Nostro, queste furono suddivise in 10 volumi di cui il 1° dedicato all'Aritmetica, all'Algebra e all'Analisi e gli altri 9 all'applicabilità e ai problemi di deformazione, ai sistemi tripli ed ennupli ortogonali, alla deformazione delle quadriche, alle trasformazioni delle superficie, alle congruenze, ai problemi di rotolamento, a classi speciali di superficie, agli spazi riemanniani, ad argomenti vari.

R. Calapso ha già preparato il 2° volume, B. Gambier il 3°, P. Tortorici il 5° e il 10°, V. Strazzeri il 6°, W. Blaschke il 7°, E. Bompiani e A. Maxia il 9°, e sono in corso di preparazione il 4°, a cura di R. Calapso e l'8°, a cura di M. Villa. Un 11° volume sul carteggio scientifico del Bianchi particolarmente con Weingarten, Hurwitz e Darboux sta per esser preparato da A. Terracini.

Il 1° volume è suddiviso in due parti: la 1ª, quella che egli ha l'onore di presentare, contiene una Introduzione di E. Bompiani e di G. Sansone; la elevata ed affettiva commemorazione che di L. Bianchi lesse a Pisa nel 1930 G. Scorza; la magnifica commemorazione scientifica che all'Accademia dei Lincei lesse G. Fubini, uno dei Suoi più grandi Scolari; il gruppo di Memorie sulla teoria dei gruppi discontinui finiti, sulle equazioni algebriche e sull'aritmetica a cura di G. Ricci; quello sui gruppi discontinui infiniti e sulle forme aritmetiche ternarie e quaternarie quadratiche a cura di G. Sansone.

Imponente è quest'ultimo gruppo di Memorie che si collega all'indirizzo di Gauss e di Klein. Il Bianchi studia quei gruppi poliedrici oggi noti come i gruppi del Bianchi e, collegando alle forme quadratiche un punto, un cerchio geodetico o una sfera geodetica indici, risolve da Geometra tutti i problemi dell'equivalenza delle forme.

Seguirà entro tre o quattro mesi la seconda parte del primo volume e conterrà una Memoria sugli integrali abeliani a cura di F. Conforto, tre Memorie sui gruppi continui a cura di U. Amaldi e a cura di Enea Bortolotti ed Enrico Bompiani, tutte le Memorie su alcune classi di equazioni alle derivate parziali che al Bianchi occorsero nella Sua monumentale costruzione della Geometria Differenziale.

Per la stampa di questo Volume un contributo di L. 50.000 era stato ottenuto prima della guerra da Francesco Severi; la svalutazione annullò quasi interamente questa allora cospicua somma e soltanto grazie al contributo del Consiglio Nazionale delle Ricerche che l'Unione Matematica Italiana vuol ringraziare nella persona del Suo Presidente G. Colonnetti, del Suo Vice Presidente F. Giordani e nel suo Comitato per la Matematica e Fisica, e grazie all'entusiasmo del Dott. Paolo Cremonese per l'iniziativa, è possibile oggi presentare al mondo matematico questo primo volume di ben 616 pagine a stampa.

Il Socio De Blasi offre in omaggio, a nome della Casa Sansoni, il 2°, 3° e 4° volume dell'« Enciclopedia Medica Italiana », edita, sotto la sua presi-

denza, dalla predetta Casa nelle « Edizioni Scientifiche » e, riferendosi alla presentazione del 1° volume della citata opera che egli fece nella seduta del 10 febbraio 1951, desidera far notare che i volumi successivi sono stati redatti con gli stessi criteri scientifici che hanno ispirato il primo e sono corredati da un ricco e originale materiale illustrativo, sia in nero che a colori.

Il Presidente ringrazia i Soci Sansone e De Blasi.

Il Segretario Accademico presenta le pubblicazioni pervenute in omaggio all'Accademia, mettendo in particolare evidenza i due volumi dell'opera « Il Cielo» del Collega Cecchini, una pubblicazione delle edizioni « Sciences et Lettres » di Liegi, dal titolo « Léon Fredericq », edita in occasione del centenario della nascita dell'illustre scienziato, il volume « Arbeitsgemeinschaft für Forschung des Landes Nordrhein – Westfalen – 2 Folge » (Band. 2), inviato dal Presidente dei Ministri del Territorio Nordrhein – Westfalen, una pubblicazione del Politecnico di Torino per l'inaugurazione dell'anno accademico 1952–53, contenente la relazione del Direttore prof. Perucca e la prolusione ai corsi del prof. Colonnetti e uno studio del Socio Achille Russo, estratto dagli Atti dell'Accademia Gioenia di Scienze Naturali in Catania, serie VI, vol. VIII, 1951–52.

PRESENTAZIONE DI NOTE E MEMORIE

Presentano Note per la pubblicazione negli Atti i Soci Picone, Caloi, Abetti, Nobile, Segre, Bargellini, Boaga, Armellini, Signorini, Pupilli e Semerano.

Le seguenti Note saranno pubblicate in fascicoli successivi:

Boaga G. – Risoluzione del triangolo geodetico ellissoidico per mezzo degli elementi della sua rappresentazione conforme sul piano.

Caloi P. e Spadea M. C. – Su una questione di idrodinamica concernente il lago di Garda (pres. dal Corrisp. P. Caloi).

Aruffo G. – Forme differenziali esterne di classe 0 e funzioni di più variabili complesse (pres. dal Corrisp. B. Segre).

Bordoni P. G. – Limitazioni per il raggio di girazione baricentrale delle figure piane a contorno convesso (pres. dal Socio A. Signorini).

Fichera G. – Condizioni perchè sia compatibile il problema principale della statica elastica (pres. dal Socio M. Picone).

Foffani A. – Ricerche cinetiche per via polarometrica nel gruppo delle cumarine (pres. dal Corrisp. G. Semerano).

Romeo A. e Magni L. – Sintesi di alcuni β amminoacidi bibasici (pres. dal Socio G. Bargellini).

Scarano E. – Comportamento polarografico di alcuni metalli nobili in soluzioni debolmente complessanti (pres. dal Corrisp. G. Semerano).

Vaccaro G. – Sull'isometria di calotte appartenenti a due varietà (pres. dal Socio E. Bompiani).

Il Socio Colonnetti, che con i Colleghi Picone e Signorini, era stato incaricato di esaminare la Memoria di F. S. Merlino dal titolo: « Contributo

allo studio della lastra circolare su suolo elastico», comunica, anche a nome dei predetti Colleghi, di avere ottenuto dall'Autore una riduzione della mole del lavoro citato in modo che il lavoro stesso potrebbe ora trovar posto tra le Note anzichè tra le Memorie. Prega pertanto la Presidenza di voler considerare annullata la presentazione della Memoria che ha avuto luogo nella seduta dell'8 novembre e di accogliere ora, sotto forma di Nota, lo stesso lavoro debitamente ridotto.

Il Presidente ringrazia il Collega Colonnetti e approva quanto da lui proposto.

RELAZIONI DI COMMISSIONI

Il Socio Semerano, anche a nome del Collega Caglioti, legge la relazione sulla Memoria di L. Riccoboni, P. Papoff e M. Biancani, dal titolo: «La validità dell'equazione di Ilkovic e il controllo del responso galvanometrico in polarografia». Detta relazione, che conclude proponendo la pubblicazione del citato lavoro nelle Memorie accademiche, è messa ai voti e approvata dalla Classe.

OPERE PERVENUTE IN DONO ALL'ACCADEMIA

presentate nella seduta del 14 febbraio 1953

Arbeitgemeinschaft für Forschung des Landes Nordrhein-Westfalen. Band II. Köln und Opladen, Westdeutscher Verlag, 1952. In-8°.

BIANCHI Luigi. — *Opere.* A cura della Unione Matematica Italiana e col contributo del Consiglio Naz. delle Ricerche. Vol. I, parte I. Roma, Edizioni Cremonesi della Casa Ed. Parrella, 1952. Pp. 615, in-8°.

CECCHINI Gino. — *Il cielo. Luci e ombre nell'universo.* Torino, U.T.E.T., 1952. Voll. 2, in-8°, con figg. e tavv.

COLONNETTI GUSTAVO. — POLITECNICO DI TORINO.

FRÉDERICQ Léon. — Vedi: *Un Pionnier de la Physiologie...*

PERUCCA Eligio. — Vedi: POLITECNICO DI TORINO.

Un Pionnier de la Physiologie, Léon Frédericq. Oeuvres choisies. Volume publié à l'occasion du Centenaire de sa naissance. Liège, Sciences et Lettres, 1953. Pp. 232, in-8°.

POLITECNICO DI TORINO. — *Inaugurazione dell'anno accademico 1952–53.* Relazione del Direttore prof. Eligio Perucca. Prolusione ai corsi di S.E. il prof. Gustavo Colonnetti. Torino, 1952. Pp. 23, in-8°.

RUSSO Achille. — *Carattere femminile del soma e sua indipendenza in relazione alla origine dei blastomi. Ipotesi e realtà.* Estr. da «Atti dell'Accademia Gioenia di Scienze Naturali», s. 6ª, vol. III, 1951–1952.

Sborník prác o stavebnictv. Bratislava, Slovenská Akadémia Vied a Umení, 1952. Pp. 123, in-8°, con figg.

ZARBANO Paolo. — *Alcune pile nucleari dedotte dal sistema periodico poliplanare degli elementi.* Lentini, Tip. Roccaforte, 1952. Pp. 78, in-8°.

D. DE BLASI e U. AMALDI.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

Seduta del 14 marzo 1953

Presiede il Presidente FRANCESCO GIORDANI

NOTE DI SOCI

Geodesia. — *Risoluzione del triangolo geodetico ellissoidico per mezzo degli elementi della sua rappresentazione conforme sul piano.* Nota (*) del Corrisp. GIOVANNI BOAGA.

La «Cartografia moderna» assegna per i vertici della triangolazione ellissoidica le coordinate piane, della rappresentazione piana conforme, ricavate dalle *equazioni della carta* in funzione delle coordinate geografiche. In molti Uffici cartografici allorché si desidera risolvere un triangolo, i cui vertici sono assegnati (nella rappresentazione) mediante le coordinate piane, si usa determinare con le *equazioni inverse della carta* le coordinate geografiche dei vertici ellissoidici per poi risolvere il triangolo con i metodi noti di Bessel, di Gauss ecc. o di Legendre.

Poiché in molti Paesi attualmente la Cartografia è poggiata essenzialmente su una rappresentazione conforme – atta cioè a conservare gli angoli - sorge immediata l'idea di esaminare se, con le coordinate piane della rappresentazione, si possa arrivare alla determinazione degli angoli e dei lati del triangolo geodetico ellissoidico, anche di dimensioni assai grandi, senza ricorrere al procedimento indicato.

Ciò premesso si può enunciare il problema nei seguenti termini: *trovare un procedimento per la risoluzione del triangolo geodetico (ellissoidico) attraverso le coordinate piane dei suoi vertici nella rappresentazione conforme del triangolo sul piano, qualunque sia il tipo seguìto per la realizzazione della rappresentazione.*

Indicheremo nel seguito con φ, λ, N rispettivamente la *latitudine*, la *longitudine* ed il *raggio principale di curvatura della sezione del primo verti-*

(*) Presentata nella seduta del 14 febbraio 1953.

cale alla latitudine φ; con A , B , C i tre vertici del triangolo geodetico ellissoidico, con P , Q , R i corrispondenti sul piano della rappresentazione definita dalle *equazioni della carta*:

$$x = x(\varphi , \lambda) \quad , \quad y = y(\varphi , \lambda). \tag{1}$$

Gli archi geodetici AB , BC , CA che individuano il triangolo sull'ellissoide di riferimento, dànno luogo ai corrispondenti archi curvilinei PQ, QR , RP sul piano. Le equazioni parametriche di tali archi – denominati: *trasformate piane* – sono naturalmente le (1) quando in esse si facciano variare con continuità φ e λ sull'arco geodetico considerato, da un vertice all'altro.

Il rapporto η fra due elementi lineari omologhi del piano e dell'ellissoide in funzione della sola y è espresso dalla:

$$\eta = \eta(y) = 1 + \frac{y^2}{2N^2} + \cdots \tag{2}$$

mentre la *curvatura* K *della trasformata piana* è data dalla:

$$K = -\frac{y}{N^2} \cdot \cos\alpha \tag{3}$$

con α *angolo di direzione* della corda PQ.

Si consideri ora sul piano un sistema cartesiano ortogonale di assi u, v il secondo dei quali tangente alla trasformata PQ nell'estremo P. Se β è l'*angolo di direzione* di v e γ quello formato da detto asse e dalla corda PQ, si può scrivere:

$$\beta = \alpha - \gamma \tag{4}$$

dalla quale risulta il *carattere di riduzione* dell'angolo γ.

Preso sulla trasformata PQ un punto M successivo a P, la tangente t alla PQ in M dà luogo all'angolo di direzione β'; l'angolo di contingenza $\Delta\beta = \beta' - \beta$ e l'elemento lineare $\Delta s = PM$ dànno luogo alla curvatura K definita dalla

$$K = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta\beta}{\Delta s} = \frac{d\beta}{ds} \tag{5}$$

Le proiezioni dell'elemento ds sugli assi u e v sono ovviamente:

$$du = -ds \cdot \operatorname{sen}(\beta' - \beta) \quad , \quad dv = ds \cdot \cos(\beta' - \beta) \tag{6}$$

e sviluppando in serie le funzioni goniometriche:

$$\begin{cases} du = -ds \left\{ (\beta' - \beta) - \dfrac{(\beta' - \beta)^3}{6} + \cdots \right\} \\ dv = ds \left\{ 1 - \dfrac{(\beta' - \beta)^2}{2} + \cdots \right\} \end{cases} \tag{7}$$

Inoltre, per il punto della trasformata piana di ascissa curvilinea s, la curvatura è rappresentata dalla:

$$K = K_P + s\dot{K}_P + \frac{1}{2}s^2\ddot{K}_P + \cdots \tag{8}$$

con $\dot{K}_P$ e $\ddot{K}_P$ derivate prima e seconda di K rispetto all'arco s, calcolate in P. Ora, eliminando K dalle (5) e (8), si perviene ad una equazione differenziale a variabili β ed s separabili. Effettuando la integrazione per s da *zero* ad s e per β da β a β' si trae la:

$$\beta' - \beta = s\cdot K_P + \frac{1}{2}s^2\dot{K}_P + \frac{1}{6}s^3\ddot{K}_P + \cdots \tag{9}$$

Tenendo conto della (9) i secondi membri delle (7) diventano funzioni di s, sicchè integrando si ottengono le:

$$\begin{cases} u = -\frac{1}{2}s^2 K_P - \frac{1}{6}s^3\dot{K}_P + \frac{1}{24}s^4(K_P^3 - \ddot{K}_P) + \cdots \\ v = s - \frac{1}{6}s^3 K_P^2 - \frac{1}{8}s^4 K_P\dot{K}_P + \cdots \end{cases} \tag{10}$$

che *rappresentano in termini finiti le equazioni parametriche della trasformata rispetto al sistema cartesiano* $(P\,;u\,,v)$; esse permettono – come ora vedremo – la determinazione della *riduzione* γ introdotta con la (4).

Si osservi ora che indicando con L la lunghezza dell'arco PQ, ponendo nelle (10) $s = L$, le (10) vengono a rappresentare le coordinate $u_Q\,,v_Q$ dell'estremo Q, per cui indicando con D la lunghezza della corda PQ si ha

$$D = \sqrt{u_Q^2 + v_Q^2} \tag{11}$$

e tenendo conto delle (10), sviluppando in serie, si giunge facilmente alla:

$$D = L - \frac{1}{24}L^3 K_P^2 - \frac{1}{24}L^4 K_P\dot{K}_P + \cdots \tag{12}$$

Introducendo in questa la curvatura K_m corrispondente al punto di mezzo dell'arco PQ si trae la:

$$D = L - \frac{1}{24}L^3 K_m^2 + T_5 \tag{13}$$

con T_5 termini almeno del quarto grado di L, sicchè la *lunghezza* D *della corda differisce da quella* L *della trasformata, almeno per quantità piccole del terzo ordine.*

Tenendo conto delle (10) e (13) si trae subito la:

$$\operatorname{sen}\gamma = -\frac{u_Q}{D} = \frac{1}{2}LK_P + \frac{1}{6}L^2\dot{K}_P + L^3\left(\frac{1}{24}\ddot{K}_P - \frac{1}{48}K_P^3\right) + \cdots$$

e l'equivalente:

$$\gamma = \frac{1}{2}LK_P + \frac{1}{6}L^2\dot{K}_P + \frac{1}{24}L^3\ddot{K}_P + \cdots \tag{14}$$

Introducendo nella (14) la curvatura K_N della PQ nel punto N, tale che (arco PN) : (arco PQ) = 1 : 3 si giunge alla

$$\gamma = \frac{1}{2} L K_N + \frac{1}{72} L^3 \ddot{K}_N + \cdots \tag{15}$$

e con l'abbandono dei termini del terzo ordine e degli ordini superiori:

$$\gamma'' = \frac{1}{2 \operatorname{arc} 1''} \cdot D K_N \tag{16}$$

Poiché:

$$D = \frac{x_Q - x_P}{\cos\alpha} \qquad K_N = -\frac{y_N \cos\alpha}{N^2} = -\frac{(2y_P + y_Q)\cos\alpha}{3N^2} \tag{17}$$

la (16) assume la forma definitiva:

$$\gamma'' = \frac{(x_P - x_Q)(2y_P + y_Q)}{6 N_N^2 \operatorname{arc} 1''} \tag{18}$$

in funzione delle coordinate cartesiane degli estremi della trasformata, definita dalle (1).

La *convergenza* Γ *del meridiano* in P è definita poi dalla

$$\Gamma_P = \operatorname{arc\,tang}\left(\frac{dx}{dy}\right)_P \tag{19}$$

L'*azimut ellissoidico* θ_{AB} dell'arco di geodetica AB in A è dato dalla

$$\theta_{AB} = \Gamma_P + \alpha_{PQ} + \gamma_{PQ} \tag{20}$$

mentre per quello *coniugato* si ha:

$$\theta_{BA} = \Gamma_Q + 180° + \alpha_{PQ} - \gamma_{QP} . \tag{21}$$

Indicando con g la lunghezza dell'arco di geodetica $\overline{AB}$, il modulo definito dalla (2) per elementi infinitesimi viene ora espresso per elementi finiti (posto L = D) dalla:

$$\eta = \frac{D}{g} = 1 + \frac{y_P^2 + y_P y_Q + y_Q^2}{6 N_N^2} . \tag{22}$$

Dalla (22) scendono poi le:

$$D = g \cdot \eta \quad , \quad g = D : \eta \tag{23}$$

che *permettono il calcolo della lunghezza della corda della trasformata data la lunghezza dell'arco di geodetica ellissoidica e, reciprocamente, la determinazione della lunghezza dell'arco di geodetica ellissoidica nota quella della corda della trasformata, per mezzo degli elementi della rappresentazione piana conforme.*

L'angolo di direzione α e la distanza D si traggono poi con le note formule della poligonometria:

$$(24) \qquad \begin{cases} \operatorname{tang} \alpha = \dfrac{x_Q - x_P}{y_Q - y_P} \\ D = \dfrac{x_Q - x_P}{\cos \alpha} = \dfrac{y_Q - y_P}{\operatorname{sen} \alpha} = \sqrt{(x_Q - x_P)^2 + (y_Q - y_P)^2}. \end{cases}$$

Il formulario esposto serve alla risoluzione del triangolo geodetico ellissoidico per mezzo degli elementi della rappresentazione conforme.

Difatti, se sono date le coordinate dei vertici P, Q, R del triangolo piano delle trasformate, con le (22) e (24) si determinano gli elementi η, α, D relativi alle tre corde PQ, QR, RP; con la (18) le sei riduzioni angolari (due per ogni trasformata) e con la (19) le tre convergenze dei meridiani passanti per i vertici delle trasformate. Gli azimut ellissoidici del triangolo geodetico si valutano con le (20) e (21) e le lunghezze dei lati con la seconda delle (23). Rimane così risolto il triangolo geodetico ellissoidico.

Geofisica. — *Su una questione di idrodinamica concernente il lago di Garda* (*). Nota di PIETRO CALOI e MARIA CECILIA SPADEA, presentata (**) dal Corrisp. P. CALOI.

1. Lo studio delle oscillazioni libere (sesse) del lago di Garda fu iniziato nei primi anni del secolo.

I due principali lavori compiuti in quell'epoca furono quelli di F. Vercelli e di A. Defant. Recentemente, nuovi contributi allo studio stesso furono portati da P. Caloi (1).

Nel suo primo lavoro sull'argomento, Defant calcolò per la stessa binodale il valore di 29^m ca., mentre il valore ottenuto da Vercelli era di soli 23^m. Entrambi trovarono conferma nelle registrazioni date dai limnografi funzionanti a Riva e a Desenzano, rispettivamente. In effetti, la binodale aveva il valore di 23^m ca., quale fu calcolata da Vercelli; alla stessa conclusione giunse poi Defant, applicando un suo metodo. Di recente fu dimostrato (1) che l'erroneo valore ottenuto da Defant nel suo primo lavoro, era da attribuirsi ad un coefficiente errato contenuto nella prima stesura di una formula di un metodo di Chrystal, di cui egli si era servito.

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto Nazionale di Geofisica.

(**) Nella seduta del 14 febbraio 1953.

(1) PIETRO CALOI, *Le sesse del lago di Garda*. Parte I: «Annali di Geofisica», I, 1 (1948); Parte II: «Annali di Geofisica», I, 2 (1948). Parte III: «Annali di Geofisica», II, 1 (1949).

In realtà però la sessa di 29^m ca. veniva registrata, sia pure debolmente, a Riva e — come provarono successive registrazioni – vistosamente, a Peschiera; mentre mancava del tutto fra le registrazioni di Desenzano.

Nel 1948 fu prospettata l'ipotesi che tale oscillazione interessasse solo parti del lago e precisamente la parte settentrionale, per quanto si riferisce alle registrazioni di Riva e – in modo più accentuato – il bacino Peschiera–Garda, per ciò che concerne le registrazioni di Peschiera.

La possibilità dell'oscillazione propria della parte settentrionale del Garda è stata effettivamente provata. Restava da provare un'analoga possibilità per il bacino Peschiera–Garda.

2. È noto che il bacino Peschiera–Garda è, in media, poco profondo. Il letto del lago, ad occidente della linea Punta Sirmione–Punta S. Vigilio, si abbassa bruscamente verso notevoli profondità.

Lungo la fascia su detta, in più punti il fondo si solleva, portandosi a pochi metri dalla superficie dell'acqua: in località « secca del Vò », la scogliera talvolta affiora. Questa barriera subacquea è rotta qua e là, in modo più o meno accentuato: a sud della secca del Vò presenta la più vasta e profonda apertura, che si snoda a guisa di canale sommerso, fino a Peschiera, dove si prolunga nel Mincio.

Era ovvio pensare che un bacino siffatto potesse avere oscillazioni proprie.

È facile provare che l'oscillazione libera del bacino orientale Peschiera Garda, considerato come golfo aperto, in corrispondenza della bocca Punta Sirmione–Punta S. Vigilio, non può sussistere, se non come oscillazione forzata: il periodo dell'uninodale risulterebbe infatti maggiore di quello consentito all'intero lago (di 43^m ca.).

Furono fatte due ipotesi: oscillazione libera dell'intero bacino come golfo chiuso sul resto del lago e direzione d'oscillazione E-W; oscillazione libera dell'intero bacino, considerato come chiuso, e direzione d'oscillazione NS.

La determinazione delle oscillazioni libere, di piccola ampiezza, nei laghi è ricondotta alla risoluzione di un'equazione differenziale omogenea del secondo ordine, con certe condizioni agli estremi:

$$\sigma(v)\frac{d^2u}{dv^2} + \frac{4\pi^2}{gT^2}u = 0, \tag{1}$$

dove u è rappresentabile mediante la somma di una serie di semplici funzioni armoniche di t; v è l'area, calcolata sulla superficie libera, della superficie limitata da una determinata sezione verticale S_x e dall'estremo $x = 0$, ed a l'area superficiale totale del lago; T è il periodo dell'oscillazione libera e g l'accelerazione di gravità.

Le condizioni ai limiti sono

$$u(c) = u(a) = 0.$$

È inoltre $\sigma(v) = b(v) \cdot S(v)$, essendo $b(v)$ la larghezza, in superficie, della sezione $S(x) = S(v)$. I dati batimetrici del lago permettono la determinazione della funzione $\sigma(v)$. La curva che risulta dalla rappresentazione di $\sigma(v)$ in funzione di v è detta *curva normale* del lago.

Posto $z = v/a$, ed espresso σ in funzione di z, la (1) diviene

$$\frac{d^2u}{dz^2} + \frac{\lambda}{\sigma(z)} \cdot u = 0, \tag{2}$$

con le condizioni ai limiti

$$u(0) = 0 \quad , \quad u(1) = 0, \tag{3}$$

e dove, evidentemente,

$$\lambda = \frac{4\pi^2}{T^2} \cdot \frac{a^2}{g} \cdot \tag{4}$$

L'integrazione della (2), soggetta alle condizioni (3), è equivalente alla ricerca del valore stazionario dell'integrale,

$$I(u) = \int_0^1 \left\{ \left(\frac{du}{dz}\right)^2 - \frac{\lambda}{\sigma(z)} u^2 \right\} dz.$$

Per soddisfare alle (3), la u può assumere l'espressione

$$u = \sum_0^m {}_i A_i \cdot z(1 - z) \cdot z^i. \tag{5}$$

La soluzione presenta difficoltà crescenti al crescere di m.

Nel caso $m = 1$, l'equazione dei periodi diviene

$$(I_0 \cdot I_2 - I_1^2)\lambda^2 - \left(\frac{2}{15} \cdot I_0 - \frac{1}{3} I_1 + \frac{1}{3} I_2\right)\lambda + \frac{1}{60} = 0, \tag{6}$$

dove

$$I_n = \int_0^1 \frac{z^2 (1 - z)^2 \cdot z^n}{\sigma(z)} dz \qquad (n = 0, 1, 2). \tag{7}$$

Per $m = 1$ è ancora

$$u = A_0 \cdot z(1 - z)\left(1 + \frac{A_1}{A_0} z\right),$$

e poichè nei nodi $du/dz = 0$, l'equazione dei nodi assume la forma

$$3 \frac{A_1}{A_0} \cdot z^2 - 2\left(\frac{A_1}{A_0} - 1\right) z - 1 = 0, \tag{8}$$

dove il valore del rapporto A_1/A_0 può essere dedotto dal sistema di equazioni in $A_0, A_1, \cdots$ una volta determinati i valori di $I_0, I_1, \cdots$ e per ogni valore di λ (cioè, per ogni oscillazione libera).

3. I calcoli inerenti alla prima ipotesi, implicavano la suddivisione del bacino Peschiera-Garda con sezioni parallele alla costa orientale. Ciò ha con-

sentito la deduzione degli elementi morfologici e geometrici, che hanno permesso di risolvere l'equazione dei periodi nel caso $m = 2$.

L'uninodale risultò di 56^m; troppo elevata, quindi, per avere realtà fisica. Per la binodale si ottenne $T = 29^m,5$; anche questo valore va ritenuto eccessivo, tenuto conto che va moltiplicato per il fattore, conseguente alla correzione di bocca. Ad ogni modo, la binodale generalmente non è di facile generazione, specie nei bacini di estensione limitata.

La prima ipotesi quindi poteva considerarsi non rispondente al vero.

Si è passati allora alla seconda ipotesi.

Il bacino Peschierà–Garda fu suddiviso in 33 sezioni normali alla linea di valle, con generale andamento E-W. I dati, in dettaglio, verranno riportati in un prossimo, più diffuso lavoro.

La (2) fu risolta per il caso $m = 1$.

Data la complessità della curva normale, non fu possibile ottenere gli integrali (7) per via diretta. I loro valori furono ottenuti con integrazione numerica. Si ebbe

$$I_0 = 1.988088 \cdot 10^{-5} \quad ; \quad I_1 = 1 \cdot 1945375 \cdot 10^{-5} \quad ; \quad I_2 = 0{,}8308349 \cdot 10^{-5}.$$

L'unità scelta fu l'*hm*.

Risolta l'equazione dei periodi (6), si sono ottenuti per λ i valori

$$\lambda_1 = 15198 \quad ; \quad \lambda_2 = 48762,$$

corrispondenti alle oscillazioni uninodale e binodale rispettivamente.

Essendo $a = 8898{,}125$ hm^2, dalla (4) si ottiene

$$T_1 = 24^m,1 \quad ; \quad T_2 = 13^m,5.$$

Questi periodi vanno corretti dell'effetto di bocca.

A noi interessa qui l'uninodale.

La correzione di bocca dipende dal rapporto fra la larghezza dell'apertura del bacino considerato e la sua lunghezza [2]. Nel nostro caso, tale rapporto vale 9/10. Ne consegue, per il fattore di correzione, il valore 1,2.

L'uninodale vale pertanto

$$T = 29^m.$$

Il risultato non poteva essere più soddisfacente.

La (8) ha consentito di determinare la distanza media dell'uninodo da Garda: essa è risultata di km. 9 circa.

4. Restava da trovare una conferma sperimentale al risultato ottenuto. Fu costruito allo scopo un modello del lago di Garda.

(2) K. Honda, T. Terada, Y. Yoshida and D. Isitani, *An Investigation on the secondary Undulations of oceanic Tides*. « J. Coll. Science Imp. Univ. Tokyo », XXVIII (1910); G. Neumann, *Ueber Resonanzschwingungen von Meeresbuchten und die Mündungskorrektur bei Seiches*. « Deutsche Hydrograph. Zeitschrift », I, 2-3 (1948).

Conosciuto il rapporto fra la scala delle dimensioni orizzontali e quella verticale, è possibile, grazie al principio di Harris, risalire dal comportamento del modello al reale verificarsi del fenomeno in natura.

Consideriamo due bacini d'acqua, di profondità variabile e siano a e b rispettivamente i rapporti nei quali vengono a trovarsi le dimensioni orizzontali e verticali dei bacini stessi. Supposti, come al solito, piccoli moti, se si indica con

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} = g \left\{ \frac{\partial}{\partial x}\left(h \frac{\partial \zeta}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(h \frac{\partial \zeta}{\partial y}\right) \right\}$$

l'equazione del movimento nel primo bacino, nell'altro bacino si realizzerà un moto simile quando

$$\frac{r}{\tau^2} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} = g \frac{br}{a^2} \left\{ \frac{\partial}{\partial x}\left(h \frac{\partial \zeta}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(h \frac{\partial \zeta}{\partial y}\right) \right\},$$

essendo r la ragione delle ampiezze e τ il rapporto dei periodi (nel nostro caso, il rapporto fra i periodi delle oscillazioni libere del Garda e gli analoghi periodi delle oscillazioni del modello). La seconda relazione si identifica con la prima quando

$$\tau = \frac{a}{\sqrt{b}}. \tag{9}$$

Quando il rapporto fra le dimensioni orizzontali si mantiene costante, e tale si mantiene l'analogo rapporto tra le dimensioni verticali, il carattere del moto periodico (di grande lunghezza d'onda) in due bacini non viene quindi alterato. Deve comunque trattarsi di moti con piccolissima componente verticale, condizione generalmente verificata nei bacini naturali.

Il modello del lago di Garda fu costruito in modo da far assumere alla (9) il valore 850.

Non è qui il caso di soffermarsi sugli accorgimenti seguìti per far oscillare il modello e trovare i periodi delle oscillazioni che interessano l'intero lago o sue parti. Per quanto si riferisce al bacino Peschiera–Garda, si è pervenuti a trovare, come media di un numero elevatissimo di oscillazioni, il valore

$$T_m = 2^s,03.$$

Con tale periodo, l'oscillazione insorge nettissima e permane a lungo, presentando la linea nodale in corrispondenza della linea unente Punta Sirmione con un punto nei pressi di Lazise, conformemente al risultato ottenuto con il calcolo.

Se poi si tien conto del valore di τ, si trova che il periodo reale del bacino considerato è di

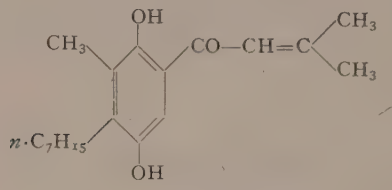
$$T_r = 28^m,8,$$

che corrisponde appunto al valore ottenuto con il calcolo e alla media dei valori osservati a Peschiera.

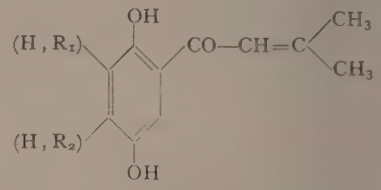
Resta così colmata una lacuna nella conoscenza dei moti liberi del Garda; lacuna il cui chiarimento era stato da tempo auspicato anche dal compianto prof. Vercelli.

Chimica organica. — *Sulla struttura della flavoglaucina* (*). Nota di ADOLFO QUILICO, CESARE CARDANI e LUIGI PANIZZI, presentata (**) dal Corrisp. A. QUILICO.

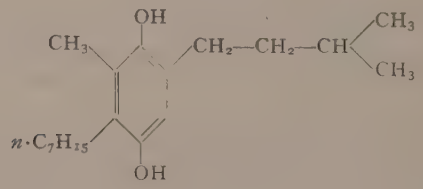
Come è stato altra volta riferito (1), lo studio chimico diretto della *flavoglaucina* $C_{19}H_{28}O_3$, caratteristico pigmento delle muffe del gruppo dell'*Aspergillus glaucus*, da noi perseguito a continuazione delle precedenti indagini di Raistrick, Robinson, Todd e collaboratori (2), ci aveva condotto ad attribuirle la costituzione (I) di *2-isopentenoil, 5-n·eptil, 6-metilidrochinone*, che meglio di ogni altra interpretava la serie ormai numerosa dei fatti sperimentali emersi dallo studio di questa sostanza.



(I)



(II)



(III)

La struttura (I) aveva trovato conferma dallo studio di modelli sintetici del tipo dell'*isopentenoilidrochinone* (II) (3), che mostrano proprietà e comportamento chimico in genere assai simili a quelli della flavoglaucina, e dalla sintesi del *2-isoamil, 5 n·eptil, 6-metilidrochinone* (III) (4), risultato identico

(*) Lavoro eseguito negli Istituti di Chimica generale del Politecnico di Milano e di Chimica organica dell'Università di Napoli.

(**) Nella seduta del 14 marzo.

(1) A. QUILICO, L. PANIZZI e E. MUGNAINI, « Gazz. Chim. It. », *79*, 89 (1949); « Nature », *164*, 26 (1949).

(2) H. RAISTRICK, R. ROBINSON e A. R. TODD, « Journ. Chem. Soc. », *1937*, 80; J. H. CRUICKSHANK, H. RAISTRICK e R. ROBINSON, « Journ. Chem. Soc. », *1938*, 2056; J. N. ASHLEY, H. RAISTRICK e RICHARD, « Bioch. Journ », *33*, 1292 (1939).

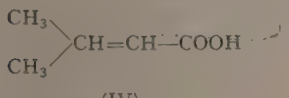
(3) A. QUILICO, C. CARDANI e L. PANIZZI, « Gazz. Chim. It. », *80*, 325 (1950); C. CARDANI, « Gazz. Chim. It. », *82*, 155 (1952).

(4) L. PANIZZI, R. A. NICOLAUS e A. QUILICO, « Gazz. Chim. It. », *80*, 610 (1950).

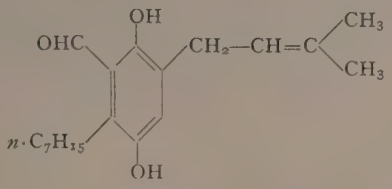
alla tetraidrodesossiflavoglaucina, ciò che aveva confermato in modo definitivo e inequivocabile la posizione, la lunghezza e la struttura dello scheletro carbonico delle tre catene laterali presenti nel pigmento.

Alcune anomalie presentate dalla flavoglaucina in confronto ai modelli del tipo (II), come ad esempio l'insolubilità negli alcali acquosi e la incapacità di ciclizzare in ambiente alcalino, potevano attribuirsi alla influenza della catena eptilica, essendosi osservato che il *2-isopentenoil, 5-n·eptil-idrochinone* (formula II con R_1=H e R_2=—C_7H_{15}) era insolubile in alcali e non si trasformava nel corrispondente cromanone per azione degli agenti alcalini [5]. Anche gli spettri ultravioletti della flavoglaucina, delle sostanze modello (II) e dei corrispondenti prodotti di riduzione e ciclizzazione, mostravano in genere un accordo soddisfacente [6].

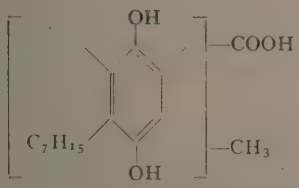
Prove condotte recentemente allo scopo di dare una prova diretta della presenza della catena isopentenoilica $(CH_3)_2C{=}CH{-}CO{-}$ nella flavoglaucina dalla formazione possibile di *acido dimetilacrilico* (IV) nell'ossidazione secondo Dakin del pigmento, hanno però messo in luce fatti difficilmente conciliabili con la formula (I), e che porterebbero ad assegnare alla flavoglaucina la struttura (V) di *aldeide 2-isopentenil, 5-n·eptil, 6-gentisica*, che si ricava dalla (I) scambiando le posizioni del —CO— e del —CH_2— nelle catene laterali in 2 e in 6.



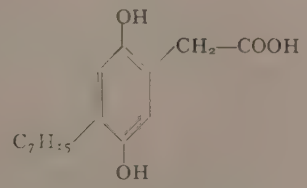
(IV)



(V)



(VI)



(VII)

Ossidando la flavoglaucina con H_2O_2 e NaOH in ambiente alcoolico si formano, accanto ad *acido n·ottoico* e a sostanze neutre di natura non identificata, due acidi solidi cristallini non volatili. Il primo di essi, di formula $C_{15}H_{22}O_4$, è assai poco solubile in acqua, fonde a 159°-160°, e dà in soluzione

(5) C. Cardani, loco citato.

(6) A. Quilico, C. Cardani e L. Panizzi, loc cit.; M. Simonetta e C. Cardani, «Gazz. Chim. It.», *80*, 750 (1950).

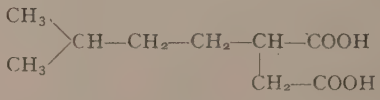
alcoolica intensa colorazione rosso–bruna con $FeCl_3$. All'ossidazione permanganica dà abbondante acido ottoico. Avuto riguardo alla formula e al comportamento chimico, è assai probabile che esso sia un acido gentisico o omogentisico del tipo (VI) o (VII), e poiché solo la determinazione della sua esatta struttura, ancora in corso, permetterebbe di giudicare se la sua formazione sia o meno in accordo con la formula (I) della flavoglaucina, per il momento non ce ne occuperemo.

Il secondo acido, p. f. 203°–204°, assai più energico e solubile in acqua del primo, risponde alla formula $C_9H_{12}O_4$ e contiene due gruppi carbossilici. È fortemente insaturo al permanganato, che lo ossida quantitativamente ad acetone, acido acetico e acido ossalico in ambiente alcalino, ad acetone, acido acetico e CO_2 in ambiente acido, secondo le equazioni:

$$C_7H_{10}(COOH)_2 + 3O_2 \xrightarrow{OH^-} CH_3—CO—CH_3 + 2(COOH)_2 + CH_3—COOH$$

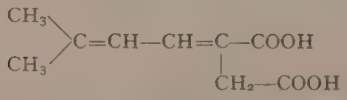
$$C_7H_{10}(COOH)_2 + 4O_2 \xrightarrow{H^+} CH_3—CO—CH_3 + 4CO_2 + H_2O + CH_3—COOH.$$

L'idrogenazione catalitica con Ni Raney condotta sulle soluzioni acquose del sale sodico dell'acido $C_9H_{12}O_4$, conduce ad un acido saturo $C_9H_{16}O_4$ p. f. 77°–78°, assai solubile in acqua e stabile al permanganato, che dà una anilide acida p. f. 135°. Esso risulta identico all'*acido isoamilsuccinico* [*d*+*l*] (VIII), già descritto nella letteratura [7] e da noi ripreparato per il confronto:

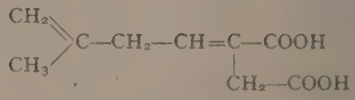


(VIII)

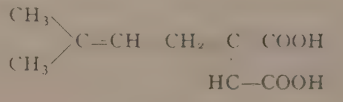
Ciò porta a concludere che l'acido insaturo $C_9H_{12}O_4$ contiene l'intelaiatura carbonica dell'acido isoamilsuccinico e due doppi legami idrogenabili. Tenuto conto dei prodotti di ossidazione permanganica, e prescindendo almeno per ora dalla sua configurazione, ad esso deve venire assegnata una delle strutture:



(IX)



(X)



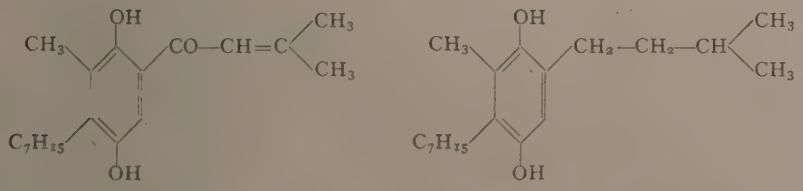
(XI)

(7) R. Fittig e C. Schirmacher, «Ann.», *304*, 306 (1899).

Tra esse, avuto riguardo al modo di formazione di questa sostanza e in attesa di poterla confermare con la sintesi, appare più probabile la (X) di *acido isobutenilitaconico*, essendo noto dalle ricerche di Fittig [8] che gli acidi alchilmaleici e alchilfumarici si traspongono per ebollizione con alcali nei corrispondenti acidi alchilidensuccinici:

In ogni caso, lasciando per ora impregiudicata la questione di quale delle tre formule (IX), (X) e (XI) debba essere attribuita all'acido $C_9H_{12}O_4$, è evidente che l'ottenimento di una sostanza di questo tipo appare difficilmente conciliabile con l'esistenza nella flavoglaucina della catena isopentenoilica. Non si comprende infatti come in un processo ossidativo energico come è quello che ha dato origine all'acido in questione, si possa essere eliminato l'ossigeno chetonico della catena C_5.

Un altro fatto in disaccordo con la formula (I) è che tra i prodotti neutri dell'ossidazione con H_2O_2 e alcali della flavoglaucina non si ritrova il *metil, n·ottilchetone*, che si forma invece abbondantemente nell'ossidazione in condizioni analoghe della *tetraidrodesossiflavoglaucina* (III). Poiché il metil ottilchetone proviene, secondo un meccanismo del quale abbiamo dato altre volte l'interpretazione [9], dalla demolizione di una parte della molecola di (III) che – ammessa l'esattezza della struttura (I) – sarebbe identica nei due composti, non si comprende perché la flavoglaucina non debba fornire tale chetone:

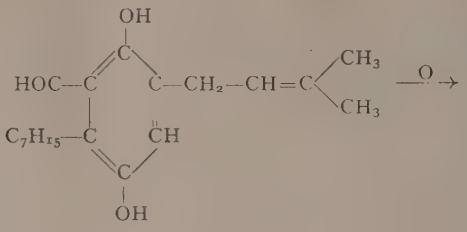


Questi fatti e la formazione dell'acido $C_9H_{12}O_4$ apparirebbero invece facilmente comprensibili ammettendo che il gruppo $-CH_3$ della tetraidrodesossiflavoglaucina non esista originariamente nella flavoglaucina, ma si sia formato per riduzione di un gruppo —CHO presente nel pigmento, che sarebbe quindi un'*aldeide 2 isopentenil, 5·n·eptil, 6 gentisica*.

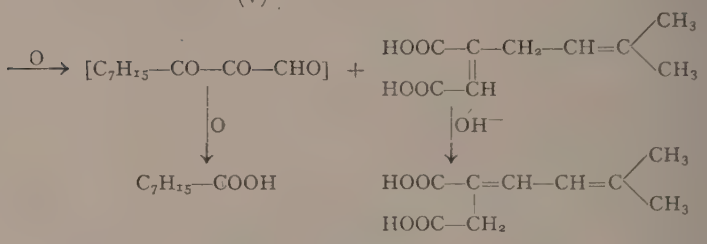
Riguardo alla posizione del doppio legame nella catena isopentenica, l'ottenimento di *acetone* nell'ossidazione a freddo del pigmento con $KMnO_4$ e la formazione di un *isomero ciclico* (vedi avanti) per azione dell'HCl a caldo, indicano come più probabile la struttura dimetilallilica della formula (V).

(8) R. Fittig e W. D. Hoeffken, «Ann.», *304*, 327 (1899).
(9) Vedi A. Quilico, L. Panizzi e E. Mugnaini, loc. cit., p. 97.

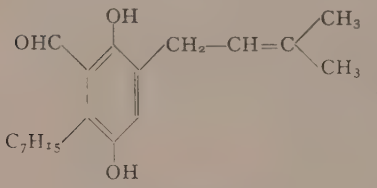
Adottando per la flavoglaucina la formula (V), la sua ossidazione con H_2O_2 e alcali si svolgerebbe secondo lo schema:



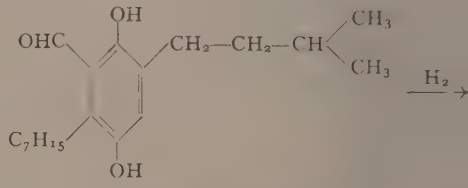
(V)



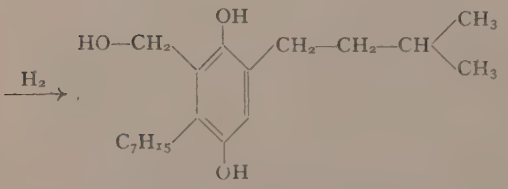
mentre la sua riduzione seguirebbe l'altro:



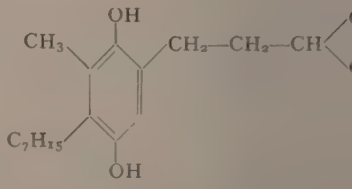
(V) Flavoglaucina.



(XII) Diidroflavoglaucina.



(XIII) Tetraidroflavoglaucina.



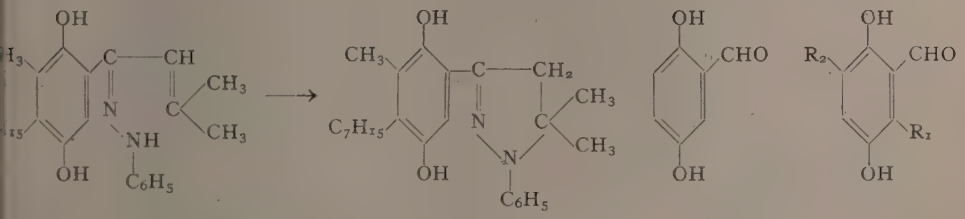
(III) Tetraidrodesossiflavoglaucina

Alla diidroflavoglaucina spetterebbe allora la struttura (XII) di *aldeide 2-isoamil, 5-n·eptil, 6 gentisica* [10], mentre la tetraidroflavoglaucina sarebbe un alcool primario [11] e precisamente l'*alcool 2-isoamil 5-n·eptil, 6 gentisico* (XIII).

(10) La diminuzione di colore appena apprezzabile che accompagna il passaggio dalla flavoglaucina al suo diidroderivato si accorda col fatto che, secondo la formula V, il doppio legame della catena C_5 non è coniugato né con un —CO— carbonilico, né con il sistema benzenico.

(11) D'accordo col fatto che non siamo riusciti a disidratare la tetraidroflavoglaucina al corrispondente composto etilenico, ciò che sarebbe dovuto avvenire facilmente se in essa fosse stato presente un gruppo alcoolico secondario nella catena C_5.

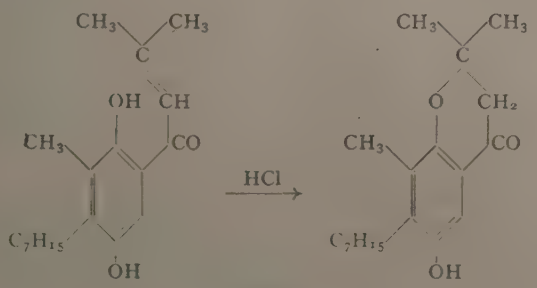
Altri fatti, da noi osservati recentemente, confermerebbero la struttura (V). Tra gli argomenti a favore della presenza nella flavoglaucina del gruppo isopentenoilico $(CH_3)_2C{=}CH{-}CO{-}$, ci era sembrato particolarmente probativo l'ottenimento dal pigmento di un derivato fenilidrazinico avente il carattere di una *pirazolina* (XIV), a giudicare dall'intensa colorazione azzurro-violacea che esso dava sotto l'azione di differenti ossidanti ($FeCl_3$, HNO_2, H_2CrO_4), la formazione del quale ben si accordava con la struttura (I) assegnata al pigmento. Abbiamo ora potuto constatare che la stessa reazione è presentata anche dal fenilidrazone della diidroflavoglaucina per il quale, a causa della saturazione del doppio legame, non è più possibile la ciclizzazione a pirazolina.



(XIV) (XV) (XVI)

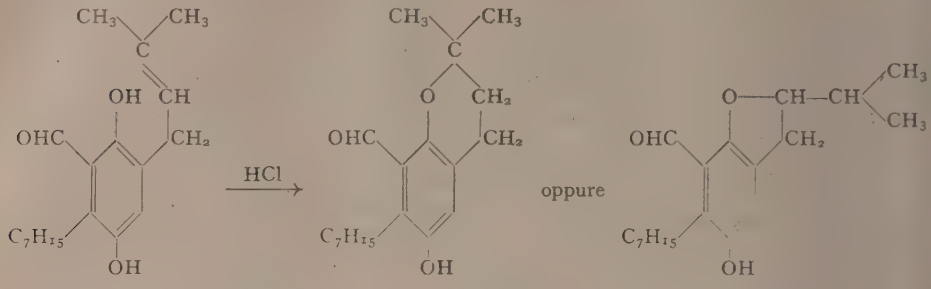
Avendo esaminato il comportamento di fronte agli ossidanti dei fenilidrazoni dell'*aldeide gentisica* (XV) e di differenti *aldeidi idrochinoniche* sintetiche del tipo (XVI), abbiamo osservato che tutte queste sostanze dànno intensamente la reazione cromatica con $FeCl_3$ e gli altri ossidanti, reazione che sembra essere caratteristica dei fenilidrazoni delle p-diossialdeidi aromatiche, dato che i fenilidrazoni dei p-diossichetoni come il *diossiisovalerofenone* non la forniscono.

La struttura aldeidica (V) oltre che dare una spiegazione dei fatti nuovi emersi dallo studio della flavoglaucina e che non trovano soddisfacente giustificazione in base alla formula chetonica (I), non è in disaccordo con quanto si era precedentemente trovato nello studio chimico del pigmento. Così la formazione di un isomero ciclico saturo della flavoglaucina per azione dell'HCl in ambiente acetico o alcoolico, che era stata interpretata come una ciclizzazione al *cromanone* (XVII):



(XVII)

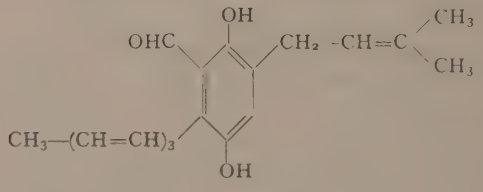
può essere ancor meglio spiegata attribuendo al prodotto una struttura *cromanica* (XVIII) o *cumaranica* (XIX):



(XVIII) (XIX)

È infatti noto dalle ricerche di Claisen e altri [12] che gli orto fenoli allilici subiscono facilmente la ciclizzazione dei due tipi sopra accennati per azione dei condensanti acidi. Delle due possibili strutture la (XVIII) si presenta come più probabile.

L'*auroglaucina* $C_{19}H_{22}O_3$, che accompagna spesso la flavoglaucina nelle muffe del gruppo dell'*Aspergillus glaucus*, e differisce da questa solo per la presenza di tre doppi legami, come è dimostrato dall'ottenimento da essa della diidroflavoglaucina per cauta idrogenazione catalitica, avrebbe allora una struttura del tipo (XX) di *aldeide 2-isopentenil, 5-n-eptatrienil, 6-gentisica*:



(XX)

nella quale resta ancora a dimostrare la distribuzione dei quattro doppi legami tra le catene C_7 e C_5.

Per quanto i tentativi rivolti a dare una dimostrazione diretta della presenza del gruppo aldeidico nella flavoglaucina, nel suo diidroderivato e nel suo prodotto di ciclizzazione per trasformazione nei corrispondenti acidi carbossilici ad egual numero di atomi di carbonio, non abbiano finora condotto al risultato desiderato, il complesso dei fatti osservati conferisce alla formula aldeidica (V) un elevato grado di probabilità, ciò che le ricerche in corso permetteranno di chiarire definitivamente.

(12) L. Claisen e E. Tietze, « Ber. », *59*, 2350 (1926), « Ann. », *449*, 87 (1926); L. Claisen, « Ann. », *418*, 80, (1919); « D.R.P. 279.864, Frl. », *12*, 896; « D.R.P. 304.797. Frl. », *14*, 497; L. Claisen, « Ann. », *442*, 228 (1925). Roger Adams e R. E. Rindfusz, « Journ. Am. Chem. Soc. », *41*, 660 (1919); Roger Adams, F. L. Roman e W. N. Sperry, « Journ. Am. Chem. Soc. », *44*, 1781 (1922).

Geologia. — *Sulle interpretazioni geologiche delle anomalie negative della gravità regionale in Sicilia* (*). Nota (**) del Socio RAMIRO FABIANI.

I. – CENNI STORICI SULLE DETERMINAZIONI DI GRAVITÀ RELATIVA IN SICILIA.

L'esistenza di aree con *deficit* di gravità in Italia era stata segnalata già nell'Ottocento (es. da v. Triulzi [1] per le regioni Adriatiche; da Riccò e Venturi per la Sicilia) e poi via via illustrata in carte generali o regionali dagli stessi studiosi e da altri, tra i quali per i primi lustri di questo secolo possiamo ricordare Luigi De Marchi, G. Costanzi, W. Deecke, F. Kossmat ed H. Lissner [2-7].

Per la Sicilia la individuazione dell'area con anomalie negative, dovuta a Riccò e a Venturi (ch'ebbero a collaboratori E. Soler e C. Mineo), era risultata da pochissime stazioni pendolari (fig. 1, I), tuttavia la zona centrale (Caltanissetta) coi massimi valori negativi non ha subìto spostamenti dalle determinazioni successive, eseguite in assai più numerose stazioni, le quali hanno portato essenzialmente solo ad una maggiore estensione dell'area negativa (fig. 1, II, II', III). Alla prima esplorazione gravimetrica regionale di Riccò e Venturi è seguita quella promossa e organizzata secondo le direttive dello scrivente nel 1928 [8] e realizzata nel triennio successivo ad opera anzitutto di due squadre dell'Istituto Geografico Militare, messe a disposizione con illuminata comprensione dal generale Nicola Vacchelli e dirette rispettivamente dagli allora capitani dottori P. Gallina e G. Guzzo,

(*) Lavoro eseguito nel Centro di Studio per la Geologia dell'Italia Centromeridionale del Consiglio Nazionale delle Ricerche. Roma.

(**) Presentata nella seduta del 14 marzo 1953.

(1) A. TRIULZI, *Relative Schwerebestimm. durch Pendelbeobacht. ausgeführt durch die k. u. k. Krigsmarine in den Jahren 1892-1894*. Wien, 1895.

(2) L. DE MARCHI, *Trattato di Geografia Fisica*. Milano 1901, fig. 14, p. 44.

(3) G. COSTANZI, *Abbozzo di una carta delle isoanomale della gravità nell'Europa centrale e nel Giappone merid.* « Riv. Geogr. It. », XIV, p. 364. Firenze 1907.

(4) W. DEECKE, *Der geol. Bau der Apenninhalbinsel und die Schweremessunggen*. « N. Jahrbuch. Min. etc. Festband », p. 129. Suttgart 1907.

(5) A. RICCÒ, *Anom. della grav. e del magn. terr. in Calabria e Sicilia*, ecc. « Boll. Soc. Sismol. It. », XII, p. 393. Modena 1908.

(6) A. VENTURI, *Determ. di gravità relat. nella reg. occid. della Sicilia*. « Atti R. Acc. di Palermo » 1901. – ID., *Nuove det. di gravità rel. in Sicilia*. « Rend. R. Acc. Lincei » 1905, 1907 e 1909, 1910).

(7) F. KOSSMAT, *Die mediterr. Kettengeb*, ecc. « Abhl. mat.-phys. Kl. d. sachs. Ak. Wirs. », vol. 38, pp. 1-61 e carta. Lipsia 1921.

(8) R. FABIANI, *Per nuove ric. geof. in Sicilia coord. coi probl. geol. e minerar.* « Boll. Ass. Min. Sic. », IV. Palermo 1928.

i quali eseguirono le determinazioni pendolari nel maggior numero delle stazioni prestabilite. Un contributo assai efficace, soprattutto riguardo a stazioni fondamentali, ha portato una terza squadra diretta dal prof. Corradino Mineo, ch'ebbe a collaboratori i professori P. Tortorici e B. Gulotta. Ai rilievi del Gallina aveva in parte collaborato il prof. Ballarin. I dati delle osservazioni eseguite in 122 stazioni (a quelle di gravità relativa s'erano aggiunte anche quelle della deviazione della verticale) furono elaborati dal Personale scientifico dell'Istituto Geografico Militare e si conclusero colla costruzione di tre carte delle isoanomale della gravità regionale dell'Isola, una colla riduzione di Faye e due colle correzioni topografica e di Bouguer, tenendo conto nei calcoli rispettivamente di una densità media 2 e di una densità pure media 2,6 [9].

Com'è noto, alle determinazioni di terraferma seguirono quelle nei mari circostanti, ad opera del prof. G. Cassinis col metodo delle osservazioni pendolari in sommergibile ideato da F. A. Vening Meinesz [10-11].

Un interessante sguardo riassuntivo e consuntivo anche delle determinazioni in Sicilia entro il quadro della regione italiana, ci dava il prof. Boaga nel 1947 [12], mentre il prof. Morelli combinava nella costruzione di nuove carte delle anomalie gravimetriche (una secondo Faye, l'altra secondo Bouguer) tutti i dati più attendibili risultanti fino al 1945 [13].

Alla Sicilia, che a tale data contava il maggior numero di determinazioni pendolari di gravità (180, contando quelle di Riccò e Venturi), veniva l'anno scorso dedicata una nuova esplorazione gravimetrica regionale da parte dell'Istituto Nazionale di Geofisica, a mezzo invece di gravimetri (2 apparecchi Worden). I dati di osservazione e di elaborazione e i risultati concretati in una nuova carta delle isoanomale secondo Bouguer – vennero pubblicati dai professori Medi e Morelli negli Annali di Geofisica [14]. Come appare dalla fig. 1, il quadro delle isoanomale differisce ben poco da quello fissato nelle carte precedenti, e nessuno spostamento si ha nell'ubicazione dei luoghi di massimo negativo e, rispettivamente, di massimo positivo.

Ma non su questo intendo fermarmi, bensì sulla interpretazione adottata dagli Autori per spiegare l'esistenza delle aree con anomalie negative. Dico delle aree, perché oltre alla più vistosa, che coincide col centro sud della Sicilia e si stende oltre la costa meridionale, propagandosi entro mare, i

(9) R. Fabiani, *Rel. sull'espl. geof. region. della Sicilia eseg. nel triennio 1929-1931* (con 3 tavole), Ibid., VIII, Palermo 1932.

(10) G. Cassinis, M. De Pisa, *La crociera gravimetrica del R. Sommerg. «Vettor Pisani» 1931*. « Pubbl. Ist. Topogr. e Geod. Polit. », Milano 1935.

(11) G. Cassinis, *La crociera grav. del R. Sommerg.* « *De Geneys* », *1935*. Ibid., 1942.

(12) G. Boaga, *Lo stato attuale della rete grav. italiana*. « Commiss. Geod. Ital. », Mem. n. 4, Firenze 1947.

(13) C. Morelli, *La rete geofisica e geod. in Italia*, ecc. « Ist. Geof. Trieste », n. 238. Trieste 1948.

(14) E. Medi, C. Morelli, *Rilievo gravim. della Sicilia*. « Ann. di Geofisica », V, n. 2, Roma 1952.

due Autori accennano ad altre locali, incluse nelle zone positive e non segnate nella loro carta.

Prima però ricordo l'opinione di studiosi precedenti.

II. – INTERPRETAZIONI GEOLOGICHE DELLE ANOMALIE NEGATIVE.

1° W. Deecke (loc. cit., 1907, p. 150), come causa principale delle anomalie negative ammetteva il predominante sviluppo che nella grande area con difetto di gravità assumono formazioni costituite in parte rilevante di

Fig. 1. – ···· I contorno dell'area con anomalie negative, secondo la carta di Riccò; —— II e – – – II', secondo la costruzione dell'I. G. M.; – · – · – III, secondo la costruzione dell'Istituto Nazionale di Geofisica (Ved. testo).

rocce e minerali di bassa densità: gessi, tripoli, solfo (Miocene superiore). Egli non escludeva tuttavia un certo concorso di forti disturbi tettonici, soprattutto per faglie.

2° L'argomento formava in seguito (1924 e 1925) oggetto di più diffusa trattazione da parte di Enrico Fossa-Mancini [15-16], il quale, considerando insieme a quella siciliana la zona con difetto di gravità – secondo che allora risultava – della fascia preappenninica adriatica, concludeva le sue acute osservazioni coll'attribuire il fenomeno essenzialmente alla costituzione litologico mineralogica della formazione calcareo-gessoso-solfifera del Miocene

15) E. FOSSA MANCINI, *Il sign. geol. delle anom. della grav. riscontr. nell'Emilia, nelle Marche e nella Sicilia.* « Soc. Tosc. Sc. N. Proc. », V, vol. 33. Pisa 1924.

16) E. FOSSA MANCINI, *Rapp. tra gessi mioc. e anom. neg. della grav. nell'Italia penins. e nella Sicilia.* Ibid., 1925.

superiore, sviluppata in entrambe le regioni. Però non solo, com'egli scriveva, « per la bassa densità notevolmente inferiore a 2,6 (valore che si ammette rappresenti la densità media della parte superiore della scorza terrestre) », ma anche per le cavernosità assai diffuse nei calcari, nei gessi e nelle masse di salgemma.

3° La questione non era invece stata presa in particolare esame, nemmeno dopo costruita dall'I.G.M. e da me pubblicata nel 1932 la rappresentazione grafica della distribuzione delle anomalie gravimetriche della Sicilia, risultante dalle campagne del 1929–1931. Mi ripromettevo invero di promuovere una nuova rielaborazione dei dati raccolti, dopo aver tentato di stabilire la *densità geologica* [17], in corrispondenza delle varie stazioni e in un adeguato ambito attorno a ciascuna, elemento da introdurre nella correzione di Bouguer al posto del valore medio 2,6 tenuto nell'accennata rappresentazione grafica.

Ma il non facile tentativo non poté più farsi, e d'altra parte penso che non avrebbe potuto approdare a risultati concreti, poiché le indagini geologiche di superficie avrebbero dovuto essere integrate da elementi, che solo un adeguato numero di sondaggi potrebbe fornire per poter ottenere la così detta *correzione geologica*, da introdurre nelle anomalie di Bouguer, come ultimamente è stato fatto pel territorio costiero di Orano in Algeria [18-19].

4° I professori Medi e Morelli sono d'avviso che le anomalie negative della Sicilia non possano attribuirsi solo alle stratificazioni più esterne della crosta, ma siano legate alle caratteristiche degli strati più profondi di questa.

L'asserzione è troppo interessante per limitarci a semplicemente citarla. È però necessario riportare integralmente le parti più significative della *Discussione dei risultati* dei due Autori (loc. cit., pp. 233, 235 e 243):

Omissis.

« Il quadro gravimetrico della Sicilia è caratterizzato dall'estesa anomalia negativa centrale sopra menzionata, estendentesi in mare verso sud e circondata per il resto da anomalie positive, notevoli soprattutto verso SE. Poiché, come si è detto, tale quadro non viene sostanzialmente mutato né dai diversi valori assunti per le densità nelle riduzioni dei valori osservati della gravità, né dai diversi tipi di riduzioni applicate, anche isostatiche, esso non può essere attribuito solo alle stratificazioni più esterne della crosta, ma rispecchia probabilmente caratteristiche degli strati più profondi di questa ».

« È così probabile che la grande anomalia negativa corrisponda ad un'ampia fossa di origine tettonica gradualmente affondantesi, nella quale si sono venuti accumulando in un modo o nell'altro sedimenti a bassa densità. Tuttavia la presenza di grandi blocchi calcarei, quali i M. Sicani, affioranti proprio nell'area depressa, dà sufficiente ragione all'ipotesi dell'accumulo per traslazione, secondo l'ipotesi di Beneo ».

« Secondo questo A., infatti, in Sicilia l'autoctono supposto in prevalenza calcareo affiora esclusivamente nella parte orientale dell'Isola (altipiano di Ragusa), mentre il resto è ricoperto

(17) R. FABIANI, *Esplor. geof. reg. Sicilia, ecc.* « L'Universo », XII, n. 10, Firenze 1931.

(18) S. N. REPAL (Soc. Nationale de Rech. et d'Expl. des Pétroles en Algérie). XIX Cong. Géol. Int., Monogr. n. 16. Alger 1952.

(19) Y. GOURINARD, *Le littoral oranais*. Ibid., Mon. n. 22.

da una estesa massa plastica alloctona prevalentemente argillosa, costituente l'unità tettonica denominata "argille scagliose" (A. S.) e contenente esotici, più rigidi, di ogni dimensione e delle più diverse età. Autoctoni sono ancora almeno in parte i Monti Peloritani (metamorfici), l'Etna ed i Vulcani Iblei».

«L'ipotesi da noi sopra avanzata è in accordo e giustifica queste vedute: la grande massa dei terreni plastici della coltre di A. S. occuperebbe col massimo spessore l'area di depressione, mentre sarebbe più esigua o nulla in corrispondenza degli affioramenti di terreni autoctoni».

«Il meccanismo è reso pienamente intuitivo se si tiene presente che "le A. S. della Sicilia e tutte le A. S. del mondo, recenti o antichissime, si comportano come una massa fluida che cola su un substrato rigido per effetto delle infinite componenti tangenziali della gravità. Questa massa plastica, instabile, si muove dai bacini di origine, di qualsiasi età, triassica o cretacea o terziaria (se si riferisce all'orogenesi alpina), avanzando a più riprese nel tempo e nello spazio, sollecitata da una vera e propria onda orogenetica. In realtà si verifica che in tempi enormi ha percorso spazi forse relativamente limitati ma di ampiezza variabilissima"» (Beneo [20-21]).

«L'effetto massimo di innalzamento del substrato denso si ha nel SE dell'Isola, dove le masse effusive note e le intrusive ancora per la massima parte ignote degli Iblei ne costituiscono l'effetto più cospicuo. Secondo Beneo, l'altopiano calcareo di Ragusa, autoctono, è stato aggirato come se fosse un bastione o uno scoglio dalle A. S. nella loro traslazione (sottomarina), con verso approssimativo N–S».

«Si nota poi in generale che l'andamento delle isoanomale positive è molto più movimentato di quello delle isoanomale negative della zona centrale dell'Isola: ciò perché queste derivano da una causa più profonda. Così l'anomalia positiva regionale che corre parallela alla costa settentrionale dell'Isola presenta numerose diminuzioni (anomalie negative locali). Queste sono probabilmente in corrispondenza di fosse trasversali che, come ci comunica gentilmente il dr. Beneo, sono invase dalla coltre alloctona».

«Nel quadro delle anomalie positive sono da notare anche i due massimi locali nella zona di Sciacca ed a W di Castelvetrano: questi corrispondono ad un notevole relativo avvicinamento alla superficie del substrato denso. Va inoltre segnalata la completa eliminazione del massiccio effusivo dell'Etna: ciò starebbe ad indicare che esso costituisce una manifestazione superficiale limitata agli strati più esterni della crosta».

«In conclusione, possiamo dire che il rilievo gravimetrico della Sicilia di cui qui si è reso conto, ha consentito di determinare con precisione l'andamento delle isoanomale, e ciò ha portato ad importanti induzioni sulle strutture geologiche profonde e sulla tettonica dell'Isola».

«In particolare, sembrerebbe confermata la sintesi tettonica del Beneo, e ciò costituisce, oltre che un notevole apporto dal punto di vista scientifico, anche un sostanziale contributo all'impostazione pratica delle ricerche geominerarie e petrolifere nell'Isola, per le quali una chiara risoluzione d'insieme del problema geologico-tettonico forma una premessa fondamentale ed indispensabile».

Esaminiamo dunque qualche punto di questa discussione e delle relative conclusioni. – L'ipotesi che l'area di anomalie negative corrisponda appunto ad una fossa tettonica subsidente, nella quale si sono accumulati materiali «a bassa densità» si affaccia spontanea anche per quanto avviene in altre regioni.

(20) E. BENEO, *Sul microdiapiro di Leonforte, ecc.* «Rend. Acc. Naz. Lincei», (8ª), VII, 1949.

(21) E. BENEO, *Le possib. petrol. della Sicilia nel quadro di una più realistica interpret. della tett. Ital.*, «Boll. Serv. Geol. It.», LXXII, 1° f., 1950.

Nel caso della Sicilia la « bassa densità » complessiva, per un certo spessore dev'essere legata alle caratteristiche delle formazioni del Miocene medio (Tortoniano) e del Miocene superiore (Messiniano). Nel primo si hanno infatti numerosi e talora assai cospicui ammassi di salgemma e nel secondo gessi, tripoli, solfo (formazione calcareo-gessoso-solfifera), con diffusione e sviluppo di cavernosità (calcari « perciuliati » dei minatori siciliani, fenomeni di tipo carsico nelle masse saline e nei gessi). A profondità pure non rilevante, e specie nelle parti più depresse della fossa, anche rocce con densità poco diversa da quella dei materiali ora nominati, probabilmente, per costipamento di carico, assumono densità alquanto superiore, che potrebbe raggiungere valori paragonabili a quelli di rocce calcaree o arenacee grossolane superficiali.

S'aggiunga che Medi e Morelli avvertono che il quadro gravimetrico non cambia sensibilmente, « *anche se si assumono valori diversi per la densità* (Essi hanno tuttavia introdotto valori tra 1,8 e 2,9 nelle aree ove sono prevalenti rocce di densità litologica media corrispondente; il valore 2 è stato attribuito a quasi tutta l'area con anomalie negative ed esteso oltre questa ad est e soprattutto ad ovest), *né se si applicano diversi tipi di riduzioni anche isostatiche* ».

Ancor più forse di quanto i due Autori ammettono, l'influenza dovrebbe dipendere quindi in prevalenza da *condizioni profonde*. Profondità di quale ordine ? Se, come si potrebbe presumere dall'indifferenza, agli effetti del fenomeno gravimetrico, per l'introduzione nei calcoli di valori diversi di densità e di riduzioni, tale profondità fosse di parecchi chilometri, non vedo quale potrebbe essere l'apporto e « il sostanziale contributo all'impostazione pratica delle ricerche geominerarie e petrolifere dell'Isola » del nuovo rilievo gravimetrico regionale, secondo affermano, a titolo di conclusione, i due Autori (loc. cit., p. 243).

Si dovrebbe essere infatti di fronte a condizioni che vengono postulate per altre zone negative della regione mediterranea, per spiegare le quali, il prof. L. Glangeaud dell'Università di Besançon recentemente scriveva a conclusione di un interessante lavoro di sintesi: *Tout cet ensemble de phénomènes amène à penser qu'on a là de vastes mouvements sous-crustaux intraméditerraneens dus à des courants des convection ou à toute autre cause profonde. De tels déplacements profonds pourront produire, sur les zones d'anomalies positives, un vaste étirement du sial compensé à leur périphérie par un épaississement de la croûte sialique, se traduisant par des anomalies negatives* [22].

Il pensiero può dunque andare assai lontano e portarci ad ipotesi e teorie che sono in continua evoluzione e si risolvono talora in vane speculazioni, poiché nuovi elementi di fatto e nuove esperienze ne dimostrano l'infondatezza [23].

(22) L. Glangeaud, *Intérpr. tectono-phys. des caract. struct. et paléogeogr. de la Méditerranée, ecc.* « Bull. Soc. Géol. France » (6), I, p. 785, Paris 1952.

(23) L. Mintrop, *Der untergr. d. Kontinente und Ozeane nach geophysik. Untersuch.* « Ann. Geofisica », V, n. 2, Roma 1952.

Comunque, su questa via ci fermiamo, augurandoci che l'interessante problema dell'influenza delle possibili e probabili « condizioni profonde » venga investigato dai Colleghi geofisici e geodeti.

E ritorniamo. . . alla superficie, ossia alla parte che è accessibile all'esame diretto del geologo, il quale oggi può valersi inoltre di vari metodi della geofisica applicata alla prospezione geologico-mineraria per avere un'idea delle condizioni strutturali del sottosuolo e quindi un orientamento per le esplorazioni meccaniche a mezzo sondaggi.

Per quanto le sopra riportate considerazioni dei professori Medi e Morelli inducano a ritenere che nella questione genetica delle anomalie negative della Sicilia alle condizioni del complesso superficiale, epidermico, delle formazioni geologiche si debba attribuire un significato sostanzialmente trascurabile, così invece non risulta. Non risulta, se si considera che i due Autori ritengono che le caratteristiche gravimetriche regionali avallino in tutto e per tutto le vedute geologiche dell'ing. Beneo.

A parte l'implicita contraddizione, in cui essi cadono, è qui necessario un sia pure rapidissimo esame di tali vedute, che mi riserbo di discutere con maggiore ampiezza in altra sede, soprattutto anche in quanto su esse Beneo fonda le direttive per le ricerche di idrocarburi e di solfo in Sicilia.

Che la notissima area di anomalie negative possa corrispondere all'esistenza di una fossa o bacino, ove per subsidenza ha potuto accumularsi una cospicua massa di formazioni, soprattutto del Terziario e in parte rilevante di natura argillosa, niente da eccepire.

Non vedo invece anzitutto perché « la presenza di grandi blocchi calcarei quali i Monti Sicani, affioranti proprio nell'area depressa, dà sufficiente ragione all'ipotesi dell'accumulo per traslazione, secondo l'ipotesi di Beneo ».

Ora – tralasciando qui la questione dei Sicani e degli altri rilievi montuosi della Sicilia, che Beneo considera « blocchi » o addirittura « sassi » o « pattume » – chiedo: se è proprio necessario che la fossa sia stata colmata di materiali provenienti da « bacini di origine » situati (dove?) a nord della Sicilia; se detti materiali, viaggiando con estrema lentezza cioè dall'Eocene medio al Miocene medio – ossia durante qualche decina di milioni d'anni – hanno potuto trovare sempre condizioni adatte per spostarsi dal margine nord dell'Isola via via, sia pure a tappe, fino al margine sud e dentro il mare che lo bagna, sotto forma di plasticissima colata (« Argille scagliose »); se questa criptogenica colata abbia potuto strappare e trasportare, sia pure per effetto della gravità, grandiosi frammenti di catene montuose, di età compresa fra il Paleozoico e il Terziario, in modo ch'essi conservassero (salvo dettagli locali) la giacitura originaria dei vari termini costitutivi così da consentire di rilevarne la regolare stratigrafia.

Si noti bene che la traslazione di codesta colata argillosa inglobante caoticamente blocchi e intere montagne di qualsiasi età sarebbe avvenuta *sottomarina*. Essa, secondo Beneo [20], *avrebbe coinvolto anche la formazione gessoso-solfifera del Miocene superiore e di conseguenza, quella un po' più antica*

(*Miocene medio, parte alta, cioè Tortoniano*) *delle argille salate e degli ammassi di salgemma.*

Ma queste formazioni non si sono depositate in mare schietto, bensì in ambiente lagunare sensu lato, *in bacini cioè soggetti a forte evaporazione* (per questo appunto i gessi e i sali si dicono genericamente « *evaporiti* »), *come possono dunque essere state preda di una colata od onda orogenica « sottomarina »?*

D'altro canto, dal punto di vista *gravimetrico* parmi indifferente che la fossa corrispondente alle anomalie negative sia stata colmata da materiali « alloctoni » trasportativi da lontani ignoti bacini di rifornimento della poltiglia argillosa o invece da sedimenti di apporto locale o comunque vicino. Né il disordine stratigrafico che in certe plaghe presenta la massa argillosa inglobante pure blocchi e lembi di strati di varia età, rappresenta una condizione che non possa trovare altre spiegazione se non coll'ipotesi della provenienza alloctona. Basti considerare:

a) che la deposizione delle evaporiti accompagnate da copioso materiale argilloso, è avvenuta in bacini di estensione e profondità diverse, come dimostrano la discontinuità areale e le variazioni di potenza dei depositi;

b) che nella serie sottogiacente stratigraficamente – dal Trias al Miocene medio – si sono avvicendati complessi sedimentari di *facies* assai diversa: argillosi, marnosi, fliscioidi, calcarei e arenacei ora a grossi strati ora lastriformi, dunque serie plastiche alternate a serie più o meno rigide, a comportamento quindi assai diverso di fronte ai movimenti tettonici;

c) che i movimenti tettonici sono avvenuti in varie fasi, ora più ora meno intensi, che la regione è stata *in toto* o a settori, ripetutamente sollevata fino all'emersione e di nuovo sommersa, soggetta quindi a trasgressioni e regressioni e sottoposta ora a distensioni ora a compressioni, che hanno determinato faglie di vario tipo ed estensione, slittamenti di masse, sovrascorrimenti di entità varia (senza però raggiungere la scala grandiosa, ad esempio, di quelli classici delle Alpi).

Tutto ciò parmi più che sufficiente a dar ragione delle frequentissime anomalie di contatto, dei frammischiamenti, in certe zone assai notevoli, di complessi argillosi di varia età, dell'inclusione in essi di blocchi e di lembi stratificati pure di età differente, della esistenza – che segnalavo fin dal 1927 [24] – di fenomeni diapirici od estrusivi, ecc., senza che si debba ricorrere all'ipotetico intervento di una colata delle così dette Argille scagliose, le quali, se sono alloctone in alcune regioni, non è detto che lo siano ovunque, essendo provato che in qualche area, ad esempio dell'Italia Centromeridionale, non lo sono [25], com'è da escludere che abbiano in « tutte le parti del mondo » le stesse caratteristiche e lo stesso comportamento.

(24) R. Fabiani, *Risultati delle escursioni geol. da me fatte in Sicilia durante il 1925 e il 1926*. « Boll. Ass. Min. Sic. », n. 2, 1927.

(25) A. Bally, *Osserv. geologiche sulla regione compresa tra la pianura di Sulmona e il fiume Sangro*. « Contrib. di Sc. Geologiche », II, pp. 106-128. Supplemento a « La Ricerca Scientifica » del C. N. R., anno 22°, 1952.

Ma – per non dilungarmi oltre – su questo punto, come su altri delle vedute integralmente adottate dai professori Medi e Morelli, tratterò in altra assai prossima occasione, nella quale esaminerò, fra l'altro, anche quanto vien detto dell'altipiano calcareo del Ragusano, che le Argille scagliose si sarebbero limitate ad aggirare come un bastione... Non si è considerato che i suoi sedimenti erano ancora sommersi nel mare quando la colata argillosa doveva essere giunta almeno al parallelo del suo margine nord. Esaminerò pure in seguito varie altre questioni che si collegano col problema degli idrocarburi in Sicilia. (V. «La Ricerca Scientifica» del C. N. R. – numero di maggio p. v.).

Geologia. — *Qualche considerazione sulla tettonica del Peloponneso (Grecia)*. Nota (*) del Corrisp. ARDITO DESIO.

In occasione di alcune ricerche d'indole geologico-pratica effettuate nel Peloponneso ho avuto necessità di eseguire uno studio geologico di dettaglio nel territorio di Tropea e più particolarmente nella media valle del fiume Ladhon affluente di destra dell'Alpheos, fra i ponti di Syriamon e di Spathari, e di attraversare ripetutamente in automobile il Peloponneso in tutta la sua larghezza, fra Pyrgos e Argos. Devo dire subito che gl'incarichi d'indole tecnica mi hanno impedito di effettuare ricerche geologiche sistematiche, ma non pertanto ho avuto occasione di osservare una particolare struttura tettonica locale che mi è sembrato non si conciliasse molto bene con le interpretazioni tettoniche generali del Peloponneso.

Per motivi che risulteranno da quanto sto per dire, il territorio in questione non si presta bene ad una ricostruzione stratigrafica. In ogni modo si possono distinguere tre orizzonti principali che corrispondono a tre livelli stratigrafici noti da tempo nei territori contermini [1–10] per i quali impiego i nomi in uso senza garantire però una esatta corrispondenza nei limiti.

Essi sono dall'alto al basso:

a) *Flysch*: complesso di scisti argillosi grigi e nerastri passanti a marne grigio-verdastre, arenarie verdi e calcari marnosi grigi. Nella serie del Flysch sono contenuti calcari compatti di tinta chiara, in strati sottili con intercalazioni marnose ed anche qualche strato di radiolarite.

b) *Calcari di Olonos*: complesso di calcari compatti grigi, bruni, quasi sempre reticolati, spesso con noduli e liste di selce che in certi livelli assumono una grande diffusione. La stratificazione è generalmente sottile (10 cm.), ma non mancano livelli a strati spessi sino a 60–70 cm. Nella parte più elevata si passa a calcari giallicci, rossicci e verdastri con interstrati marnosi.

(*) Presentata nella seduta del 14 marzo 1953.

c) *Radiolariti*: serie di tinta prevalentemente rosso–carnea, composta da radiolariti, marne più o meno argillose (prevalenti), calcari grigi, giallicci e rossi con intercalazioni marnose in strati sottili.

La potenza totale della serie stratigrafica della media valle del Ladhon può essere valutata a poco più di 1300 m. di cui 450 m. ciascuno sono da attribuire ai Calcari di Olonos ed al Flysch, il resto alle Radiolariti. Non posso dire con certezza se nel territorio considerato compaia un altro livello stratigrafico ben conosciuto nel Peloponneso e noto col nome di *Calcari di Tripolitza*. Sono calcari e dolomie grigi e neri in strati generalmente assai potenti che molto spesso dànno luogo a spiccate manifestazioni carsiche.

Secondo le indagini stratigrafiche dei miei predecessori (specialmente Philippson, Renz, Blumenthal), nel Peloponneso esisterebbero due serie eteropiche, una rappresentata dalla serie calcarea di Tripolitza + Flysch, l'altra dalla serie di Olonos + Flysch. I membri della serie da me ricordati sopra apparterrebbero tutti alla serie di Olonos e di essi le Radiolariti sarebbero da riferire al Carnico, avendo fornito al Renz *Daonella styriaca* Mojs. ed altre; la serie di Olonos ai piani soprastanti sino al Maestrichtiano (calcari ad Orbitoidi con *Globotruncana stuarti* Lapp., *G. leupoldi* Bolli ecc.) ed il Flysch proseguirebbe almeno sino al Priaboniano, essendo state in esso raccolte varie forme di Nummuliti, Alveoline ecc. (vedi bibl.).

La serie di Tripolitza è caratterizzata da una successione continua di calcari e dolomie che alla base hanno fornito fossili del Trias superiore (Giroporelle e Megalodonti), più sopra fossili giurassici (*Cladocoropsis mirabilis* Felix) e cretacei (Orbitoline e poi Ippuriti, Radioliti ecc.) e finalmente nei livelli più alti nummuliti gigantesche del Luteziano (*N. complanatus* Lam.).

Secondo le vedute degli autori sopra ricordati e particolarmente di Blumenthal, che ha pubblicato una serie di profili tettonici interpretativi attraverso il Peloponneso Centrale [1], lo stile tettonico di quel territorio sarebbe caratterizzato dalla presenza di una (due secondo Renz [2]) grande falda di ricoprimento formata dalla serie di Olonos, la quale avrebbe le radici nell'Argolide e si sarebbe distesa da est verso ovest, per una lunghezza di quasi un centinaio di chilometri, attraverso tutto il Peloponneso, sopra la serie di Tripolitza. Secondo Philippson [8] le radici si troverebbero invece nella porzione occidentale del Peloponneso, in corrispondenza dei rilievi Voidias-Olonos-Monti della Messenia e da questa zona le falde si sarebbero propagate sia verso est, sia verso ovest. Il substrato della falda sarebbe in ogni modo rappresentato dal Flysch della serie di Tripolitza. Se anche quest'ultima serie sia da considerarsi in falda non è ben chiaro: sembra che almeno Renz sia di tale parere [12]. Attraverso alcune profonde erosioni si vedono comunque comparire sotto ad essa terreni privi di fossili, attribuiti per lo più al Paleozoico. Presso Karatula vi sono calcari neri in strati molto sottili con veli marnosi (Scisti di Karatula), mentre nel corso superiore del Pheneos si tratta di quarziti, filladi, grauwacke anche con gesso, calcari neri, tufi e rocce endogene forse in parte mesozoici.

Per quanto manchino profili tettonici interpretativi proprio attraverso il territorio da me esaminato, esso rimane, almeno sino ad un certo punto, inquadrato fra alcuni profili tracciati più a nord (prof. 5) e più a sud (prof. 3) da Blumenthal [1] ed inoltre figura in una delle sue cartine tettoniche, oltre che nella carta del Philippson [7]. Nella prima delle due, il medio Ladhon risulta interamente compreso nella serie di Olonos con una piccola finestra di Flysch della serie di Tripolitza più a monte della nostra zona e cioè presso la confluenza del F. Paos, ed un'altra maggiore più a sud, nell'alto corso del F. Zenias, affluente di sinistra del Ladhon. La carta di Philippson, presenta maggiori dettagli, ma essendo apparsa prima che l'autore adottasse le vedute tettoniche sopra menzionate, non presenta naturalmente distinzioni nei terreni in relazione con le zone tettoniche.

Se ci si riferisce ai profili di Blumenthal la zona del medio Ladhon verrebbe a capitare in prossimità della fronte della falda di Olonos, adagiata sopra un letto di Flysch di Tripolitza, scoperto qua e là in finestra e celato, ad ovest della fronte della falda, dalla copertura neogenica.

Secondo l'interpretazione tettonica più recente del Philippson [8], di cui non conosco tuttavia rappresentazioni grafiche, il territorio del medio Ladhon si verrebbe a trovare in corrispondenza o in grande prossimità della zona delle radici [1].

Durante le prime escursioni da me effettuate nel Peloponneso Centrale mi è sembrata verosimile l'ipotesi di Blumenthal e Renz, mentre non mi ci sono ritrovato con l'ipotesi di Philippson, poichè nel territorio esaminato non ero riusciso a trovare strutture che in qualche modo potessero ricordare una zona di radici, almeno del tipo di quelle delle falde alpine.

Prima però di esporre le obbiezioni che si presentano alle interpretazioni tettoniche finora proposte è opportuno che accenni qui ad alcune caratteristiche di giacitura dei terreni nella zona del medio Ladhon.

Nella regione da me visitata ho potuto notare che i passaggi da un terreno all'altro in senso verticale non consistono di norma in successioni stratigrafiche regolari. Se anche non si riconoscono sempre vere e proprie discordanze angolari fra livello e livello stratigrafico – del resto non infrequenti – le zone di contatto sono comunemente caratterizzate da intensi fenomeni di laminazione e di cataclasi nelle rocce rigide e di scistosità, con superfici speculari, in quelle plastiche. Le superfici di contatto sono spesso irregolari, ossia non piane, con penetrazione di lingue di rocce plastiche entro le fratture dei calcari. Le serie di strati considerate in direzione, sono comunemente discontinue, ossia s'interrompono talora bruscamente, contro superfici di taglio, talora a cuneo, prolungandosi poi con serie di frammenti sparsi entro i terreni che li sostituiscono lateralmente. Ad un esame minuto

(1) Vi sono notevoli differenze nel rilievo nostro rispetto a quelle del Philippson. Ciò dipende in parte dalle basi topografiche molto diverse sulle quali i due rilievi sono stati eseguiti.

la roccia non risulta quasi mai sana. Soltanto dove s'incontrano serie di calcari abbastanza potenti si possono trovare strati rocciosi relativamente integri. Più spesso la compagine rocciosa è tutta sconquassata, gli strati sono intensamente e minutamente fratturati e frammentari e quando calcari compatti alternano con letti marnoso–argillosi la roccia è talmente triturata e sminuzzata che in presenza d'acqua talora cola come fosse una sabbia argillosa. Fenomeni di questo genere si sono riscontrati in una galleria, durante i lavori per la costruzione di un impianto idroelettrico.

Nei livelli marnoso–argillosi, poi, si riconosce spesso un completo rimescolamento di materiali diversi in un disordine veramente straordinario.

Una separazione locale fra la serie del Flysch e la serie delle Radiolariti è spesso impossibile, talmente sono frammentarie e confuse fra loro.

A queste discontinuità dei banchi rocciosi si sovrappone talora una rete di faglie che interseçano gli strati per spessori più o meno rilevati.

In sostanza, chi esamina quel territorio ha l'impressione di trovarsi di fronte ad una specie di « agglomerato tettonico » causato da un completo rimaneggiamento e rimescolamento di vari membri di una o più serie stratigrafiche diverse. Questa particolare struttura tettonica è abbastanza ben visibile sulle pareti più ripide dei solchi vallivi, ma è soprattutto in galleria e sui tagli artificiali freschi che la si può meglio vedere, mentre sulle superfici topografiche poco inclinate non è più riconoscibile. Oltre che nel medio Ladhon, fra i ponti di Syriamon e di Spathari, ho notato strutture analoghe fra Tropea e Tubitzi, come pure in varie incisioni vallive lungo la rotabile che da Tropea per Langadhia porta a Vitina. Fra Vitina e Tripolis invece, si attraversa una dorsale calcarea (calcari di Tripolitza) che sembra presentare uno stile tettonico diverso, con pieghe del tutto normali.

Strutture caotiche come quelle sopra ricordate devono essere però abbastanza diffuse anche in altre parti del Peloponneso, poichè della loro esistenza si trovano cenni qua e là, per esempio nell'opera di Blumenthal [1] specialmente nella serie del Flysch, come nella zona dell'Helisson [2], nella zona del Chelmos [3] ecc. Secondo l'interpretazione di tale autore, questi brandelli di roccia starebbero in relazione con fenomeni di frizione e di laminazione provocati dallo scorrimento della falda di Olonos.

Se esaminiamo attentamente i profili tettonici di Blumenthal, non riusciamo, tuttavia, a renderci conto di come una serie di strati prevalentemente calcareo-argillosa – qual'è quella di Olonos – possa essersi plasmata in pieghe-falde allungate sino ad un centinaio di chilometri per effetto di spinte tangenziali e unidirezionali. Tanto più che non esistendo tracce

(2) Ove si parla di *schwimmenden Kalkeinlagen*.
(3) Anche qui si parla di *schwimmenden Kalke*.

di metamorfismo nelle rocce, si deve ritenere che i movimenti di traslazione delle masse rocciose si siano verificati pressochè in superficie. La stessa presunta zona delle radici dell'Argolide ne possiede ben poco le caratteristiche.

Ma poi nella porzione orientale dei profili tettonici suddetti si nota la presenza di una serie di pieghe con vergenza opposta a quelle della porzione centrale e occidentale, ossia inclinate e coricate verso est, che male si adatta alla concezione di una traslazione di pieghe da est verso ovest, pur con le spiegazioni accessorie di Blumenthal riferite alle irregolarità del substrato della falda.

Se tutti questi fatti, insieme con altri di minore importanza, non si confanno ad una interpretazione della struttura del Peloponneso Centrale con l'ipotesi delle falde di ricoprimento (anche supponendo che si tratti di falde di 2° genere, buona parte delle difficoltà interpretative permane) maggiori dubbi ci lasciano le interpretazioni tettoniche del Philippson che pone la zona delle radici nella parte occidentale del Peloponneso, e di Ktenas [2] che, per la Messenia, suppone una traslazione di falde da ovest verso est.

La disparità stessa delle interpretazioni tettoniche ci lascia perplessi e ci fa intravvedere come i dati a disposizione, ancora scarsi e localizzati, si prestino a spiegazioni abbastanza diverse, di cui però nessuna di quelle finora suggerite riesca persuasiva.

In complesso si presentano qui difficoltà interpretative analoghe a quelle dell'Appennino. Strutture del tipo degli agglomerati tettonici fanno pensare piuttosto ad una tettonica di gravità. Un profondo rimaneggiamento ed un rimescolamento caotico delle formazioni per spessori rilevanti non si spiegano agevolmente con la tettonica a falde di ricoprimento. Nel Peloponneso si dovrebbe attribuire tale struttura ad intere falde. L'interpretazione tettonica a falde di ricoprimento sembra suggerita a Blumenthal e Renz anche, e forse soprattutto, dai rapporti di giacitura fra le serie coeve di Olonos e di Tripolitza che si vedono qua e là sovrapposte una sull'altra. La prima per Blumenthal rappresenterebbe l'alloctono, la seconda l'autoctono.

A questo punto c'è da chiedersi se la sovrapposizione della serie di Olonos sulla serie di Tripolitza sia veramente un fatto costante e diffuso in tutto il Peloponneso.

La distinzione fra i calcari massicci attribuiti alla serie di Olonos e quelli della serie di Tripolitza è tutt'altro che chiara, soprattutto quando si tratta di affioramenti isolati. Anche Blumenthal in varie occasioni ne parla ed io non sono riuscito a rendermi conto se certi lembi di calcari massicci che ho visto nel Medio Ladhon, talora fortemente carsicizzati, talora associati a calcari di Olonos, talora in affioramenti isolati alla base della serie stratigrafica locale, siano da riferire ad una delle due serie di Olonos o di Tripolitza e siano in posto o rappresentino pacchi di strati di origine esotica.

D'altra parte le Radiolariti del Trias contengono localmente strati di marne e di arenarie che talora malamente si riescono a distinguere – quando sono senza fossili – dagli analoghi terreni del Flysch di età assai più recente. Ed anche quest'ultimi non sono del resto del tutto privi di straterelli radiolaritici. C'è da chiedersi se non sia il caso di riesaminare gli affioramenti di « Flysch » affioranti sotto la serie di Olonos prima di considerarli tutti eocenici.

La diretta sovrapposizione di terreni della serie di Olonos – senza cioè l'interposizione di terreni della serie di Tripolitza – sul basamento metamorfico non sembra un fatto eccezionale. Nella zona del Pheneos, per esempio, vediamo anche nei profili di Blumenthal contatti diretti di ambedue le serie col basamento e l'interposizione di quelle lame di calcari di Tripolitza e di terreni del Flysch che figurano sotto alla serie di Olonos nella zona di Pyrgiosa pare abbia un carattere interpretativo. Dalla carta geologica di Philippson [7] tali contatti diretti risultano in numerose località. Ciò significa che sul basamento metamorfico poggiano non solo terreni della serie di Tripolitza, ma anche terreni della serie di Olonos e dove in superficie compaiono solo terreni di quest'ultimo tipo, non è detto che sotto ad essa debba trovarsi la serie di Tripolitza, come farebbe supporre l'interpretazione di Blumenthal.

A questo punto il lettore forse si attende una interpretazione tettonica nuova che concilii tutti i vari fatti sopra esposti. Devo tuttavia ripetere che non conosco a sufficienza il Peloponneso Centrale e le regioni contermini per sentirmi in grado di fare una sintesi geologica di quel territorio. Posso soltanto rispondere indirettamente cercando altrove, in regioni geologicamente più conosciute, tipi di strutture tettoniche affini. In tal caso non esiterei a dichiarare che fra i territori che io conosco direttamente e indirettamente l'Appennino Settentrionale è quello che presenta le maggiori analogie tettoniche con il Peloponneso. La zona delle « Argille scagliose » presenta infatti strutture analoghe a quelle degli agglomerati tettonici del Peloponneso, come il lettore si potrà facilmente rendere conto ponendo a confronto quanto ho detto precedentemente con quanto scrivono specialmente Merla [5] e Migliorini [6] sulle « Argille scagliose » appenniniche. In ambedue i territori esistono infatti strutture caotiche paragonabili fra loro anche per estensione e potenza. Differenze esistono soprattutto nella composizione litologica degli esotici [4], ma ciò non può rappresentare un elemento sostanziale nell'interpretazione tettonica.

Se vogliamo spingere più oltre il paragone fra i due territori, troviamo che anche nel Peloponneso esiste una serie di sopraelevazioni d'ordine tettonico paragonabili in qualche modo alle « rughe » di Merla [5], allungate

(4) Nel Peloponneso prevalgono i calcari di Olonos, ai quali si associano diversi altri tipi di calcari ed anche di marne, di arenarie ed anche serpentine, mentre nell'Appennino prevalgono, come è noto, le arenarie. Ma la composizione degli esotici varia sensibilmente da una regione all'altra e così pare sia anche per il Peloponneso.

secondo i meridiani e separate da depressioni, pure tettoniche, nelle quali – secondo Blumenthal – si trovano prevalentemente accumulati materiali del Flysch e della serie di Olonos.

Anche Blumenthal [1] del resto parla di *ondazioni* del substrato della presunta falda di Olonos formata, secondo lui, dalla serie di Tripolitza: le ondazioni esistono non solo in tale presunto substrato, ma anche nell'imbasamento metamorfico che sta alla base delle due serie sedimentarie di Olonos e di Tripolitza, come si può desumere dai vari lavori di Philippson, di Renz e di Blumenthal. Non si conosce ancora a sufficienza la tettonica del Metamorfico per poter comprendere quale origine possano avere le ondazioni [5]. Vien fatto di pensare che le formazioni caotiche del Peloponneso Centrale che, come s'è visto, sarebbero per lo più situate nelle sinclinali, possano rappresentare lo scarico per scivolamento di pacchi di strati dai fianchi di rughe tettoniche di tipo anticlinale in fase di sollevamento. Che la serie di Tripolitza appaia più integra di quella di Olonos è giustificato dal fatto che la prima è quasi totalmente calcarea, mentre la seconda è composta da alternanze di livelli calcarei e di livelli argillosi. La serie di Olonos sarebbe stata soggetta perciò a sfaldamenti di lame e pacchi di strati calcarei che sarebbero scivolati su letti argillosi accumulandosi gli uni sugli altri in disordine sul fondo delle depressioni tettoniche. Questo fatto presuppone l'esistenza di bacini di sedimentazione subparalleli, allungati secondo i meridiani con *facies* alternate di Olonos e di Tripolitza. Con tale interpretazione potrebbe conciliarsi anche la presenza costante nella serie di Olonos di livelli calcarei ricchi di frammenti di Rudiste – fossili questi assai diffusi nella serie di Tripolitza – che potrebbero essere derivati dalla demolizione di formazioni a Rudiste della serie di Tripolitza, forse a tipo di scogliera. Nel corrugamento qualche ruga di Olonos avrebbe dovuto raggiungere quote più elevate di quelle di Tripolitza, almeno nelle zone in cui terreni di questo secondo tipo sono coperti da terreni del primo. Ma potremmo anche pensare che le due serie si siano scollate alla loro base dal substrato metamorfico in via di corrugamento. Dobbiamo ricordare che alla base di ambedue le serie esistono terreni plastici [6] che avrebbero potuto esercitare la funzione di lubrificante tettonico. In tale caso si sarebbe prodotto un più profondo rimaneggiamento delle due serie, pur sempre con un maggiore sfaldamento della serie di Olonos per i motivi anzidetti. Non è il caso di entrare per ora in maggiori dettagli. Piuttosto ci sarebbe da porre un altro quesito: quello del meccanismo del corrugamento. L'argomento è di grande interesse e dovrebbe essere affrontato qui più in via

(5) A rigore di termini potrebbe anche trattarsi di ineguaglianze di una superficie d'erosione.

(6) Secondo Blumenthal la serie di Tripolitza avrebbe alla base rocce di tipo prevalentemente dolomitico, ma in realtà fra il substrato metamorfico ed i terreni sedimentari delle serie di Olonos e di Tripolitza sono stati indicati anche terreni plastici come sono quelli riferiti al Trias inferiore rappresentato da gessi, carniole e scisti neri.

teorica che applicativa in quanto – come ho detto ripetutamente – non conosco a sufficienza la struttura del Peloponneso e soprattutto del substrato metamorfico. Giudicando in realtà più che altro ad impressione, non vedo bene, tuttavia, un'applicazione al Peloponneso del meccanismo della nascita e della propagazione delle rughe tettoniche ideato per l'Appennino [5 6]. Mi persuade di più un corrugamento del substrato metamorfico legato a fenomeni di contrazione – intesa qui unicamente come una riduzione dell'estensione originaria – al quale si sarebbero adattati i terreni di copertura con le conseguenze descritte sopra. Ma studi più ampi e completi dovrebbero essere condotti sulla regione, prima di poter ottenere una ricostruzione tettonica di quel territorio. Per il momento mi devo accontentare di risollevare il problema, mostrando come le spiegazioni anteriori non possano considerarsi accettabili e come occorra forse partire con concetti nuovi nelle ricerche locali per arrivare ad una conclusione generale.

Elenco bibliografico.

[1] Blumenthal M. M., *Zur Kenntnis des Querprofils des zentralen und nördlichen Peloponnes*. « N. Jahrbuch für Miner. Geol. u. Pal. », Beil.-Bd. 70, Abt. B, pp. 449–514, (1933).

[2] Ktenas K. A., *Die Ueberschiebungen in der Peloponnesos*. « Sitz. Ber. d. Akad. d. Wiss. », Bd. 33, p. 1076, Berlin 1908.

[3] Ktenas K. A., *Formations primaires semimétamorphiques au Peloponèse central*. « C. R. Soc. Géol. France », Paris, 7 avril 1924.

[4] Ktenas K. A., *Sur le développment du Primaire au Peloponèse central*. « C. R. Acad. Athenes », vol. I, p. 53, Athenes 1926.

[5] Merla G., *Geologia dell'Appennino Settentrionale*. « Boll. Soc. Geol. Ital. », vol. LXX, fasc. 1, pp. 95–382, Roma 1951.

[6] Migliorini C., *I cunei composti nell'orogenesi*. « Boll. Soc. Geol. Ital. », vol. LXVII, Roma 1948.

[7] Philippson A., *Der Peloponnes*. Berlin 1892.

[8] Philippson A., *Beiträge zur Morphologie Griechenlands*. « Geographisches Abhandl. », 3 R., H. 3, Stuttgart 1930.

[9] Renz C., *Ueber neue Vorkommen von Trias in Griechenland und von Lias in Albanien*. « Centralbl. f. Min. Geol. u. Pal. », Bd. 1904, pp. 257–260, Stuttgart 1904.

[10] Renz C., *Stratigraphische Untersuchungen im Griechischen Mesozoikum und Paläozoikum*. « Jahrb. geol. Reichanst. », Bd. 60, 3 H., Wien 1910.

[11] Renz C., *Geologische Studien im Artemisiongebirge (Grenze von Arkadien und Argolis)*. « Centralbl. f. Min. Geol. u. Pal. », n. 11, pp. 338–346, Stuttgart 1913.

[12] Renz C., *Die Tektonik der Griechischen Gebirge*. « Πραγματείαι τῆς Ἀκαδημίας Ἀθηνῶν », T.H.A. 1, Atene 1940.

[13] Mitzopoulos M., *Fossilführende Trias im griechischen Othrysgebierge*. « Ecl. Geol. Helv. », Bd. 31, n. 1, pp. 71–73, Basel 1938.

NOTE PRESENTATE DA SOCI

Analisi matematica. — *Forme differenziali esterne di classe* 0 *e funzioni di più variabili complesse.* Nota di GIULIO ARUFFO, presentata (*) dal Corrisp. B. SEGRE.

1. Il teorema di Cauchy–Poincaré ed il suo inverso di Morera–Severi (1) per le funzioni analitiche di più variabili complesse sono stati estesi da E. Martinelli (2) nella forma seguente:

Sia $f(z^1, \cdots, z^n)$ una funzione delle variabili complesse $z^1, \cdots, z^n$ di classe 0 in una cella C_{2n} dello S_{2n} reale rappresentativo delle variabili complesse, e B_{n+q} denoti un ciclo in C_{2n} di dimensione $n+q$, con q comunque fissato tra 0 ed $n-1$ (estremi inclusi). Allora: condizione necessaria e sufficiente affinché f sia analitica nelle $z^1, \cdots, z^n$, è che per ogni combinazione $\beta_1, \cdots, \beta_q$ di classe q degli interi $1, \cdots, n$, e per ogni scelta di B_{n+q}, risulti:

$$(1) \qquad \int_{B_{n+q}} f dz^1 \cdots dz^n d\bar{z}^{\beta_1} \cdots d\bar{z}^{\beta_q} = 0,$$

ove $\bar{z}^\beta$ denota il complesso coniugato di z^β.

In un recente lavoro (3), S. Bochner ha poi dato un'estensione del teorema di Morera–Severi di tipo più generale di quella di Martinelli, mostrando che:

Condizione necessaria affinché, per ogni ciclo B_{p+q} a $p+q$ dimensioni $(1 \leq p+q \leq 2n-1)$ di C_{2n}, valga l'eguaglianza:

$$\int_{B_{p+q}} f dz^{\alpha_1} \cdots dz^{\alpha_p} d\bar{z}^{\beta_1} \cdots d\bar{z}^{\beta_q} = 0,$$

(*) Nella seduta del 14 febbraio 1953.

(1) Mi è stato verbalmente osservato dal prof. MARTINELLI che le inversioni del teorema di Cauchy Poincaré quali erano state ottenute da V. VOLTERRA (« Rend. Lincei », 1888) e da E. PASCAL (« Rend. Acc. Sc. Napoli », 1917) non coglievano l'essenza della questione, in quanto nelle deduzioni di tali Autori la funzione integranda veniva supposta di classe 1 (e non soltanto di classe 0 come nel caso del classico risultato di Morera per le funzioni di una variabile). Perciò la prima vera estensione alle funzioni di più variabili del teorema di Morera è da considerarsi quella data da F. SEVERI (*Sur une proprieté fondamentale des fonctions de plusieurs variables*. « Comptes rendus de l'Ac. des Sciences de Paris », marzo 1931).

(2) E. MARTINELLI, *Alcuni teoremi integrali per le funzioni analitiche di più variabili complesse*. « Mem. Acc. d'Italia », 9, pp. 269–283 (1938).

(3) S. BOCHNER. *The theorem of Morera in several variables*. Questo lavoro uscirà nel vol. 34 (serie 4ª) degli « Annali di Matematica ».

ove $(\alpha_1, \cdots, \alpha_p)$, $(\beta_1, \cdots, \beta_q)$ sono due fissate combinazioni di classi p, q degli interi $1, \cdots, n$, è che f risulti analitica nella variabile z^β per $\beta \neq \beta_1, \cdots, \beta_q$ ed anti-analitica [4] nella variabile z^α per $\alpha \neq \alpha_1, \cdots, \alpha_p$.

Scopo della presente Nota è di completare tale risultato provando la s u f f i c i e n z a della precedente condizione, e di mostrare inoltre come entrambe le affermazioni del teorema che così si ottiene possano agevolmente dedursi da certe proprietà delle forme differenziali esterne di classe 0, da me indicate in questi stessi « Rendiconti » [5].

2. Sia $f = u + iv$ una funzione complessa delle $2n$ variabili reali $x^1, y^1, \cdots, x^n, y^n$, c o n t i n u a nella $2n$-cella C_{2n} prodotto topologico delle n-bicelle $C_2^1, \cdots, C_2^n$ situate rispettivamente nei piani $(x^1, y^1), \cdots, (x^n, y^n)$.

Introduciamo formalmente le $2n$ variabili complesse:

$$z^k = x^k + iy^k \quad ; \quad \bar{z}^k = x^k - iy^k \qquad (k = 1, \cdots, n). \tag{2}$$

Se f ammette derivate parziali rispetto ad x^k e y^k, poniamo inoltre per definizione:

$$\frac{\partial f}{\partial z^k} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x^k} - i\,\frac{\partial f}{\partial y^k}\right),$$

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}^k} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x^k} + i\,\frac{\partial f}{\partial y^k}\right);$$

di guisa che le condizioni di analiticità rispetto a z^h e di anti-analiticità rispetto a z^k vengono ad esprimersi rispettivamente mediante le:

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}^h} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial f}{\partial z^k} = 0 \text{ [6]}.$$

Supporremo che la funzione f risulti analitica nella variabile z^β per $\beta \neq \beta_1, \cdots, \beta_q$ ed anti-analitica nella variabile z^α per $\alpha \neq \alpha_1, \cdots, \alpha_p$, ove $(\alpha_1, \cdots, \alpha_p)$, $(\beta_1, \cdots, \beta_q)$ sono due gruppi fissati di interi compresi tra 1 ed n (estremi inclusi), soggetti alle sole condizioni che sia $\alpha_r \neq \alpha_s$; $\beta_r \neq \beta_s$ per $r \neq s$ e che risulti $1 \leq p + q \leq 2n - 1$.

Vogliamo provare che, *nelle ipotesi suddette, per ogni ciclo* $(p+q)$ *dimensionale contenuto in* C_{2n} *si ha*:

$$\int_{B_{p+q}} f dz^{\alpha_1} \cdots dz^{\alpha_p} d\bar{z}^{\beta_1} \cdots d\bar{z}^{\beta_q} = 0. \tag{3}$$

(4) Diremo che f è anti-analitica nella variabile z^α quando è analitica nella variabile complessa coniugata $\bar{z}^\alpha$.

(5) G. Aruffo, *Sul differenziale generalizzato delle forme differenziali esterne*. Rend. Acc. Lincei », Nota I in ser. VIII, vol. 13°, fasc. 6, pp. 367-372 (1952) e Nota II in ser. VII, vol. 14°, fasc. 1, pp. 13-18 (1953).

(6) L'introduzione delle variabili (2) è puramente formale, in quanto *a priori* non è noto se u, v, che son funzioni di $2n$ variabili reali, conservano senso quando si pensino come funzioni di altrettante variabili complesse indipendenti. Cfr. perciò S. Bochner e W. T. Martin, *Several complex variables*, Princeton 1948, pp. 36 e sgg.

DIMOSTRAZIONE. – Sia s ($\geqq 0$) il numero degli elementi comuni ai due gruppi di indici $(\alpha_1, \cdots, \alpha_p)$, $(\beta_1, \cdots, \beta_q)$, e precisamente si abbia:

$$\alpha_{h_1} = \beta_{k_1} = \gamma_1 \; ; \; \alpha_{h_2} = \beta_{k_2} = \gamma_2 \; ; \; \cdots \; ; \; \alpha_{h_s} = \beta_{k_s} = \gamma_s .$$

Indicheremo poi con $l_1, \cdots, l_{p-s}$ i rimanenti indici del primo gruppo, e con $m_1, \cdots, m_{q-s}$ i rimanenti del secondo gruppo.

Poiché $dz^k d\bar{z}^k = -2\, i dx^k dy^k$, basterà provare che è chiusa la forma:

$$(4) \quad \omega_{p+q} = (u + iv)\,[dx^{l_1} + i dy^{l_1}] \cdots [dx^{l_{p-s}} + i dy^{l_{p-s}}]\,[dx^{m_1} - i dy^{m_1}] \cdots$$
$$\cdots [dx^{m_{q-s}} - i dy^{m_{q-s}}]\, dx^{\gamma_1} dy^{\gamma_1} \cdots dx^{\gamma_s} dy^{\gamma_s} ,$$

la quale differisce da quella che compare sotto il segno d'integrale nel primo membro della (3) soltanto per un fattore costante inessenziale.

Separando il reale dall'immaginario, si ottenga:

$$(5) \quad \omega_{p+q} = \sigma_{p+q-s}\, dx^{\gamma_1} dy^{\gamma_1} \cdots dx^{\gamma_s} dy^{\gamma_s} + i\tau_{p+q-s}\, dx^{\gamma_1} dy^{\gamma_1} \cdots dx^{\gamma_s} dy^{\gamma_s} .$$

In virtù del teorema II del mio lavoro citato in [5], per dimostrare che è $d'\omega_{p+q} = 0$ basterà far vedere che sono forme chiuse le tracce di σ_{p+q-s} e di τ_{p+q-s} sull'$S_{2(n-s)}$ intersezione degli iperpiani:

$$(6) \qquad x^i = a^i \quad ; \quad y^i = b^i \qquad (i = \gamma_1, \cdots, \gamma_s),$$

ove $P^i(a^i, b^i)$ sia un punto arbitrariamente scelto entro la cella C_2^i. Ciò equivale a provare che è:

$$(7) \qquad d'\{[f]_{\substack{x^i = a^i \\ y^i = b^i}} dz^{l_1} \cdots dz^{l_{p-s}}\, d\bar{z}^{m_1} \cdots d\bar{z}^{m_{q-s}}\} = 0 .$$

La funzione $[f]_{\substack{x^i = a^i \\ y^i = b^i}}$ dipende da quelle sole variabili x^ϱ, y^ϱ il cui indice ϱ è distinto da $\gamma_1, \cdots, \gamma_s$; essa è continua nella cella a $2(n-s)$ dimensioni prodotto topologico delle $n-s$ bicelle C_2^i ($i = \gamma_1, \cdots, \gamma_s$) e nella variabile z^ϱ riesce analitica, o anti-analitica, o costante. Tale funzione è dunque di classe 1 nella cella sopra nominata, e quindi esiste il differenziale esterno ordinario della forma che compare entro graffe nella (7). Indicati con h e k due indici, ciascuno dei quali percorra tutti gli interi tra 1 ed n ad eccezione di $\gamma_1, \cdots, \gamma_s$, risulta:

$$d\{[f]_{\substack{x^i = a^i \\ y^i = b^i}} dz^{l_1} \cdots dz^{l_{p-s}}\, d\bar{z}^{m_1} \cdots d\bar{z}^{m_{q-s}}\} =$$

$$= \sum_h \frac{\partial [f]_{\substack{x^i = a^i \\ y^i = b^i}}}{\partial z^h} dz^h dz^{l_1} \cdots dz^{l_{p-s}}\, d\bar{z}^{m_1} \cdots d\bar{z}^{m_{q-s}} +$$

$$+ \sum_k \frac{\partial [f]_{\substack{x^i = a^i \\ y^i = b^i}}}{\partial \bar{z}^k} d\bar{z}^k dz^{l_1} \cdots dz^{l_{p-s}}\, d\bar{z}^{m_1} \cdots d\bar{z}^{m_{q-s}} .$$

Ma per ipotesi è $\partial f/\partial z^h = 0$ per $h = l_1, \cdots, l_{p-s}$ e $\partial f/\partial \bar{z}^k = 0$ per $k = m_1, \cdots, m_{q-s}$: il secondo membro della precedente eguaglianza è dunque nullo, e ciò prova la (7).

OSSERVAZIONE. – Rileviamo che le ipotesi ammesse nell'enunciato del precedente teorema implicano che, se k è un indice distinto tanto da $\alpha_1, \cdots, \alpha_p$ quanto da $\beta_1, \cdots, \beta_q$, risulta: $\partial f/\partial x^k = \partial f/\partial y^k = 0$, e cioè f è indipendente da x^k, y^k. Se invece h è elemento comune ai due gruppi $(\alpha_1, \cdots, \alpha_p)$, $(\beta_1, \cdots, \beta_q)$, non è prescritto ad f di soddisfare, nei riguardi della variabile z^h, ad alcuna condizione, all'infuori della continuità: pertanto la funzione f, da noi considerata, non è necessariamente di classe 1 in C_{2n}.

Se però si aggiunge l'ipotesi che f sia di classe 1, diventa del tutto immediato concludere con la (3), dopo aver riconosciuto che è $d\omega_{p-q} = 0$. Sotto queste condizioni più restrittive, e con riferimento ad integrali del tipo (1) il risultato fu già indicato da E. Martinelli [7].

3. Invertiremo ora il teorema del n. 2, dimostrando che:

Se $f = u + iv$ è continua in C_{2n}, ed ivi verifica la (3) *per ogni scelta di B_{p-q}, allora f è funzione analitica nella variabile z^β per $\beta = \beta_1, \cdots, \beta_q$ ed anti-analitica nella variabile z^α per $\alpha = \alpha_1, \cdots, \alpha_p$.*

DIMOSTRAZIONE. – Per ipotesi la forma (5) è ora chiusa, e quindi tali sono anche la sua parte reale ed il coefficiente dell'immaginario. In ciascuna di queste due forme non compare né dx^k né dy^k, se si assume $k = \alpha_1, \cdots, \alpha_p, \beta_1, \cdots, \beta_q$: per il teorema IV del mio lavoro citato in (5), la funzione f non dipende allora né da x^k né da y^k, ossia f è contemporaneamente analitica ed anti-analitica nella variabile z^k.

Sia ora α un qualunque indice $(= 1, 2, \cdots, n)$ distinto da $\alpha_1, \cdots, \alpha_p$: potremo supporre che esso coincida con uno degli indici $\beta_1, \cdots, \beta_q$, e quindi con uno degli indici $m_1, \cdots, m_{q-s}$: e sia $\alpha = m_t$, che in caso contrario la tesi seguirebbe già dal precedente capoverso.

Scegliamo $p + q - 2s - 1$ costanti b^i $(i = l_1, \cdots, l_{p-s}, m_1, \cdots, m_{t-1}, m_{t+1}, \cdots, m_{q-s})$, soggette alla sola condizione che ciascuna delle rette $y^i = b^i$ del piano x^i, y^i abbia punti interni a comune con la cella C'_2, e consideriamo la forma chiusa che è traccia di ω_{p-q} sull'$S_{2n-(p-q-2s-1)}$ intersezione degli iperpiani $y^i = b^i$, e cioè la forma:

$$[f]_{y^i = b^i} dx^{l_1} \cdots dx^{l_{p-s}} dx^{m_1} \cdots dx^{m_{t-1}} [dx^\alpha - i dy^\alpha] dx^{m_{t+1}} \cdots$$

$$\cdots dx^{m_{q-s}} dx^{\gamma_1} dy^{\gamma_1} \cdots dx^{\gamma_s} dy^{\gamma_s}.$$

Separando in questa il reale dall'immaginario, si ottengono (a prescindere dal segno) le due forme chiuse:

(7) E. MARTINELLI, loc. cit. in (2), osserv. 1ª a p. 274.

$$\{[u]_{\alpha_1\ldots\alpha_{p-1}} dx^{\alpha_1} - [v]_{\alpha_1\ldots\alpha_{p-1}} dy^{\alpha_1}\} dx^{\beta_1}\ldots dx^{\beta_{q-1}} dx^{\gamma_1}\ldots dx^{\gamma_{t-1}} dx^{\gamma_{t+1}}\ldots$$

$$\ldots dx^{\gamma_{q-1}} dx^{\gamma_1} dy^{\gamma_1}\ldots dx^{\gamma_t} dy^{\gamma_t},$$

$$\{[v]_{\alpha_1\ldots\alpha_{p-1}} dx^{\alpha_1} - [u]_{\alpha_1\ldots\alpha_{p-1}} dy^{\alpha_1}\} dx^{\beta_1}\ldots dx^{\beta_{q-1}} dx^{\gamma_1}\ldots dx^{\gamma_{t-1}} dx^{\gamma_{t+1}}\ldots$$

$$\ldots dx^{\gamma_{q-1}} dx^{\gamma_1} dy^{\gamma_1}\ldots dx^{\gamma_t} dy^{\gamma_t}.$$

Per il teorema II del mio lavoro citato in [1], saranno allora chiuse le tracce delle due forme – che qui compaiono entro graffe – sullo spazio intersezione dei $p+q-1$ iperpiani:

$$x^k = a^k \quad \text{per} \quad k = l_1, \ldots, l_{p-s}, m_1, \ldots, m_{t-1}, m_{t+1}, \ldots, m_{q-s}, \gamma_1, \ldots, \gamma_s$$

$$y^k = b^k \quad \text{per} \quad k = \gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_s,$$

ove le costanti a^k, b^k siano scelte in modo che il punto $P^r\ a^r, b^r$ risulti interno alla bi-cella $C^{2n}_{2r}\ r = l_1, \ldots, l_{p-s}, m_1, \ldots, m_{t-1}, m_{t+1}, \ldots, m_{q-s}, \gamma_1, \ldots, \gamma_s$.

Si trova così che, scelto comunque un punto $P^r\ a^r, b^r$ in C^{2n}_{2r}, e indicate con $U\ x^\alpha, y^\alpha$, $V\ x^\alpha, y^\alpha$ le funzioni delle sole variabili x^α, y^α cui si riducono rispettivamente u e v per $x^r = a^r, y^r = b^r$ ove l'indice r ha i valori sopra specificati), sono chiuse le due forme:

$$U dx^\alpha - V dy^\alpha \quad ; \quad V dx^\alpha - U dy^\alpha.$$

È ben noto che esistono allora due funzioni $\varphi\ x^\alpha, y^\alpha$, $\psi\ x^\alpha, y^\alpha$ di classe 1 in C^{2n}_{2r}, tali che ivi risulti:

$$U dx^\alpha + V dy^\alpha = d\varphi$$

$$V dx^\alpha - U dy^\alpha = d\psi.$$

La funzione $\Phi = \varphi - i\psi$ è di classe 1 in C^{2n}_{2r} e soddisfa alla:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z^\alpha} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x^\alpha} - i\frac{\partial \Phi}{\partial y^\alpha}\right) = \frac{1}{2}[U + iV - i(V - iU)] = 0.$$

Φ è dunque anti-analitica nella variabile z^α; ed essendo:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z^\alpha} = \frac{\partial \Phi}{\partial x^\alpha} = U + iV,$$

tale riesce anche $U + iV$, e quindi f.

In modo del tutto analogo, dall'ipotesi β_1, si trae che f è analitica rispetto a z^β, per ogni $\beta = \beta_1, \ldots, \beta_q$, e con ciò il teorema.

Analisi matematica. — *Integrazione dei sistemi lineari ai differenziali totali illimitatamente integrabili in due variabili indipendenti in un prescritto campo più volte connesso* (*). Nota di CARLO BIRINDELLI, presentata (**) dal Socio M. PICONE.

1. Indichi $t \equiv [t_1, t_2]$ il generico punto in un campo T del piano e in T siano assegnati i vettori, a p componenti, $g^{(1)}(t)$, $g^{(2)}(t)$, $\varphi^{(1,k)}(t)$, $\varphi^{(2,k)}(t)$, $k = 1, 2, \cdots, p$. Tali vettori siano continui in T assieme alle rispettive derivate

$$\frac{\partial g^{(1)}}{\partial t_2}, \quad \frac{\partial g^{(2)}}{\partial t_1}, \quad \frac{\partial \varphi^{(1,k)}}{\partial t_2}, \quad \frac{\partial \varphi^{(2,k)}}{\partial t_1}, \qquad k = 1, 2, \cdots, p,$$

supposte esistenti in T. Mediante le $1 + p$ rispettive matrici

$$G(t) \equiv \begin{pmatrix} g_1^{(1)}, & g_1^{(2)} \\ \vdots & \vdots \\ g_p^{(1)}, & g_p^{(2)} \end{pmatrix}, \qquad \Phi^{(k)}(t) \equiv \begin{pmatrix} \varphi_1^{(1,k)}, & \varphi_1^{(2,k)} \\ \vdots & \vdots \\ \varphi_p^{(1,k)}, & \varphi_p^{(2,k)} \end{pmatrix} \quad k = 1, 2, \cdots, p,$$

ed indicando con $x \equiv [x_1, x_2, \cdots, x_p]$ un vettore a p componenti, si ha il sistema vettoriale, ai differenziali totali, lineare

$$(1) \qquad dx = \left\{ G(t) + \sum_{k=1}^{p} x_k \cdot \Phi^{(k)}(t) \right\} dt$$

che, sempre vettorialmente, può anche scriversi

$$(2) \qquad dx = \left[g^{(1)}(t) + \sum_{k}^{p}{}_{1} x_k \cdot \varphi^{(1,k)}(t) \right] \cdot dt_1 + \left[g^{(2)}(t) + \sum_{k}^{p}{}_{1} x_k \cdot \varphi^{(2,k)}(t) \right] \cdot dt_2 .$$

In forma scalare si avrebbe invece

$$(2') \qquad dx_s = \left[g_s^{(1)}(t) + \sum_{k}^{p}{}_{1} x_k \cdot \varphi_s^{(1,k)}(t) \right] \cdot dt_1 + \left[g_s^{(2)}(t) + \sum_{k}^{p}{}_{1} x_k \cdot \varphi_s^{(2,k)}(t) \right] \cdot dt_2$$

$$\text{ove} \quad s = 1, 2, \cdots, p.$$

Per tale sistema sussiste il teorema d'unicità per l'eventuale soluzione relativa ad ogni condizione iniziale

$$x(t^{(0)}) = x^{(0)},$$

intendendo che il punto $t^{(0)}$ scelto appartenga a T.

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto Nazionale per le applicazioni del Calcolo. Ringrazio il Chiar.mo prof. M. Picone per avermi indicato la presente ricerca.

(**) Nella seduta del 14 marzo 1953.

Ciò posto, resta ancora da aggiungere che il sistema deve supporsi illimitatamente integrabile in T vale a dire che risulti essere identicamente in T

$$(3)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial g^{(1)}}{\partial t_2} - \dfrac{\partial g^{(2)}}{\partial t_1} + \sum_{k=1}^{p} \left(\varphi^{(1,k)} \cdot g_k^{(2)} - \varphi^{(2,k)} \cdot g_k^{(1)} \right) \equiv 0 , \\ \dfrac{\partial \varphi^{(1,l)}}{\partial t_2} - \dfrac{\partial \varphi^{(2,l)}}{\partial t_1} + \sum_{k=1}^{p} \left(\varphi^{(1,k)} \cdot \varphi_k^{(2,l)} - \varphi^{(2,k)} \cdot \varphi_k^{(1,l)} \right) \equiv 0 \\ l, k = 1, 2, \cdots, p . \end{cases}$$

Se il prescritto campo T *è semplicemente connesso allora esiste la soluzione del sistema* (1), *quale che sia la condizione iniziale* $x(t^{(0)}) = x^{(0)}$, e *il suo campo di esistenza è sempre tutto il campo* T [1].

Compito del presente lavoro è l'estensione di tale risultato al caso in cui T sia più volte connesso, ricercando le ulteriori condizioni necessarie e sufficienti che, assieme alle (3), assicurano l'esistenza in T della soluzione del sistema (1).

2. Sia T $(\nu + 1)$ volte connesso e siano $S_1, \cdots, S_\nu$ le lacune di T; in relazione ad ogni S_i $(i = 1, 2, \cdots, \nu)$ si indichi con C_i una corrispondente poligonale coordinata semplice e chiusa [2], contenuta in T, tale che il poligono Π_{C_i}, avente C_i per frontiera, abbia interna la lacuna S_i ed esterne invece le restanti $\nu - 1$ lacune.

In relazione ad ogni lacuna S_i si prenda in S_i [che se contiene più punti è un continuo] un punto $\bar{t}^{(i)}$ di minima ascissa e a partire da esso si mandi la semiretta r_i parallela all'asse t_1 i cui punti verifichino la relazione $t_1 \leq \bar{t}_1^{(i)}$. Si consideri poi il punto di $[\mathfrak{F}T - \mathfrak{F}S_i] \cdot r_i$ avente massima ascissa che chiameremo $\bar{\bar{t}}^{(i)}$ (il punto all'infinito su r_i se $[\mathfrak{F}T - \mathfrak{F}S_i] \cdot r_i$ è vuoto) e si denomini σ_i il segmento $\bar{t}_1^{(i)} < t_1 < \bar{\bar{t}}_1^{(i)}$, $t_2 = \bar{t}_2^{(i)} = \bar{\bar{t}}_2^{(i)}$, parte di r_i, che è contenuto ovviamente in T. Da quanto precede è chiaro che risulta semplicemente connesso il campo $T_* = T - \sum_{i=1}^{\nu} \sigma_i$, sicché esiste, per il loc. cit. [1], in tutto T_*, la soluzione $x_*(t)$ di (1) per cui sia $x^*(t^{(0)}) = x^{(0)}$.

Fissato ad arbitrio un punto $t^{(i)}$ lungo σ_i *mostriamo che esiste, determinato e finito, il*:

$$\lim_{t \to t^{(i)-}} x^*(t) = x^*(t^{(i)+}) \qquad \text{su } T_*, \text{ per } t_2 > t_2^{(i)} (= \bar{t}_2^{(i)} = \bar{\bar{t}}_2^{(i)});$$

$$\lim_{t \to t^{(i)-}} x^*(t) = x^*(t^{(i)-}) \qquad \text{su } T_*, \text{ per } t_2 < t_2^{(i)};$$

(1) C. BIRINDELLI, *Integrazione dei sistemi lineari ai differenziali totali illimitatamente integrabili in due variabili in un prescritto campo semplicemente connesso del piano*, « Rend. Acc. Naz. dei Lincei », Classe di Scienze fis., mat. e nat., ser. VIII, vol. XII, 1° sem., fasc. 5, maggio 1952.

(2) Denomineremo *non ordinaria* ogni siffatta poligonale coordinata semplice chiusa C_i.

e che affinché la $x^*(t)$ *possa prolungarsi in tutto* T *con continuità occorre e basta che* $x^*(t^{(i)+}) = x^*(t^{(i)-})$.

Presi lungo σ_i due punti t' e t'', per cui $t'_1 < t''_1$, ed un numero ε positivo, si prenda in considerazione il campo rettangolare R per cui $t'_1 < t_1 < t''_1$, $|t_2 - t_2^{(i)}| < \varepsilon$ con ε tale che $R < T$.

Scegliendo in R due arbitrari punti $t^{(1)}$, $t^{(2)}$ posti, rispettivamente, sotto e sopra σ_i, siccome R è semplicemente connesso esiste, per il loc. cit. (1), la soluzione $x^{(1)}(t)$ di (1) in R per cui $x^{(1)}(t^{(1)}) = x^*(t^{(1)})$, come pure la soluzione $x^{(2)}(t)$ di tale (1) in R per cui $x^{(2)}(t^{(2)}) = x^*(t^{(2)})$.

Ne consegue che, per il teorema di unicità, in $R \cdot T_*$ e al disopra di σ_i è $x^{(2)}(t) \equiv x^*(t)$ e al disotto di σ_i $x^{(1)}(t) \equiv x^*(t)$.

Siccome le $x^{(1)}(t)$, $x^{(2)}(t)$ esistono nella parte di σ_i appartenente ad R [e sono funzioni, vettoriali, continue in R assieme alle relative derivate parziali] *se ne conclude che in tutti i punti di* σ_i *esistono determinati e finiti i due limiti* $x^*(t^+)$, $x^*(t^-)$ *e ciò in particolare nel punto* $t^{(i)}$ *inizialmente scelto ad arbitrio lungo la* σ_i.

Mantenendo t lungo σ_i, le $x^*(t^+)$, $x^*(t^-)$ vengono a costituire due funzioni continue della variabile t_1 e rappresentandole coi simboli $\chi^{(i)}(t_1)$, $X^{(i)}(t_1)$ si ha da (1) che queste due funzioni soddisfano il sistema lineare, vettoriale, ordinario

$$dx = \left\{ g^{(1)}(t_1, t_2^{(i)}) + \sum_{k=1}^{p} x_k \cdot \varphi^{(1,k)}(t_1, t_2^{(i)}) \right\} \cdot dt_1 ,$$

mentreché la funzione differenza $\chi^{(i)}(t_1) - X^{(i)}(t_1)$ soddisfa il sistema lineare, vettoriale, omogeneo (ordinario)

$$dx = \left\{ \sum_{k=1}^{p} x_k \cdot \varphi^{(1,k)}(t_1, t_2^{(i)}) \right\} \cdot dt_1 .$$

Supposto allora che sia

$$x^*(t^{(i)+}) = x^*(t^{(i)-}) \qquad i = 1, 2, \cdots, \nu, \tag{4}$$

vale a dire che

$$\chi^{(i)}(t_1^{(i)}) = X^{(i)}(t_1^{(i)}) \qquad i = 1, 2, \cdots, \nu,$$

la soluzione $\chi^{(i)}(t_1) - X^{(i)}(t_1)$ del sistema omogeneo risulta identicamente nulla e quindi lungo tutto σ_i è

$$x^*(t^+) \equiv x^*(t^-) \qquad i = 1, 2, \cdots, \nu.$$

Se ne conclude che se sussistono le ν condizioni (4) allora la funzione

$$x(t) \equiv \begin{cases} x^*(t) & \text{in } T_*, \\ \chi^{(i)}(t) \equiv X^{(i)}(t) & \text{lungo } \sigma_i, \quad i = 1, 2, \cdots, \nu, \end{cases}$$

è continua in T con le derivate parziali del prim'ordine, e soddisfa in tutto T alla (1); T risulta allora essere l'intero campo di esistenza di tale soluzione di (1).

Dopo ciò non resta altro che ricercare per quali valori di $x^{(0)} \equiv [x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \cdots, x_p^{(0)}]$ sia possibile far sussistere le condizioni (4), testè stabilite.

3. Si prenda in considerazione il sistema (omogeneo)

$$dx = \left\{ \sum_{k=1}^{p} x_k \cdot \Phi^{(k)}(t) \right\} dt, \tag{5}$$

cioè

$$dx = \sum_{k=1}^{p} x_k \cdot \left\{ \varphi^{(1,k)}(t) \cdot dt_1 + \varphi^{(2,k)}(t) \cdot dt_2 \right\}, \tag{5'}$$

si ha che in T_*, datane la connessione semplice, esiste, pel loc. cit. [1], il sistema $x^{(1)}(t), \cdots, x^{(p)}(t)$, di p soluzioni, *unitario* nel punto $t^{(0)}$ di T_*, vale a dire tale che la matrice

$$\begin{pmatrix} x_1^{(1)}, \cdots, x_p^{(1)} \\ \cdots\cdots\cdots \\ x_1^{(p)}, \cdots, x_p^{(p)} \end{pmatrix}$$

per $t = t^{(0)}$ sia la matrice *unità*, d'ordine p, $\begin{pmatrix} 1, 0, \cdots, 0 \\ 0, 1, \cdots, 0 \\ \cdots\cdots\cdots \\ 0, 0, \cdots, 1 \end{pmatrix}$.

Tale sistema di p soluzioni è ovviamente formato di soluzioni *indipendenti*.

Per la connessione semplice di T_* esiste in T_* anche la soluzione $\bar{x}(t)$ del sistema (1), del n. 1, assumente il valore zero in $t^{(0)}$.

Le eventuali soluzioni $x^*(t)$ di tale sistema (1) aventi per campo di esistenza l'intero campo T, $(\nu+1)$ volte connesso, [se esistono per opportune p-ple $x^{(0)} \equiv [x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \cdots, x_p^{(0)}]$ assegnabili ad x^* in $t^{(0)}$ e da scegliersi a tale scopo in modo appropriato] sono esprimibili a mezzo delle p costanti

$$x_1^*(t^{(0)}) = x_1^{(0)}, \cdots, x_p^*(t^{(0)}) = x_p^{(0)}, \tag{a}$$

necessariamente nella forma ben nota

$$x_h^*(t) = \sum_{s=1}^{p} x_s^*(t^{(0)}) \cdot x_h^{(s)}(t) + \bar{x}_h(t), \qquad h = 1, 2, \cdots, p. \tag{6}$$

Se mediante il secondo membro delle (6) scriviamo le espressioni che ne risultano per $x_h^*(t^{(i)+})$, $x_h^*(t^{(i)-})$, per effettuare poi le rispettive differenze

$$x_h^*(t^{(i)+}) - x_h^*(t^{(i)-}) \qquad \begin{matrix} i = 1, 2, \cdots, \nu, \\ h = 1, 2, \cdots, p, \end{matrix}$$

e ponendo poi

$$\begin{cases} x_h^{(s)}(t^{(i)+}) - x_h^{(s)}(t^{(i)-}) = \rho_h^{(s,i)} \\ \bar{x}_h(t^{(i)+}) - \bar{x}_h(t^{(i)-}) = \rho_h^{(i)} \end{cases} \qquad \begin{cases} h, s = 1, 2, \cdots, p, \\ i = 1, 2, \cdots, \nu, \end{cases}$$

le condizioni (4) si possono scrivere nella seguente forma

$$\sum_{s=1}^{p} \rho_h^{(s,i)} \cdot x_s^*(t^{(0)}) = -\rho_h^{(i)} \qquad \begin{cases} h = 1, 2, \cdots, p \\ i = 1, 2, \cdots, \nu; \end{cases} \tag{4}$$

Da questa si deduce che affinché una soluzione $x^*(t)$, *del sistema* (1) *nel campo semplicemente connesso* T_*, *sia prolungabile nell'intero campo* T, $(\nu+1)$ *volte connesso, necessita e basta che la relativa condizione iniziale* (a)

$$x^{(0)} \equiv [x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \cdots, x_p^{(0)}]$$

sia una soluzione del sistema lineare di $\nu \cdot p$ *equazioni in* p *incognite*

$$(7) \qquad \sum_{s=1}^{p} \rho_h^{(s,i)} \cdot x_s = -\rho_h^{(i)} \qquad \begin{matrix} h = 1, 2, \cdots, p \\ i = 1, 2, \cdots, \nu. \end{matrix}$$

Di questo sistema lineare (7) la caratteristica q della matrice dei coefficienti è $\leq p$.

Si perviene con ciò al seguente risultato:

La ricerca delle soluzioni del sistema (1) *nel campo* T $(\nu+1)$ *volte connesso è ricondotto alla risoluzione del sistema* (7) *di* $\nu \cdot p$ *equazioni lineari algebriche in* p *incognite.*

Naturalmente trascuriamo la discussione, dei casi che possono presentarsi, che è ben elementare.

Contentiamoci di notare esplicitamente il seguente teorema:

Considerato il sistema (1), *nelle ammesse ipotesi, in un campo* $(\nu+1)$ *volte connesso se esso vi possiede una soluzione, qualunque siano i termini noti, la soluzione è unica.*

Analisi matematica. — *Definizione ed espressione analitica del perimetro di un insieme*(*). Nota di Ennio De Giorgi, presentata(**) dal Corrisp. R. Caccioppoli.

In questa Nota daremo una definizione ed espressione analitica del perimetro di un insieme contenuto in uno spazio ad r dimensioni. Tale definizione è equivalente a quella data da Caccioppoli [1] per le frontiere orientate (specialmente per domini e insiemi aperti) riguardante come insiemi di « elementi dimensionali »; si discosta quindi dalle altre ben note (di Gross, Caratheodory, ecc.) di misura dimensionale di un insieme di punti. La espressione analitica permette però di stabilire vari risultati alquanto riposti inerenti alla nozione di *perimetro*, cioè di misura dimensionale di un contorno. Tali risultati mi sembrano avere importanza essenziale in molte questioni relative alla teoria dell'integrazione ed ai problemi isoperimetrici. Segnalerò in particolare quello sul perimetro come minimo limite dei perimetri di poliedri approssimanti, che consente una definizione analoga a quella di Lebesgue per l'area di una superficie. Le dimostrazioni dei teoremi che ora esponiamo seguiranno in un altro lavoro più esteso.

(*) Lavoro eseguito presso l'Istituto Nazionale per le applicazioni del Calcolo.

(**) Nella seduta del 14 marzo 1953.

1 Vedi R. Caccioppoli, *Misura e integrazione sugli insiemi dimensionalmente orientati*. Questi « Rendiconti », ser. VIII, vol. XII, fasc. 1 e 2 (1952).

1. Sia S_r uno spazio ad r dimensioni il cui punto generico indicheremo con $x \equiv (x_1, \cdots, x_r)$, mentre indicheremo con $|x|$ la quantità $\sqrt{x_1^2 + \cdots + x_r^2}$; parlando nel seguito di insiemi contenuti in S_r e di funzioni ivi definite, intenderemo sempre riferirci ad insiemi di Borel e a funzioni di Baire. Cominciamo col porre, per ogni funzione $f(x)$ definita in S_r ed ivi limitata e per ogni numero positivo λ,

$$W_\lambda f(x) = \pi^{-r/2} \int_{S_r} e^{-|\xi|^2} f(x + \lambda\xi)\, d\xi_1 \cdots d\xi_r .$$

Indichiamo in generale con E un insieme contenuto in S_r. Si dimostra che, se E è un *dominio poligonale* [2], la misura $(r-1)$-dimensionale della frontiera di E, che chiameremo brevemente *perimetro* di E, è data dal limite

$$(1) \qquad \lim_{\lambda \to 0} \int_{S_r} |\operatorname{grad} \cdot W_\lambda \varphi(x \mid E)|\, dx_1 \cdots dx_r$$

ove con $\varphi(x \mid E)$ indichiamo la funzione caratteristica dell'insieme E. Dopo di ciò diremo *perimetro* di un insieme E qualunque e indicheremo con $P(E)$ il limite (1) che si prova esiste sempre (finito o infinito). Tale definizione è illustrata e giustificata dai teoremi che seguono.

TEOREMA I. – *Dato un insieme* $E < S_r$ *il cui perimetro* $P(E)$ *sia finito, esiste una ed una sola funzione vettoriale d'insieme* $\mathbf{F}(B) \equiv (F_1(B), \cdots, F_r(B))$ *soddisfacente le condizioni seguenti*:

a) $\mathbf{F}(B)$ *è una funzione definita in ogni insieme* $B < S_r$, *completamente additiva ed a variazione totale finita*;

b) *presa comunque una funzione* $g(x)$ *continua in* S_r *con le sue derivate parziali prime ed infinitesima, insieme a tali derivate, per* $|x| \to \infty$, *d'ordine non inferiore a quello di* $|x|^{-(r+1)}$, *risulta*

$$\int_E \operatorname{grad} \cdot g(x)\, dx_1 \cdots dx_r = \int_{S_r} g(x)\, d\mathbf{F}.$$

Questo teorema si lascia invertire e completare con l'interpretazione della espressione (1).

TEOREMA II. – *Dato un insieme* $E < S_r$, *se esiste una funzione* $\mathbf{F}(B)$ *soddisfacente le condizioni* a), b) *del teorema I, il perimetro di* E *è finito e coincide con la variazione totale in* S_r *della funzione* $\mathbf{F}(B)$.

Il teorema II permette di stabilire l'equivalenza fra la definizione data da Caccioppoli di misura $(r-1)$ dimensionale della frontiera orientata di un insieme e la nostra definizione di perimetro. Inoltre, se il limite (1) è finito, mediante un limite analogo si può definire direttamente la funzione $\mathbf{F}(B)$ la cui esistenza è assicurata dal teorema I.

(2) Chiameremo *dominio poligonale* un dominio la cui frontiera sia contenuta in un numero finito di iperpiani.

Precisamente sussiste il seguente

TEOREMA III. – *Dato un insieme* E *di perimetro finito e detta* $\mathbf{F}(B)$ *la funzione additiva di insieme soddisfacente le condizioni del teorema I, per ogni insieme* B *sulla cui frontiera sia nulla la variazione totale della funzione additiva* $\mathbf{F}(B)$ *risulta*

$$\lim_{\lambda \to \lambda_0} \int_B \operatorname{grad} \cdot W_\lambda \varphi(x \mid E)\, dx_1 \cdots dx_r = \mathbf{F}(B).$$

2. Indichiamo ora con Σ lo spazio avente come elementi gli insiemi di S_r e nel quale la distanza di due insiemi E_1 ed E_2 sia data dalla mis.$(E_1 + E_2 - E_1 \cdot E_2)$ e definiamo i limiti di insieme in base a questa definizione di distanze. Data poi una funzione additiva di insieme $F(\lambda\ B)$, dipendente da un parametro λ diciamo, in accordo con la terminologia corrente, che $F(\lambda \mid B)$ converge *debolmente*, per $\lambda \to \lambda_0$, verso una funzione $F(B)$ se, per ogni funzione $g(x)$ continua in S_r ed infinitesima per $|x| \to \infty$, si ha

$$\lim_{\lambda \to \lambda_0} \int_{S_r} g(x)\, dF(\lambda \mid B) = \int_{S_r} g(x)\, dF.$$

TEOREMA IV. – *Data una successione di insiemi*

$$E_1, \cdots, E_n, \cdots$$

aventi perimetri equilimitati, se

$$\lim_{n \to \infty} E_n = E$$

anche il perimetro $P(E)$ *è finito; si ha dippiù*

$$\min. \lim_{n \to \infty} P(E_n) \geqq P(E);$$

inoltre le funzioni $\mathbf{F}^{(1)}(B), \cdots, \mathbf{F}^{(n)}(B), \cdots$ *soddisfacenti alle condizioni del teorema I relativamente agli insiemi* $E_1, \cdots, E_n, \cdots$ *convergono debolmente verso la funzione* $\mathbf{F}(B)$ *relativa all'insieme* E.

Questo teorema fornisce un criterio per riconoscere che un dato insieme ha perimetro finito; essendo gli insiemi approssimanti tenuti alla semplice convergenza in media, essi possono scegliersi con larga arbitrarietà e in particolare essere domini poligonali; in questo caso un risultato più espressivo è quello contenuto nel teorema VI.

TEOREMA V. – *Dato un insieme* $E < S_r$ *(con* $r \geqq 2$*), se* E *ha perimetro finito risulta verificata una delle due relazioni*

$$(2) \qquad \begin{cases} \text{mis. } E \leqq [P(E)]^{r/r-1} \\ \text{mis. } (S_r - E) \leqq [P(E)]^{r/r-1}. \end{cases}$$

Le (2) costituiscono una disuguaglianza di tipo isoperimetrico in quanto stabiliscono una limitazione del rapporto tra la potenza $(r-1)$-esima della misura di un insieme e la potenza r-esima del suo perimetro. Tale disuguaglianza « larga » ci assicura della esistenza di una disuguaglianza « stretta » (della quale ci occuperemo in un prossimo lavoro). Nello spazio Σ l'aggregato

$\{\Pi\}$ dei domini poligonali è evidentemente denso, cioè ogni insieme E è elemento di accumulazione di domini poligonali. Sussiste il fondamentale

TEOREMA VI. – *Il perimetro di un insieme è il minimo limite di quelli dei domini poligonali approssimanti, si ha cioè*

$$\min_{\Pi \to E} \lim P(\Pi) = P(E).$$

3. Accanto al perimetro P (E) di un insieme si possono definire le sue proiezioni sui piani coordinati, proiezioni che indicheremo con $P_1(E), \cdots, P_r(E)$ e che sono definite dalle relazioni

$$P_h(E) = \lim_{\lambda \to \lambda_0} \int_{S_r} \left| \frac{\partial}{\partial x_h} W_\lambda \varphi(x \mid E) \right| dx_1 \cdots dx_r \qquad (h = 1, \cdots, r)$$

Per le proiezioni del perimetro valgono i teoremi analoghi ai teoremi I, II, III, IV, nei quali alla funzione vettoriale **F** (B) vanno sostituite le funzioni scalari $F_1(B), \cdots, F_r(B)$ e al gradiente vanno sostituite le derivate parziali.

Ne segue che, *dato un insieme* $E < S_r$, *se, per ogni valore dell'indice h, è possibile trovare una successione di domini poligonali approssimanti in media l'insieme* E, *i cui perimetri abbiano proiezioni h–esime equilimitate, il perimetro di* E *è finito*. Si viene così a stabilire un risultato dato come semplice presunzione da Caccioppoli nel lavoro citato [3].

Analisi matematica. — *Funzioni epicicloidali.* Nota di ARTHUR ERDÉLYI, presentata [*] dal Corrisp. F. G. TRICOMI.

1. In due Note ed una Memoria [1] il prof. Agostinelli considera l'equazione delle onde bidimensionale

$$u_{xx} + u_{yy} + \lambda^2 u = 0 \tag{1}$$

in una regione limitata dall'epicicloide

$$x = na\cos t + b\cos nt \quad , \quad y = na\sin t + b\sin nt \tag{2}$$

dove $0 < b < a$, n è un intero positivo e t un parametro variabile da 0 a 2π. Egli introduce le coordinate epicicloidali ρ, φ, definite dalle equazioni

$$x = na\rho\cos\varphi + b\rho^n\cos n\varphi \quad , \quad y = na\rho\sin\varphi + b\rho^n\sin n\varphi \tag{3}$$

e trasforma l'equazione (1) nell'altra

$$u_{\rho\rho} + \rho^{-1} u_\rho + \rho^{-2} u_{\varphi\varphi} + \lambda^2 n^2 [a^2 + 2ab\rho^{n-1}\cos(n-1)\varphi + b^2\rho^{2n-2}] u = 0. \tag{4}$$

(3) Loc. cit. (*), Nota I, n. 8, nota 10.

(*) Nella seduta del 14 marzo 1953.

(1) C. AGOSTINELLI « Rend. Lincei » (8), *7*, 316-320 (1949); (8), *11*, 339-344 (1951) e « Annali Mat. Pura Appl. » (4), *33*, 165-210 (1952). Vedi pure A. PIGNEDOLI, « Annali Mat. Pura Appl. » (4), *30* 291-307 (1949) e « Atti Semin. Mat. Fis. Modena », *4*, 3-25 e 30-44 (1950).

Quest'equazione a derivate parziali non è separabile; tuttavia Agostinelli riesce ad ottenere certe sue soluzioni $\mathcal{E}^{(k)}$ e $\mathcal{E}^{*(k)}$ atte alla soluzione del problema dei valori al contorno, che egli chiama *funzioni epicicloidali*. Lo scopo di questa Nota è di mostrare che $\mathcal{E}^{(k)}$ e $\mathcal{E}^{*(k)}$ possono essere espresse molto semplicemente, in termini finiti, per mezzo di funzioni di Bessel. Delle espressioni simili potrebbero anche esser dedotte dai lavori di Agostinelli, ma le nostre sono più semplici e mostrano inoltre come certe identità di Agostinelli non siano altro che parafrasi o conseguenze del teorema di addizione di Graf per le funzioni di Bessel.

2. Siano R e θ le coordinate polari sul piano xy, di guisa che

$$x + iy = na\rho e^{i\varphi} + b(\rho e^{i\varphi})^n = \mathrm{R}\, e^{i\vartheta}. \tag{5}$$

Poniamo inoltre $\theta = \varphi + \psi$, con che avremo

$$na\rho + b\rho^n \cos(n-1)\varphi = \mathrm{R}\cos\psi \quad , \quad b\rho^n \sin(n-1)\varphi = \mathrm{R}\sin\psi. \tag{6}$$

È noto che, per qualsiasi valore di k,

$$\mathrm{J}_k(\lambda \mathrm{R})\, e^{\pm ik\theta} = \mathrm{J}_k(\lambda \mathrm{R})\, e^{\pm ik(\varphi+\psi)} \tag{7}$$

è una soluzione di (1), che risulta ad un sol valore allora e solo allora che k è un intero.

Le equazioni (6) suggeriscono l'idea di far uso del teorema d'addizione di Graf per le funzioni di Bessel [2]:

$$\mathrm{J}_k(\tilde{\omega})\, e^{\pm ik\psi} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \mathrm{J}_{k+m}(\mathrm{Z})\, \mathrm{J}_m(z)\, e^{\pm im\chi} \tag{8}$$

essendo

$$\mathrm{Z} - z\cos\chi = \tilde{\omega}\cos\psi \quad , \quad z\sin\chi = \tilde{\omega}\sin\psi. \tag{9}$$

Precisamente noi porremo

$$\tilde{\omega} = \lambda \mathrm{R} \quad , \quad \mathrm{Z} = \lambda na\rho \quad , \quad z = \lambda b\rho^n \quad , \quad \chi = \pi - (n-1)\varphi \quad , \quad m = \quad , \tag{10}$$

ed useremo la relazione

$$\mathrm{J}_{-p}(z) = (-1)^p \mathrm{J}_p(z).$$

In tal modo la soluzione (7) diviene

$$\sum_{p=-\infty}^{\infty} \mathrm{J}_{k-p}(\lambda na\rho)\, \mathrm{J}_p(\lambda b\rho^n)\, e^{\pm i[k+p(n-1)]\varphi}$$

che è l'espressione di Agostinelli per

$$\mathcal{E}^{(k)}(\rho, \varphi, \lambda) \pm i\, \mathcal{E}^{*(k)}(\rho, \varphi, \lambda).$$

Si vede così che è

$$\mathcal{E}^{(k)}(\rho, \varphi, \lambda) = \mathrm{J}_k(\lambda \mathrm{R}) \cos k(\varphi + \psi)$$

$$\mathcal{E}^{*(k)}(\rho, \varphi, \lambda) = \mathrm{J}_k(\lambda \mathrm{R}) \sin k(\varphi + \psi)$$

dove R e ψ sono definiti dalle (6).

(2) G. N. Watson, *Theory of Bessel functions*. § 11. 3.

Matematica. — *Sopra il numero degli ordinamenti di un corpo.* Nota di WILHELM KLINGENBERG, presentata (*) dal Corrisp. B. SEGRE.

1. TEOREMA. – *Sia* K *un corpo che ammetta soltanto degli ordinamenti archimedei. Siano* K^* *il gruppo moltiplicativo di* K *e* Q^* *il sottogruppo degli elementi di* K^* *esprimibili quali somme di quadrati. Se* n (≥ 1) *è il numero dei possibili diversi ordinamenti* K, *allora* Q^* *ha in* K^* *l'indice* 2^n *e viceversa. Questa relazione vale evidentemente anche nel caso* $n = 0$, *e cioè se* K *non è ordinabile.*

2. Ricordiamo (1), che un corpo si dice ordinabile quando vi sia una classe P^*, chiamata la classe positiva, di elementi di K^* colle due proprietà: (I) Per ogni $a \in K^*$ vale una e soltanto una delle relazioni $a \in P^*$ e $-a \in P^*$. (II) Da $a, b \in P^*$ segue $ab, a + b \in P^*$.

Invece di $a \in P^*$ e $-b \in P^*$ si scrive anche $a > 0$ e $b < 0$, e gli elementi a e b allora si dicono rispettivamente positivo e negativo (nell'ordinamento definito da P^*). Una conseguenza semplice di (I) e (II) è: $a^2 > 0$ per ogni $a \in K^*$, sicchè $Q^* \subseteq P^*$. P^* è un sottogruppo di K^* con l'indice 2. Dunque in un corpo ordinabile Q^* ha l'indice ≥ 2. Un noto teorema fondamentale (1) dice che anche, viceversa, un corpo K per il quale Q^* abbia l'indice ≥ 2 è ordinabile. Da ciò segue il teorema del n. 1 per il caso $n = 0$.

Per gli elementi q di Q^* vale, per ogni ordinamento di K, la relazione $q > 0$. Un secondo teorema fondamentale (1), dice che gli elementi di Q^* sono anche i s o l i che, per o g n i ordinamento di K siano positivi. Da ciò segue il nostro teorema per il caso $n = 1$. Infatti, se per un corpo che ammetta un solo ordinamento l'indice di Q^* fosse > 2, ossia, se ci fosse un elemento $a > 0$ tale che non $a \in Q^*$, allora ci sarebbe anche un secondo ordinamento di K con $a < 0$.

Un ordinamento si chiama archimedeo se, per ogni $a \in K^*$, esiste un intero n tale che $n - a > 0$.

3. Supponiamo ora che K ammetta n ordinamenti differenti, con $n > 1$, e non di più. Indichiamo la relazione di positività nell'ordinamento Ω_i col simbolo $>_i$ e indichiamo con $>$ una relazione che valga per tutti gli ordinamenti di K. Se Ω_i, Ω_k sono due diversi ordinamenti, allora esiste un elemento $a_{ik} \in K^*$ con $a_{ik} <_i 0$, $a_{ik} >_k 0$. Dunque per l'elemento

$$q_{ik} = \left(\frac{1 + a_{ik}}{1 - a_{ik}}\right)^2$$

(*) Nella seduta del 14 marzo 1953.

(1) Si veda B. L. v. d. WAERDEN, *Moderne Algebra*, I, 2ª ed., Berlin 1937 o anche le nuove dimostrazioni in G. PICKERT, *Einführung in die höhere Algebra*, Göttingen 1951.

si ha

$$(1) \qquad 0 < q_{ik} \underset{i}{<} 1 \quad ; \quad 1 \underset{k}{<} q_{ik}.$$

Poichè Ω_i è archimedeo, esiste un intero m, che puo supporsi > 1, tale che

$$m \underset{i}{>} \frac{1}{1 - q_{ik}} \qquad \text{ossia} \qquad q_{ik} \underset{i}{<} \frac{m-1}{m} < 1.$$

Ne consegue che, per un esponente r opportuno, risulta

$$(2) \qquad (q_{ik})^r \underset{i}{<} \left(\frac{m-1}{m}\right)^r < \frac{1}{n}.$$

Posto $p_{ik} = (q_{ik})^r$, dalle (1) e (2) si traggono le:

$$(3) \qquad 0 < p_{ik} \underset{i}{<} \frac{1}{n} \quad ; \quad 1 \underset{k}{<} p_{ik}.$$

Consideriamo gli elementi

$$r_i = \sum_{k=1}^{n} p_{ik} \qquad (p_{ii} = 0).$$

Per essi si ha, a causa delle (3),

$$0 < r_i \underset{i}{<} 1 \quad ; \quad 1 \underset{k}{<} r_i \qquad \text{per ogni} \quad k \neq i.$$

Dunque per gli elementi $a_i = r_i - 1$ valgono le relazioni

$$(4) \qquad a_i \underset{i}{<} 0 \quad ; \quad a_i \underset{k}{>} 0 \qquad \text{per ogni} \quad k \neq i.$$

4. Se due elementi $a, b \in K^*$ risultano simultaneamente positivi o negativi per ogni Ω_i, cioè se $ab \underset{i}{>} 0$ per ogni i, allora segue dal secondo teorema richiamato nel n. 2: $ab \in Q^*$. L'indice r di Q^* è dunque il più grande numero di elementi $b_1, b_2, \cdots, b_r$ non nulli che a due a due non si comportino ugualmente per tutti gli ordinamenti di K, tali cioè che per ogni coppia b_l, b_m vi sia almeno un ordinamento Ω_i in cui valga la relazione $b_l b_m \underset{i}{<} 0$.

Essendo n il numero degli ordinamenti, ci sono al massimo 2^n elementi siffatti. Ma abbiamo trovato sopra gli elementi a_i soddisfacenti alle (4); da essi, moltiplicandoli fra loro in tutti i modi, si deducono 2^n elementi che a due a due non si comportano ugualmente per tutti gli n ordinamenti. Dunque Q^* ha proprio l'indice 2^n.

Viceversa, se Q^* ha l'indice 2^n [2], K ammette soltanto un numero finito, m, di ordinamenti, ciascuno dei quali è per ipotesi archimedeo. Per quanto sopra, l'indice di Q^* deve valere 2^m, sicchè – confrontando – si ottiene l'uguaglianza $m = n$.

(2) L'indice di Q^* in K^*, cioè l'ordine del gruppo $L^* = K^*/Q^*$, se finito, è sempre una potenza di 2. Questo è una semplice conseguenza del fatto che ogni elemento di L^* ha l'ordine 2.

Teoria matematica dell'elasticità. — *Condizioni perché sia compatibile il problema principale della statica elastica* (*). Nota di GAETANO FICHERA, presentata (**) dal Socio M. PICONE.

Scopo della presente Nota è di far preventivamente conoscere alcuni risultati che formano l'oggetto di una mia Memoria, che apparirà prossimamente.

Il risultato di maggiore interesse consiste nel far vedere che, quando si richiede che gli spostamenti e le componenti di tensione in un corpo elastico, isotropo e omogeneo, incastrato lungo una parte del suo contorno, siano rappresentate da funzioni continue, non si possono allora assegnare ad arbitrio le forze di massa e quelle superficiali, agenti sulla parte libera del contorno. Occorre invece che queste verifichino una condizione quantitativa di tipo integrale.

1. DEFINIZIONI E NOTAZIONI. – Supporremo che il corpo elastico C isotropo e omogeneo sia schematizzabile nella sua posizione naturale per mezzo di un campo A dello spazio a tre dimensioni. Ammetteremo – per semplicità – che la frontiera di A sia costituita da un'unica superficie Σ dotata di piano tangente e curvature principali continue. La parte lungo la quale il corpo è incastrato sia una superficie aperta Σ_1 contenuta in Σ e il cui bordo B sia una curva regolare semplice e chiusa. Con Σ_2 indicherò la superficie aperta contenuta in Σ che costituisce la parte libera del contorno del corpo, nella quale agiscono le forze assegnate.

Le due superficie aperte Σ_1 e Σ_2 hanno in comune il bordo B. Sia Σ_1 che Σ_2 verranno considerate come insiemi di punti aperti nello spazio ambiente Σ, non contenenti cioè alcun punto del loro bordo B, per modo che sarà $\Sigma - (\Sigma_1 + \Sigma_2) = B$.

Con x indicherò il generico punto dello spazio a tre dimensioni e con x_1, x_2, x_3 le sue coordinate cartesiane ortogonali rispetto ad un prefissato sistema di riferimento. Con $u(x)$ un vettore funzione del punto x e con $u_1(x), u_2(x), u_3(x)$ le sue tre componenti rispetto agli assi coordinati. Denotato con D un qualsiasi operatore differenziale, con Du indicherò il vettore di componenti Du_1, Du_2, Du_3.

Detto Σ' un arbitrario insieme di punti di Σ, dicendo che *il vettore* $u(x)$ *è di classe uno in* $A + \Sigma'$ *intenderò*: 1° il vettore $u(x)$ è continuo in $A+\Sigma'$ e possiede derivate parziali prime $\partial u/\partial x_1, \partial u/\partial x_2, \partial u/\partial x_3$ continue in A; 2° esistono tre vettori continui in $A + \Sigma'$ i quali in ogni punto di A coincidono rispettivamente con $\partial u/\partial x_1, \partial u/\partial x_2, \partial u/\partial x_3$.

2. PROBLEMA PRINCIPALE DELLA STATICA ELASTICA. - Sia k una costante, ν il versore normale a Σ diretto positivamente verso l'interno di A.

(*) Lavoro eseguito per l'I.N.A.C. nell'Istituto Matematico dell'Università di Trieste.
(**) Nella seduta del 14 febbraio 1953.

Poniamo

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = \operatorname{grad} u \cdot \nu,$$

$$L[u] = (k - 1)(\operatorname{div} u)\nu + 2\frac{\partial u}{\partial \nu} + (\nu \wedge \operatorname{rot} u).$$

Consideriamo il seguente problema al contorno

$$(1) \qquad \begin{cases} \Delta_2 u + k \operatorname{grad} \operatorname{div} u = f & \text{in } A, \\ u = 0 & \text{su } \Sigma_1, \\ L[u] = g & \text{su } \Sigma_2. \end{cases}$$

Se è $k > 1/3$ il sistema (1) traduce il problema principale della statica elastica.

In questo caso f e g rappresentano rispettivamente – a meno di fattori costanti – la forza di massa e la forza superficiale assegnate. Il vettore u è lo spostamento del punto x nello stato di deformazione del corpo.

Dal punto di vista fisico i vettori f e g devono potersi assegnare arbitrariamente, venendo essi equilibrati dalle reazioni vincolari (incognite) lungo la parte incastrata del corpo Σ_1. Essi determinano in modo univoco la deformazione del corpo. Dal punto di vista matematico ciò significa che se il sistema (1) effettivamente traduce il problema fisico deve esserci per il problema al contorno (1) un teorema di esistenza e di unicità. Ora la considerazione di un siffatto teorema è priva di senso se preventivamente non è fissata una classe di vettori nella quale si ricerca la soluzione. Le proprietà di tale classe dovranno essere precisate tenendo presente il significato fisico del vettore incognito e delle sue derivate. Ad esempio, una proprietà da richiedere è che sia finito l'integrale che rappresenta l'energia elastica.

In una mia Memoria [1] ho dimostrato che se $f(x)$ è hölderiana in A e $g(x)$ su Σ_2, esiste ed è unico un vettore $u(x)$ il quale è di classe uno in $A + \Sigma_1 + \Sigma_2$, possiede derivate seconde continue in A ed è tale che

$$\iiint_A \left(\left| \frac{\partial u}{\partial x_1} \right|^2 + \left| \frac{\partial u}{\partial x_2} \right|^2 + \left| \frac{\partial u}{\partial x_3} \right|^2 \right) dx_1\, dx_2\, dx_3 < +\infty.$$

Dal punto di vista fisico è però anche da richiedere alla soluzione che le derivate prime di u siano superficialmente integrabili su Σ.

Ciò avviene se u è di classe uno in $A + \Sigma$. In tale classe vi è ovviamente l'unicità della soluzione per il problema (1). Ci si chiede: bastano solamente proprietà *qualitative* per f e g onde assicurare l'esistenza della soluzione in tale classe? La risposta è negativa.

3. Condizione necessaria per l'esistenza della soluzione in una opportuna classe di vettori. – Sia Γ la classe dei vettori nulli su Σ_1 di classe uno in $A + \Sigma$ e tali che, qualunque sia k, esista in ogni punto di A, $\Delta_2 u + k \operatorname{grad} \operatorname{div} u$ e coincida con un vettore continuo in $A + \Sigma$.

1) G. Fichera, *Sull'esistenza e sul calcolo delle soluzioni dei problemi al contorno relativi all'equilibrio di un corpo elastico*. « Ann. Scuola Norm. Sup. », Pisa (1950).

Sia S lo spazio, lineare rispetto al corpo reale [2], costituito dai vettori aventi sei componenti continue, delle quali le prime tre definite su $\Sigma_2 + B$ e le altre tre in $A + \Sigma$. Indicherò con V il generico vettore di S e con $v_1^{(1)}, v_2^{(1)}, v_3^{(1)}, v_1^{(2)}, v_2^{(2)}, v_3^{(2)}$ le sue componenti. Con $v^{(1)}$ denoterò il vettore di componenti $v_1^{(1)}, v_2^{(1)}, v_3^{(1)}$ e con $v^{(2)}$ quello di componenti $v_1^{(2)}, v_2^{(2)}, v_3^{(2)}$. Il vettore V sarà anche denotato scrivendo $(v^{(1)}, v^{(2)})$. Considererò S come uno spazio normale definendo la norma di V al modo seguente

$$\| V \| = \max_{\Sigma_2 + B} | v^{(1)} | + \max_{A+\Sigma} | v^{(2)} |.$$

Allorchè u descrive Γ il vettore di S: $(\partial u/\partial \nu, \Delta_2 u)$ descrive una varietà lineare I_0 dello spazio S. Si genera in tal modo una trasformazione lineare (omogenea e additiva) $V_0 = T_0(u)$ la quale muta l'elemento u di Γ in un elemento V_0 di I_0. Tale trasformazione è invertibile e sia $u = T_0^{-1}(V_0)$ la trasformazione inversa.

Analogamente assunto $k > 1/3$ e posto

$$E[u] = \Delta_2 u + k \operatorname{grad} \operatorname{div} u$$

il vettore $V_k = (L(u), E(u))$ descrive una varietà lineare I_k dello spazio S. Indichiamo tale trasformazione lineare con $V_k = T_k(u)$ e la sua inversa con $u = T_k^{-1}(V)$.

Sussiste il seguente teorema

I. – *Esiste una trasformazione lineare invertibile*

$$V_k = T(V_0),$$

la quale muta I_0 *in* I_k; *essa e la sua inversa*

$$V_0 = T^{-1}(V_k)$$

sono continue.

In virtù di questo teorema si può estendere la definizione di T e di T^{-1} agli involucri $\bar{I}_0$ e $\bar{I}_k$ delle due varietà I_0 e I_k.

Si ha:

II. – *Se esiste un punto di* S *non appartenente ad* I_0 *esisterà un punto di* S *non appartenente ad* $\bar{I}_k$.

Infatti se ogni punto di S appartenesse a $\bar{I}_k$, $\bar{I}_k$ conterrebbe una sfera e quindi anche I_0 dovrebbe contenere una sfera [3], epperò coinciderebbe con S contrariamente all'ipotesi.

Si ha anche che:

III. – *Esiste un punto di* S *non appartenente ad* $\bar{I}_0$.

Se così non fosse I_0 sarebbe una base per S, cioè in qualsiasi intorno di ogni punto di S vi sarebbe qualche elemento di I_0, ciò equivale a dire

(2) Cfr. M. PICONE, *Fondamenti di Analisi funzionale lineare.* «D.U.S.A.», Roma (1942).

(3) Cfr. M. PICONE, loc. cit. (2), S. BANACH, *Théorie des opérations linéares.* Monografie Matem. Warszawa (1932).

che assegnate le due funzioni continue α e β la prima in $\Sigma_2 + B$ e la seconda in $A + \Sigma$ esiste una funzione φ – componente di un vettore appartenente a Γ – tale che qualunque sia $\varepsilon > 0$ risulti

$$\left| \alpha - \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} \right| < \varepsilon \qquad \text{su} \quad \Sigma_2 + B,$$

$$| \beta - \Delta_2 \varphi | < \varepsilon \qquad \text{in} \quad A + \Sigma.$$

Ciò è assurdo. Basta assumere $\alpha = 1$, $\beta = 1$, $\varepsilon = 1/2$ per constatarlo. Sarebbe infatti $\Delta_2 \varphi > 1/2$, $\partial\varphi/\partial\nu > 1/2$ su $\Sigma_2 + B$ e $\varphi = 0$ su $\Sigma_1 + B$. Ciò è impossibile dato che si avrebbe $\varphi \leq 0$ in $A + \Sigma$ e quindi $\partial\varphi/\partial\nu \leq 0$ su B.

Possiamo quindi concludere col seguente teorema che fornisce una condizione di compatibilità per il problema principale dell'elasticità nella classe Γ.

IV. – *Esistono due funzioni vettoriali additive e a variazione finita* $\alpha^{(1)}$ (E) *ed* $\alpha^{(2)}$ (H), *la prima definita sui boreliani* E *di* $\Sigma_2 + B$ *e la seconda sui boreliani* H di $A + \Sigma$, *non identicamente nulle e tali che condizione necessaria perché esista la soluzione del problema* (1) *in* Γ *è che si abbia*

$$\int_{\Sigma_2 + B} g(x)\, d\alpha^{(1)} + \int_{A+\Sigma} f(x)\, d\alpha^{(2)} = 0.$$

Infatti per il teorema II esisterà un funzionale lineare continuo e identicamente nullo in $\bar{I}_k$ e quindi su I_k. Tale funzionale per un noto teorema di Riesz [4] sarà del tipo seguente

$$\int_{\Sigma_2 + B} \nu^{(1)}\, d\alpha^{(1)} + \int_{A+\Sigma} \nu^{(2)}\, d\alpha^{(2)}$$

essendo $\alpha^{(1)}$ ed $\alpha^{(2)}$ vettori additivi e a variazione finita, definiti rispettivamente sui boreliani di $\Sigma_2 + B$ e di $A + \Sigma$.

Da questo teorema si deduce

V. – *Condizione necessaria perché esista una soluzione del problema*

$$(I_0) \qquad \begin{cases} \Delta_2 u + k \operatorname{grad} \operatorname{div} u = 0 & \text{in} \quad A, \\ u = 0 & \text{su} \quad \Sigma_1, \\ L[u] = g & \text{su} \quad \Sigma_2, \end{cases}$$

che sia di classe uno in $A + \Sigma$, *è che il vettore* g *continuo in* $\Sigma_2 + B$ *verifichi la condizione*

$$\int_{\Sigma_2 + B} g(x)\, d\alpha^{(1)} = 0 \ [5].$$

(4) Cfr. M. PICONE, loc. cit. (2).

(5) È da presumere – fondandosi su quanto si verifica nel caso piano per $k = 0$ – che esista più di un vettore $\alpha^{(1)}$ ortogonale ai vettori $L[u]$ relativi agli u nulli su Σ_1 e di classe uno in $A + \Sigma$ (Cfr. G. FICHERA, *Sul problema della derivata obliqua e sul problema misto per l'equazione di Laplace*. « Boll. Un. Mat. Ital. », dicembre 1952).

Teoria matematica dell'elasticità. — *Sulla applicazione del metodo della trasformata parziale di Laplace ad intervallo di integrazione finito ad un problema di elasticità piana* (*). Nota di GIANFRANCO CAPRIZ, presentata (**) dal Socio M. PICONE.

1. In alcuni recenti lavori (1) G. Fichera ha dimostrato come il problema dell'integrazione del sistema di equazioni dell'equilibrio di un solido elastico, isotropo ed omogeneo può essere tradotto in un sistema di infinite equazioni integrali del tipo di Fischer–Riesz. E ciò ottiene mediante un procedimento fondato essenzialmente sull'uso della formula di Green, secondo un indirizzo da tempo indicato da M. Picone (2).

In alcuni precedenti lavori (3) A. Ghizzetti aveva fatto vedere come l'applicazione ad alcuni problemi al contorno classici della fisica matematica (problema di Dirichlet, di Neumann, della piastra incastrata) del metodo della trasformata parziale di Laplace ad intervallo di integrazione finito (4) conduce analogamente a tradurli in un sistema di infinite equazioni integrali del tipo di Fischer–Riesz.

Si è applicato questo ultimo metodo (5) al sistema di equazioni della elasticità, nel caso degli spostamenti piani; nel caso cioè in cui, dette u , v , w le componenti dello spostamento, si pensino u , v funzioni solo di x , y i cui valori siano noti al contorno e w identicamente nulla. Seguendo sostanzialmente i procedimenti usati da A. Ghizzetti nelle Note citate si è condotti a scrivere un sistema di infinite equazioni integrali, le quali si possono interpretare come formule di Green–Betti applicate agli spostamenti effettivi ed ad un sistema di infiniti spostamenti fittizi che verrà in seguito pre-

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto Nazionale per le Applicazioni del Calcolo. Esso ha costituito l'argomento della mia tesi di perfezionamento presso la Scuola Normale Superiore di Pisa.

(**) Nella seduta del 14 marzo 1953.

(1) G. FICHERA, *Sui problemi analitici dell'elasticità piana.* « Rend. Sem. Cagliari » (1948); *Sull'equilibrio di un corpo elastico isotropo ed omogeneo.* « Rend. Sem. Mat. Padova » (1948).

(2) M. PICONE, *Nuovi metodi di indagine per la teoria delle equazioni lineari a derivate parziali.* « Rend. Sem. Mat. Fisico », Milano (1939); *Nuove determinazioni per gli integrali delle equazioni lineari a derivate parziali.* « Rend. Lincei », vol. XXVIII (1939); *Appunti di Analisi Superiore*, Cap. VII e specialmente p. 716 e sgg. [Rondinella, Napoli 1940)].

(3) A. GHIZZETTI, *Sul metodo della trasformata parziale di Laplace ad intervallo di integrazione finito.* « Pubblicazioni I.N.A.C. », n. 167; *Ricerche analitiche sul problema della piastra, ecc.* « Rend. Mat. e sue applicazioni », Roma (1947).

(4) Per la definizione di tale trasformata vedi la seconda delle pubblicazioni citate in (3).

(5) Nello stesso indirizzo vedi anche C. TOLOTTI, *Applicazione di un nuovo metodo di M. Picone all'integrazione delle equazioni della elasticità di un parallelepipedo rettangolo.* « Rend. R. Acc. Italia », ser. VII, vol. I.

cisato. Un teorema di G. Fichera permette infine di assicurare la completa equivalenza dell'ottenuto sistema di equazioni integrali col primitivo problema al contorno.

2. Dette f, g le componenti della forza di massa, σ e μ delle costanti elastiche, $u(x, y)$ e $v(x, y)$ soddisfino al sistema

$$(1) \qquad \begin{cases} \Delta_2 u + \sigma \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) = \frac{1}{\mu} f \\ \Delta_2 v + \sigma \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) = \frac{1}{\mu} g \end{cases}$$

in un dominio T normale all'asse x; precisamente un dominio le coordinate dei cui punti siano tali che $0 \leq x \leq 1$, $\alpha(x) \leq y \leq \beta(x)$ [α, β intendendosi assegnate in $(0, 1)$]; u e v inoltre assumano valori determinati su FT.

Le trasformate parziali di u e v

$$(2) \qquad u^*(x, q) = \int_\alpha^\beta e^{qy} u(x, y)\, dy \quad , \quad v^*(x, q) = \int_\alpha^\beta e^{qy} v(x, y)\, dy$$

soddisfano allora in $(0, 1)$ al sistema di equazioni ordinarie a coefficienti costanti

$$(3) \qquad \begin{cases} (1+\sigma)\frac{d^2 u^*}{dx^2} + q^2 u^* - \sigma q \frac{dv^*}{dx} = F(x, q) \\ \frac{d^2 v^*}{dx^2} + (1+\sigma) q^2 v^* - \sigma q \frac{du^*}{dx} = G(x, q) \end{cases}$$

ed assumono nei punti 0 ed 1 valori determinati. Si può ottenere quindi una espressione esplicita delle u^*, v^* dalla quale però esse appaiono, in contrasto alle (2), come funzioni meromorfe di q con infiniti poli del primo ordine nei punti del piano complesso soluzioni della

$$(4) \qquad \left(\frac{2+\sigma}{\sigma}\right)^2 \sin^2 q = q^2.$$

Imponendo che ivi si annullino i residui si ottengono appunto le equazioni integrali del tipo di Fischer–Riesz.

Indichiamo con q_n gli autovalori compresi nel primo quadrante del piano complesso, e con $U(x, q_n)$, $V(x, q_n)$ le relative autofunzioni del problema (3) omogeneo con i dati del contorno:

$$u^*(0, q) = u^*(1, q) = v^*(0, q) = v^*(1, q) = 0.$$

Le q_n $(n = 0, 1, 2, \cdots)$ non sono che le soluzioni (complesse per $n > 0$) della (4) e le equazioni integrali trovate si possono interpretare come formule di Green–Betti applicate ai seguenti sistemi di forze e di spostamenti:

1° forza di massa di componenti f, g; spostamento di componenti u, v;

2° forze di massa nulle; spostamenti di componenti $e^{\pm q_n y}\, U(x \pm q_n)$, $e^{\pm q_n y}\, V(x, \pm q_n)$.

3. L'equivalenza tra il sistema di equazioni integrali ed il primitivo problema differenziale al contorno è da intendersi in questo senso.

Le prime sono delle condizioni necessariamente verificate dalle soluzioni del sistema (1); e viceversa esprimono relazioni atte ad individuare gli sforzi superficiali incogniti sui tratti $y = \alpha(x)$, $y = \beta(x)$ di FT. Noti i quali, si possono ottenere gli spostamenti u, v in T a mezzo delle formule di Somigliana purché esse si scrivano, seguendo un idea di A. Ghizzetti, non facendo uso della matrice delle soluzioni fondamentali del sistema (1), ma di funzioni aventi le stesse singolarità ma che si annullino sui tratti di contorno $x = 0$, $x = 1$. È opportuno di far uso della matrice di Green $\| G_{ik} \|$ per la striscia $S : 0 \leqq x \leqq 1$.

Ci si è posti allora il problema della determinazione effettiva delle soluzioni del sistema (1) in S colle condizioni $u = v = 0$ per $x = 0, x = 1$. Facendo uso del metodo della trasformata di Fourier, si è potuto stabilire un teorema di esistenza per il problema così posto nell'ipotesi che f e g siano hölderiane e si comportino opportunamente all'infinito e contemporaneamente si è ottenuta l'espressione desiderata delle G_{ik}:

$$G_{11}(x, y; \xi, \eta) = \frac{(2+\sigma)^2}{(1+\sigma)\mu\sigma} 4\pi \left\{ -\frac{e^{-q_0|y-\eta|}}{2q_0} \frac{\cos q_0 + 1}{\frac{2+\sigma}{\sigma}\cos q_0 - 1} U(x, q_0)\, U(\xi, q_0) + \right.$$

$$\left. + \sum_1^\infty{}_n \mathcal{R} \left[\frac{e^{-q_n|y-\eta|}}{q_n} \frac{\cos q_n + (-1)^n}{\frac{2+\sigma}{\sigma}\cos q_n - (-1)^n} U(x, q_n)\, U(\xi, q_n) \right] \right\},$$

$$G_{12}(x, y; \xi, \eta) = \frac{(2+\sigma)^2}{(1+\sigma)\mu\sigma} 4\pi \left\{ -\frac{e^{-q_0|y-\eta|}}{2q_0} \frac{\cos q_0 + 1}{\frac{2+\sigma}{\sigma}\cos q_0 - 1} U(x, q_0)\, V(\xi, q_0) + \right.$$

$$\left. + \sum_1^\infty{}_n \mathcal{R} \left[\frac{e^{-q_n|y-\eta|}}{q_n} \frac{\cos q_n + (-1)^n}{\frac{2+\sigma}{\sigma}\cos q_n - (-1)^n} U(x, q_n)\, V(\xi, q_n) \right] \right\}$$

ed analoghe per G_{21}, G_{22} ottenute collo scambio in G_{12}, G_{11} di $U(x, q_n)$ con $V(x, q_n)$; gli sviluppi in serie essendo convergenti uniformemente per $|y - \eta| > \varepsilon > 0$.

I risultati qui annunciati saranno compiutamente giustificati in una più ampia Memoria di prossima pubblicazione.

Geometria. — *Sull'isometria di calotte appartenenti a due varietà.* Nota di GIUSEPPE VACCARO, presentata (*) dal Socio E. BOMPIANI.

La nozione di isometria si trasforma radicalmente quando invece di riferirsi a superficie, ci si riferisca a calotte superficiali (1), cioè a intorni di ordine finito di due punti su due superficie.

Date due calotte σ_n, $\bar{\sigma}_n$ di ordine n, esse si diranno isometriche di ordine k intorno ai loro centri, secondo Bompiani, se è possibile stabilire fra esse una corrispondenza puntuale (regolare) tale che gli sviluppi delle prime forme fondamentali ds^2, $d\bar{s}^2$, calcolati nei centri delle calotte, coincidano fino ai termini di ordine $k-1$ inclusi.

La non equivalenza fra l'isometria di calotte nel senso ora detto, e la isometria di superficie nel senso classico, appare evidente quando si pensi che secondo la accezione classica, condizione necessaria perché due superficie siano isometriche è che esse abbiano la stessa curvatura gaussiana in punti corrispondenti, mentre come ha mostrato il Bompiani (loc. cit.) due calotte del 2° ordine sono sempre isometriche (e in infiniti modi).

Il Bompiani ha condotto lo studio della isometria di calotte superficiali fino al 4° ordine. Tale studio è stato quindi ripreso dal Dalla Volta che ha determinato le condizioni necessarie e sufficienti perché due calotte superficiali siano isometriche fino ad un ordine qualunque (2).

Nella presente Nota mi occupo della isometria di due calotte appartenenti a due varietà V_m, $\bar{V}_m$ ad m dimensioni immerse in un iperspazio S_{m+n} ad $m+n$ dimensioni, e determino la condizione perché due tali calotte siano isometriche fino al 3° ordine.

1. Siano date due calotte appartenenti a due varietà V_m, $\bar{V}_m$ immerse in un S_{m+n} euclideo e si pongano a contatto nei loro centri O, $\bar{O}$.

Per semplicità di calcolo dividiamo le coordinate di un generico punto dello S_{m+n} in due gruppi x^i, z^α, con $i = 1, 2, \cdots, m$; $\alpha = 1, 2, \cdots, n$.

Assumendo allora $O = \bar{O}$ come origine del sistema di coordinate e lo S_m $z^\alpha = 0$ come S_m tangente comune alle due calotte in $O = \bar{O}$ (cosa che non restringe la generalità del problema), le due calotte si possono rappresentare analiticamente nel seguente modo:

$$(1.1) \qquad \begin{cases} x^i = u^i \\ z^\alpha = \frac{1}{2}\varphi_2^\alpha(u) + \frac{1}{3!}\varphi_3^\alpha(u) + \cdots \end{cases}$$

(*) Nella seduta del 14 febbraio 1953.

(1) Cfr. E. BOMPIANI, *Isometria di calotte superficiali*. « Rend. di Matem. e delle sue applicazioni » fasc. I II 1948); E. CARTAN, *Leçons sur la géométrie des Espaces de Riemann* (Gauthier-Villars, Paris), 1ª ed. 1928, ch. IV; 2ª ed. 1946, ch. IV.

(2) Cfr. V. DALLA VOLTA, *Sull'isometria di calotte superficiali*. « Rend. di Mat. e delle sue applicazioni », ser. V, vol. 8, fasc. 1–2 (1949).

$$(1.2)\qquad \begin{cases} \bar{x}^i = \bar{u}^i \\ \bar{z}^\alpha = \frac{1}{2}\,\bar{\varphi}_2^\alpha(\bar{u}) + \frac{1}{3!}\,\bar{\varphi}_3^\alpha(\bar{u}) + \cdots \end{cases}$$

ove

$$(1.3)\qquad \begin{cases} \varphi_2^\alpha(u) = a_{hk}^\alpha\, u^h\, u^k \\ \bar{\varphi}_2^\alpha(\bar{u}) = \bar{a}_{hk}^\alpha\, \bar{u}^h\, \bar{u}^k \end{cases}$$

con $h, k = 1, 2, \cdots, m$.

Sia data ora fra le due calotte (1.1), (1.2) una corrispondenza

$$(1.4)\qquad \bar{u}^i = u^i + \frac{1}{2}\,\theta_2^i(u) + \cdots$$

ove

$$(1.5)\qquad \theta_2^i(u) = c_{pq}^i\, u^p\, u^q .$$

con $i, p, q = 1, 2, \cdots, m$.

Per la (1.4), la (1.2) diventa:

$$\bar{x}^i = u^i + \frac{1}{2}\,\theta_2^i(u) + \cdots$$

$$\bar{z}^\alpha = \frac{1}{2}\,\bar{\varphi}_2^\alpha(\bar{u}) + \cdots$$

Per questa calotta si ha:

$$d\bar{s}^2 = \sum (d\bar{x}^i)^2 + \sum (d\bar{z}^\alpha)^2 = \sum (d\bar{x}^i)^2 + [2]_u$$

ove con $[2]_u$ si sono indicati termini di 2° grado in u.

Ma è:

$$d\bar{x}^i = d\bar{u}^i = du^i + \frac{1}{2}\,\partial_j\,\theta_2^i(u)\,du^j \qquad \left(\partial_j = \frac{\partial}{\partial u^j}\right)$$

quindi per la (1.5):

$$ds^2 = \sum (d\bar{x}^i)^2 = \sum (du^i)^2 + \partial_j\,\theta_2^i(u)\,du^i\,du^j = \sum (du^i)^2 + 2\sum_i c_{pq}^i\, u^p\, du^q\, du^i,$$

dove si sono trascurati i termini i cui coefficienti in u^i sono di grado ≥ 2.

Per la calotta (1.1) con la stessa approssimazione si ha:

$$ds^2 = \sum (du^i)^2 + [2]_u$$

ed allora

$$(1.6)\qquad d\bar{s}^2 - ds^2 = 2\sum_i c_{pq}^i\, u^p\, du^q\, du^i .$$

Affinchè la differenza $d\bar{s}^2 - ds^2$ abbia uno sviluppo i cui termini siano di 2° grado almeno nelle u^i, dalla (1.6) si vede che deve essere (scrivendo l al posto di i):

$$\sum_l c_{pq}^l\, u^p\, du^q\, du^l = 0$$

e ciò qualunque siano le du^i.

Ma per $q = l$, il coefficiente di $(du^l)^2$ e $c^{|l|}_{pl}\, u^p$ (dove il simbolo $|l|$ indica che l'indice l rimane fisso), quindi si avrà

$$c^{|l|}_{pl}\, u^p = 0. \tag{1.7}$$

Per $q \neq l$ il coefficiente di $du^q\, du^l$ è $(c^l_{pq} + c^q_{pl})\, u^p$, e pertanto deve essere:

$$(c^l_{pq} + c^q_{pl})\, u^p = 0. \tag{1.8}$$

Se le (1.7) e (1.8) debbono essere soddisfatte con le u^p arbitrarie, deve quindi essere:

$$c^{|l|}_{pq} = 0 \quad ; \quad c^l_{pq} + c^q_{pl} = 0$$

cioè

$$c^l_{pq} = -c^q_{pl} = -c^q_{lp} = c^p_{lq} = c^p_{ql} = -c^l_{qp} = -c^l_{pq} = 0.$$

La corrispondenza (1.4) diventa allora del tipo:

$$\bar{u}^i = u^i + \frac{1}{3!}\,\theta^i_3(u) + \cdots \tag{1.9}$$

ove

$$\theta^i_3(u) = c^i_{hkl}\, u^h\, u^k\, u^l. \tag{1.10}$$

Si ha pertanto:

Poste due calotte appartenenti a due varietà V_m, $\bar{V}_m$ *a contatto in* O, *è sempre possibile, ed in infiniti modi, con una qualsiasi corrispondenza del tipo* (1.9), *porre una isometria tra le due calotte non soltanto in* O, *ma anche nei punti dell'intorno del* 1° *ordine di* O.

2. A causa delle (1.9), le (1.2) divengono:

$$\bar{x}^i = u^i + \frac{1}{3!}\,\theta^i_3(u) + \cdots$$

$$z^\alpha = \frac{1}{2}\,\varphi^\alpha_2(u) + \cdots$$

Da queste si ha:

$$d\bar{x}^i = du^i + \frac{1}{3!}\,\partial_j\,\theta^i_2(u)\, du^j + \cdots$$

$$d\bar{z}^\alpha = \frac{1}{2}\,\partial_j\,\bar{\varphi}^\alpha_2(\bar{u})\, d\bar{u}^j + \cdots$$

e quindi:

$$d\bar{s}^2 = \sum (d\bar{x}^i)^2 + \sum (d\bar{z}^\alpha)^2 = \sum (du^i)^2 + \tag{2.1}$$

$$+ \frac{1}{3}\sum_i \partial_j\,\theta^i_3(u)\, du^j\, du^i + \frac{1}{4}\sum_\alpha \partial_j\,\bar{\varphi}^\alpha_2\,\partial_l\,\bar{\varphi}^\alpha_2\, du^j\, du^l + \cdots$$

avendo trascurato i termini i cui coefficienti nelle u^i sono di grado ≥ 3.

Per la calotta (1.1) con la stessa approssimazione si ha:

$$ds^2 = \sum (du^i)^2 + \frac{1}{4}\sum_\alpha \partial_j\,\varphi^\alpha_2\,\partial_l\,\varphi^\alpha_2\, du^j\, du^l \tag{2.2}$$

e quindi:

$$d\bar{s}^2 - ds^2 = \frac{1}{3}\sum_i \partial_j\, \theta_3^i(u)\, du^j du^i + \frac{1}{4}\sum_\alpha \partial_j\, \varphi_2^\alpha\, \partial_l\, \bar{\varphi}_2^\alpha\, du^j du^l -$$

$$- \frac{1}{4}\sum_\alpha \partial_j\, \varphi_2^\alpha\, \partial_l\, \varphi_2^\alpha\, du^j du^l$$

o più esplicitamente a causa delle (1.3) e (1.10), scrivendo l al posto di i:

$$d\bar{s}^2 - ds^2 = \sum_l c^l_{hkj}\, u^h u^k du^j du^l + \sum_\alpha \bar{a}^\alpha_{hj}\, \bar{a}^\alpha_{kl}\, u^h u^k du^j du^l - \sum_\alpha a^\alpha_{hj}\, a^\alpha_{kl}\, u^h u^k du^j du^l.$$

Affinché la differenza $d\bar{s}^2 - ds^2$ abbia uno sviluppo i cui termini siano di 3° grado almeno nelle u^i, dalla precedente si vede che deve essere

$$\sum_l c^l_{hkj}\, u^h u^k du^j du^l = \sum_\alpha a^\alpha_{hj}\, a^\alpha_{kl}\, u^h u^k du^j du^l - \sum_\alpha \bar{a}^\alpha_{hj}\, \bar{a}^\alpha_{kl}\, u^h u^k du^j du^l$$

e ciò qualunque siano le du^i e le u^i.

In base alla precedente si ha:

$$c^l_{hkj} + c^j_{hkl} = \sum_\alpha (a^\alpha_{hj} a^\alpha_{kl} + a^\alpha_{kj} a^\alpha_{hl}) - \sum_\alpha (\bar{a}^\alpha_{hj} \bar{a}^\alpha_{kl} + \bar{a}^\alpha_{kj} \bar{a}^\alpha_{hl}). \tag{2.3}$$

Indicando con $M_{hk,jl}$ l'espressione a 2° membro della precedente, si ha

$$c^l_{hkj} + c^j_{hkl} = M_{hk,jl} = M_{kh,jl} = M_{hk,lj} = M_{kh,lj} = M_{jl,hk} \tag{2.4}$$

e quindi

$$c^j_{hkl} = c^j_{klh} = -c^k_{klj} + M_{hl,kj} = -c^k_{hjl} + M_{hl,kj} = c^l_{hjk} + M_{hl,kj} - M_{hj,lk}$$

e quindi la (2.3) diviene:

$$2\, c^l_{hjk} = M_{hk,jl} - M_{hl,kj} + M_{hj,lk} \tag{2.5}$$

e scambiando j con h:

$$2\, c^l_{jhl} = M_{jk,hl} - M_{jl,hk} + M_{hj,lk}. \tag{2.6}$$

Infine sottraendo dalla (2.5) la (2.6) risulta

$$M_{hk,jl} = M_{hl,kj} \tag{2.7}$$

cioè, più esplicitamente, per la (2.3) dopo aver fatto le opportune riduzioni

$$\sum_\alpha (a^\alpha_{kj} a^\alpha_{hl} - a^\alpha_{lj} a^\alpha_{kh}) = \sum_\alpha (\bar{a}^\alpha_{kj} \bar{a}^\alpha_{hl} - \bar{a}^\alpha_{lj} \bar{a}^\alpha_{kh}). \tag{2.8}$$

La precedente esprime l'uguaglianza delle curvature delle due calotte. Si ha pertanto il risultato:

Condizione necessaria e sufficiente perché si possa porre una isometria del 3° ordine tra due calotte appartenenti a due varietà V_m, $\bar{V}_m$ *di un* S_{m+n} *è che le curvature delle due calotte calcolate nei rispettivi centri siano uguali.*

Geometria. — *Sulle varietà di* S_r *composte di* $\infty^1 S_k$, *i cui* S_k *appartengono al massimo numero di complessi lineari.* Nota di DIONISIO GALLARATI, presentata (*) dal Corrisp. B. SEGRE.

1. In una Nota recente, estendendo alcuni risultati dovuti al prof. B. Segre (1), ho caratterizzato le superficie rigate razionali normali ed i coni appartenenti ad uno spazio lineare S_r, come rigate dello spazio S_r che appartengano al massimo numero possibile di complessi lineari di rette, tra loro linearmente indipendenti (2).

In modo del tutto analogo, è possibile caratterizzare le varietà razionali normali composte di ∞^1 spazi lineari (3). Ciò faccio qui, dimostrando che *un sistema continuo* ∞^1 *di spazi* S_k *dello spazio* S_r *(non contenuto in uno spazio di dimensione inferiore ad* r*) non può appartenere a più di*

$$\theta(r, k) = \binom{r+1}{k+1} - r + k - 1$$

complessi lineari linearmente indipendenti di S_k *di* S_r; e che inoltre *una varietà* $(k+1)$*-dimensionale* V_{k+1}, *composta di una serie continua* ∞^1 *di spazi* S_k *dello spazio* S_r *(non appartenente ad uno spazio di dimensione inferiore ad* r*) che sia contenuta in* $\theta(r, k)$ *complessi lineari linearmente indipendenti di* S_k *di* S_r, *è necessariamente una* $S_k - V^r_{k-1}$ *razionale normale, oppure si compone di* $\infty^1 S_k$ *passanti per uno stesso* S_{k-1}.

Da ultimo dimostro che *gli* S_k *osculatori di una curva algebrica irriducibile appartenente ad* S_r *non possono essere contenuti in più di*

$$\lambda(r, k) = \binom{r-1}{k-1} - (k+1)(r-k-1)$$

complessi lineari indipendenti di S_k *di* S_r, e provo che *una curva algebrica irriducibile di* S_r, *con* $r \geq 4$, *i cui* S_k *osculatori siano contenuti in* $\lambda(r, k)$ *complessi lineari linearmente indipendenti di* S_k *di* S_r, *è necessariamente una* C^r *razionale normale.*

(*) Nella seduta del 14 marzo 1953.

(1) B. SEGRE, *Sulle curve algebriche le cui tangenti appartengono al massimo numero di complessi lineari indipendenti*, « Mem. Acc. Naz. dei Lincei », vol. VII, fasc. XIX, pagine 577–592 (1928).

(2) D. GALLARATI, *Sul massimo numero di complessi algebrici di rette, di ordine assegnato, che contengono una data rigata algebrica*, « Rend. Acc. Naz. dei Lincei », vol. XIV, fasc. 2, pp. 213–220 (1953).

(3) Per uno studio di tali varietà, cfr. A. BELLATALLA, *Sulle varietà razionali normali composte di* ∞^1 *spazi lineari*, « R. Acc. delle Scienze di Torino », vol. XXXVI, 28 febbraio 1901.

2. Indicherò con W la grassmanniana degli S_k di S_r e con $R = \binom{r+1}{k+1} - 1$ la dimensione dello spazio cui essa appartiene [4]; inoltre i complessi lineari di S_k di S_r verranno designati con $\Omega(r, k)$.

Sia V_{k-1} una varietà algebrica dello spazio S_r composta di $\infty^{n-1} S_k$ e sia V^* la curva immagine di V_{k-1} su W: detti n e p l'ordine ed il genere di V_{k-1} e di V^*, ed α il massimo numero di $\Omega(r, k)$ linearmente indipendenti contenenti V_{k-1}, se i è l'indice di specialità della $g_n^{R-\alpha}$ segata su V^* dagli S_{R-1} di S_R, risulta

$$R - \alpha \leq n - p - i$$

e quindi

$$\alpha \geq \binom{r+1}{k+1} - n + p - i - 1. \tag{1}$$

D'altra parte, esiste certo in S_r qualche S_{r-k-1} che, senza incontrare tutti gli S_k di V_{k-1}, si appoggi ad $r-k$ di essi, presi genericamente; e quindi per $r-k$ punti generici di V^* passa certamente qualche gruppo della $g_n^{R-\alpha}$; allora: $R - \alpha \geq r - k$, ossia

$$\alpha \leq \theta(r, k);$$

poiché poi, per $n = r - k$ e quindi $p = i = 0$, il secondo membro della (1) diviene $\theta(r, k)$, si conclude intanto che *le* S_k *di* V_{k-1}^r *di* S_r *appartengono al massimo numero possibile di* $\Omega(r, k)$ *linearmente indipendenti.*

Di tale proprietà gode pure una serie ∞^1 *di* S_k *che passino per uno stesso* S_{k-1}. Invero, l'immagine su W di tale serie di S_k giace in un S_{r-k} appartenente a W, ed è quindi contenuta negli $\infty^{\theta(r,k)-1} S_{R-1}$ di S_R che passano per quell'S_{r-k}.

3. Siano $x_0, x_1, \cdots, x_r$ coordinate proiettive omogenee di punto in S_r, $A_0, A_1, \cdots, A_r$ il relativo $(r-1)$-edro di riferimento, e V_{k-1} una serie ∞^1 di S_k di S_r rappresentata dalle equazioni

$$a_i^j(u)\, x_j = 0 \qquad (i = 1, 2, \cdots, r-k),$$

ove $a_i^j(u)$ denotano funzioni di u, di classe $\mathfrak{C}^\infty$ in un intorno $\mathfrak{A}$ di $u = 0$, e tali che la matrice ad $r-k$ righe ed r colonne $\| a_i^j(u) \|$ abbia rango $r-k$ in $\mathfrak{A}$.

Le coordinate grassmanniane $p^{i_0 i_1 \cdots i_k}$ del generico S_k di V_{k-1} sono proporzionali ai minori d'ordine $r-k$ estratti da tale matrice e, se V_{k-1} appartiene ad $N\,\Omega(r, k)$ linearmente indipendenti, esse soddisfano ad un sistema del tipo

$$\omega_{i_0 i_1 \cdots i_k}^{(\xi)} p^{i_0 i_1 \cdots i_k} = 0 \qquad (\xi = 1, 2, \cdots, N) \tag{2}$$

ove $\| \omega_{i_0 i_1 \cdots i_k}^{(\xi)} \|$ è una matrice di rango N ad N righe ed $R+1$ colonne.

4 Per le proprietà fondamentali della W, cfr. F. SEVERI, *Sulla varietà che rappresenta gli spazi subordinati di data dimensione immersi in uno spazio lineare*. Ann. di Mat., Vol. 24, pp. 89-120 (1915).

È facile dimostrare che, *segando* V_{k+1} *con un* S_{r-1} *generico, si ottiene ivi una* V'_k *composta di una serie* ∞^1 *di* S_{k-1} *appartenente ad almeno*

$$N - \binom{r}{k+1}$$

$\Omega(r-1, k-1)$ *linearmente indipendenti.* Invero, se si suppone che l'iperpiano segante abbia equazione $x_0 = 0$, per ottenere le relazioni lineari che vincolano le coordinate grassmanniane del generico S_{k-1} di V'_k basta eliminare dalle (2) le variabili $p^{0 i_1 i_2 \cdots i_k}$; esse sono appunto in numero di $\binom{r}{r-k-1} = \binom{r}{k+1}$

In particolare, se V_{k+1} appartiene a $\theta(r, k)\,\Omega(r, k)$ linearmente indipendenti, V'_k appartiene ad almeno

$$\theta(r, k) - \binom{r}{k+1} = \binom{r+1}{k+1} - \binom{r}{k+1} - r + k - 1 = \binom{r}{k} -$$

$$- (r-1) + (k-1) - 1 = \theta(r-1, k-1)$$

$\Omega(r-1, k-1)$ linearmente indipendenti; pertanto la sezione di V_{k+1} con un generico S_{r-k+1} è una superficie rigata $\mathfrak{F}$ appartenente a

$$\theta(r-k+1, 1) = \binom{r-k+2}{2} - (r-k+2) = \binom{r-k+1}{2}$$

complessi lineari linearmente indipendenti di rette di $S_{r\ k+1}$, e quindi [5] una rigata razionale normale oppure un cono: ma allora V_{k+1} *è una* $S_k - V^r_{k+1}$, *oppure si compone di* ∞^1 S_k *passanti per uno stesso* S_{k-1}.

4. La totalità Σ degli S_k osculatori di una curva algebrica irriducibile Γ di S_r ha come immagine su W una curva Γ^* il cui ordine ν è uguale al k-mo rango di Γ; detti allora p il genere di Γ e di Γ^*, β il massimo numero di $\Omega(r, k)$ linearmente indipendente che contengano Σ, ed i l'indice di specialità della $g^{R-\beta}_{\nu}$ segata su Γ^* dagli iperpiani di S_R, si ha

$$R - \beta \leq \nu - p + i$$

e quindi

$$\beta \geq R - \nu + p - i. \tag{3}$$

D'altra parte, $(r-k)(k+1)$ S_k presi genericamente in Σ appartengono sempre a qualche $\Omega(r, k)$ non contenente Σ, e quindi

$$R - \beta \geq (r-k)(k+1),$$

ossia

$$\beta \leq \lambda(r, k). \tag{4}$$

(5) D. GALLARATI, loc. cit., n. 7.

Qualora Γ sia una curva razionale normale (e quindi $p = i = 0$) risulta [6] $\nu = (r - k)(k + 1)$ e le (3) (4) mostrano allora che essa appartiene esattamente a $\lambda(r, k)\,\Omega(r, k)$ linearmente indipendenti.

Per invertire quest'ultima proposizione, premettiamo il seguente

LEMMA. – *Se gli* S_k *osculatori di una curva* Γ *di* S_r *appartengono ad* $N\,\Omega(r, k)$ *linearmente indipendenti, gli* S_k *osculatori di una generica proiezione* Γ' *di* Γ *da un punto di* S_r *su un* S_{r-1} *appartengono ad almeno* $N - \binom{r}{k}\Omega(r-1, k)$ *linearmente indipendenti. Se poi il centro di proiezione è un punto generico di* Γ, *il numero degli* $\Omega(r-1, k)$ *linearmente indipendenti in cui sono contenuti gli* S_k *osculatori di* Γ' *è almeno* $N - \binom{r}{k} + k + 1$.

Siano invero

$$\rho x_i = a^i(u) \qquad (i = 0, 1, \cdots, r) \tag{5}$$

le equazioni parametriche di Γ, ove $a^i(u)$ denotano funzioni di u di classe differenziale $\mathcal{C}^{2k}$ in un intorno di $u=0$. Le coordinate grassmanniane $p^{i_0 i_1 \cdots i_k}$ del generico S_k osculatore di Γ sono proporzionali ai minori di ordine $k+1$ estratti dalla matrice

$$\left\| \frac{d^j a^i}{du^j} \right\|_{(j = 0, 1, \cdots, k \;;\; i = 0, 1, \cdots, r)}$$

(ove si è posto $\frac{d^0 a^i}{du^0} = a^i$), e per ipotesi soddisfano ad un sistema di equazioni lineari del tipo

$$\omega^{(\xi)}_{i_0 i_1 \cdots i_k}\, p^{i_0 i_1 \cdots i_k} = 0 \qquad (\xi = 1, 2, \cdots, N) \tag{6}$$

con $\| \omega^{(\xi)}_{i_0 i_1 \cdots i_k} \|$ matrice di rango N ad N righe ed $R + 1$ colonne.

Eliminando dalle (6) le $\binom{r}{k}$ variabili $p^{0 i_1 \cdots i_k}$ $(i_1 i_2 \cdots i_k \neq 0)$ si ottengono almeno $N - \binom{r}{k}$ relazioni lineari indipendenti tra le sole $p^{i_0 i_1 \cdots i_k}$ con $i_0 i_1 \cdots i_k \neq 0$. E ciò prova che la proiezione Γ' di Γ dal punto A_0 sullo $S_{r-1} \equiv A_1 \cdots A_r$ soddisfa alla prima parte del lemma.

Supponiamo ora che A_0 sia un punto generico di Γ e che tale punto si ottenga dalle (5) per $u = 0$; è subito visto che le $p^{i_0 i_1 \cdots i_k}(u)$ per cui $i_0 i_1 \cdots i_k \neq 0$ si annullano tutte, per $u = 0$, insieme alle loro derivate fino all'ordine k incluso. Pertanto, ponendo $u = 0$ nelle identità:

$$\omega^{(\xi)}_{i_0 i_1 \cdots i_k} \frac{d^j p^{i_0 i_1 \cdots i_k}}{du^j} = 0 \qquad (\xi = 1, \cdots, N \;;\; j = 0, \cdots, k)$$

$\left(\text{ove } \frac{d^0 p^{i_0 i_1 \cdots i_k}}{du^0} = p^{i_0 i_1 \cdots i_k}\right)$, si ottiene che sussistono le relazioni

$$\omega^{(\xi)}_{i_1 \cdots i_k} \left(\frac{d^j p^{i_1 \cdots i_k}}{du^j} \right)_{u=0} = 0;$$

6) Cfr. ad esempio C. SEGRE, *Mehrdimensionale Räume*. – Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften », III, C 7, n. 27.

ma ciò implica che la matrice $\| \omega^{(\xi)}_{o i_1 \cdots i_k} |$ abbia rango $\rho \leq \binom{r}{k} - (k+1)$: se invero esistessero $k+1$ costanti c_j tali che

$$c_j \left(\frac{d^j p^{o i_1 \cdots i_k}}{du^j} \right)_{u=o} = 0$$

(con $i_1 \cdots i_k \neq 0$), ossia addirittura

$$c_j \left(\frac{d^j p^{i_o i_1 \cdots i_k}}{du^j} \right)_{u=o} = 0$$

(per ogni combinazione $i_o i_1 \cdots i_k$), poiché A_o è un punto generico di Γ le $p^{i_o i_1 \cdots i_k}(u)$ sarebbero integrali di una medesima equazione differenziale lineare omogenea d'ordine k, quindi Γ^* apparterrebbe ad uno spazio di dimensione $\leq k$ e gli S_k osculatori di Γ sarebbero contenuti in almeno $R - k > \lambda(r, k)\ \Omega(r, k)$ linearmente indipendenti; ma si è visto che ciò è impossibile se Γ non appartiene ad uno spazio di dimensione inferiore ad r.

Segue allora che l'eliminazione delle variabili $p^{o i_1 \cdots i_r}$ (con $i_1 \cdots i_r \neq 0$) dalle (6) conduce, nelle ipotesi presenti, ad almeno $N - \binom{r}{k} + k + 1$ relazioni lineari indipendenti tra le rimanenti variabili; e con ciò il lemma è completamente dimostrato.

In particolare notiamo che, se $N = \lambda(r, k)$ risulta

$$N - \binom{r}{k} + k + 1 = \lambda(r - 1, k).$$

È ormai facile provare che le *sole curve algebriche di* S_r *i cui* S_k *osculatori appartengano a* $\lambda(r, k)\ \Omega(r, k)$ *linearmente indipendenti sono, per* $r \geq 4$, *le curve razionali normali.*

La cosa è vera per $k = 1$ [7] e quindi, dualmente, anche per $k = r - 2$. D'altra parte, se si proietta una curva algebrica irriducibile Γ, appartenente allo spazio S_r, da un generico S_{r-k-3} $(r - k - 2)$-segante Γ su un S_{k+2}, si ottiene ivi una curva algebrica irriducibile Γ' che, per il lemma, appartiene a $\lambda(k+2, k)\ \Omega(k+2, k)$ linearmente indipendenti, ossia una curva razionale normale: e ciò prova l'asserto.

5. Da ultimo, rileviamo le seguenti proprietà della grassmanniana W degli S_k di S_r, che si deducono immediatamente dalle cose dette nei nn. 2-3:

Se W contiene una curva appartenente ad un S_h, quest'ultimo deve stare su W non appena si sappia che è $h \leq r - k - 1$, o che – essendo $h = r - k$ – l'ordine della curva sia maggiore di $r - k$.

(7) B. SEGRE, loc. cit.

Meccanica. — *Limitazioni per il raggio di girazione baricentrale delle figure piane a contorno convesso.* Nota di PIERO GIORGIO BORDONI, presentata (*) dal Socio A. SIGNORINI.

1. PREMESSA. – L'uso delle traslazioni generalizzate consente di ridurre la generica figura piana omogenea $\mathfrak{S}^*$ limitata da un contorno convesso γ^*, ad un particolare quadrilatero mistilineo convesso, avente, come si è mostrato in un precedente lavoro (1), lo stesso raggio di girazione, rispetto ad ogni retta parallela al vettore della traslazione. Questa ed altre proprietà delle traslazioni generalizzate permettono di dimostrare che il rapporto tra il raggio di girazione ρ relativo all'asse baricentrale τ e la distanza d tra le rette τ_1 e τ_2, parallele a τ, e tangenti a γ^*, ha un estremo inferiore ρ_1/d, ed un estremo superiore ρ_2/d che risultano rispettivamente funzione crescente e decrescente della distanza s di τ dalla parallela che dimezza la striscia limitata da τ_1 e da τ_2.

Nella presente Nota si calcolano gli effettivi valori degli estremi ρ_1/d e ρ_2/d, riconoscendo che si tratta proprio di un minimo e di un massimo per ρ/d. Nel caso di una figura simmetrica rispetto a τ per la quale, come si era previsto, la limitazione riesce meno soddisfacente, si dànno inoltre dei criteri per stabilire limitazioni più restrittive, mediante la conoscenza dell'area di $\mathfrak{S}^*$, o della distanza da τ del baricentro di una delle due parti in cui tale retta divide $\mathfrak{S}^*$.

2. LIMITE SUPERIORE PER ρ. – Ci si riferisce sistematicamente nel seguito ad un quadrilatero mistilineo $\mathfrak{S}$ del tipo di $A_1 A_2 C B_2 B_1$ della fig. 1 *a*, in quanto, come si è dimostrato nel lavoro precedentemente citato, le limitazioni relative a ρ che è possibile stabilire per una figura di questo tipo, valgono anche per la generica figura convessa $\mathfrak{S}^*$. Siano A_3 e B_3 le intersezioni con τ_1 e τ_2 della tangente [o di una delle tangenti] a γ nella sua intersezione C con l'asse baricentrale τ. Per la convessità di $\mathfrak{S}$, A_3 e B_3 non possono essere interni ai segmenti $A_1 A_2$ e $B_1 B_2$, e debbono giacere dalla stessa banda di $\mathfrak{S}$ rispetto ad $A_1 B_1$.

Siano d_1 e d_2 le distanze di τ_1 e τ_2 da τ ($d_1 \leq d_2$); se si considera la porzione $\mathfrak{S}_1$ di $\mathfrak{S}$ compresa tra τ_1 e τ, si può osservare (2) che certo esiste su $A_2 A_3$ un punto A_4 tale che il trapezio $DA_1 A_4 C$ abbia lo stesso momento statico di $\mathfrak{S}_1$ rispetto a τ. L'area di questo trapezio, come è noto, non

(*) Nella seduta del 14 febbraio 1953.

(1) P. G. BORDONI, *Su certe proprietà generali del raggio di girazione delle figure convesse*. (In corso di pubblicazione).

(2) Si veda in proposito: A. SIGNORINI, *Una proprietà di ubicazione dell'ellisse centrale*. « Rend. Acc. Naz. dei Lincei », *23*, p. 334 (1914). oppure dello stesso autore *Meccanica razionale con elementi di statica grafica*. Perrella Ed. Roma. 2ª ediz., p. 306 (1915).

supera [3] quella di $\mathfrak{S}_1$, mentre il suo momento di inerzia rispetto a τ non è inferiore al corrispondente momento di $\mathfrak{S}_1$. Gli stessi risultati valgono ovviamente anche per $\mathfrak{S}_2$, e in definitiva il raggio di girazione della figura convessa costituita dall'insieme dei due trapezi risulta non maggiore di quello relativo a $\mathfrak{S}$.

Nella stessa maniera si può osservare che per ogni punto C_1 interno a DC (fig. 1 *b*) ed abbastanza prossimo a C, esistono in generale due punti A_5 e B_5 appartenenti ai segmenti $A_3 A_4$ e $B_3 B_4$ tali che i trapezi $DA_1 A_5 C_1$ e $DB_1 B_5 C_1$ abbiano rispetto a τ, lo stesso momento statico di quelli considerati precedentemente. Sempre allo stesso modo si dimostra inoltre che la sostituzione della spezzata $A_1 A_5 C_1 B_5 B_1$ alla $A_1 A_4 C B_4 C_1$ non diminuisce il raggio

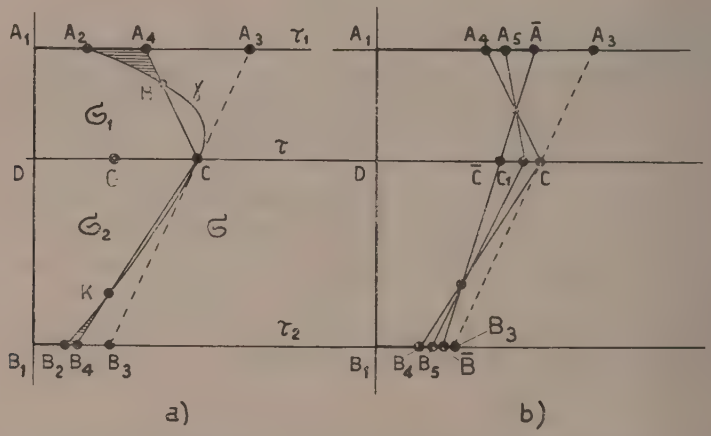


Fig. 1. – Sostituzione di un quadrilatero mistilineo convesso.
a) con l'insieme di due trapezi aventi raggio di girazione non inferiore; *b*) con un unico trapezio avente la stessa proprietà.

di girazione baricentrale. Il massimo valore che quest'ultimo può assumere, compatibilmente con la condizione di convessità del contorno, corrisponde al caso in cui i vertici $\bar{A}$ e $\bar{B}$ su τ_1 e τ_2, siano allineati con C su τ; l'insieme dei due trapezi degenera allora in un unico trapezio il cui raggio di girazione rispetto all'asse baricentrale τ costituisce il limite superiore per tutte le figure convesse $\mathfrak{S}^*$ comprese tra le tangenti τ_1 e τ_2 ed aventi il baricentro su τ.

Un semplice calcolo fornisce quindi per ρ la limitazione superiore:

$$(1) \qquad \rho^2 \leq \frac{4\, d_1\, d_2 - d_2^2 - d_1^2}{6} = \frac{d^2}{12} - s^2 .$$

(3) Siano infatti rispettivamente Δ' e Δ'' le aree del triangolo mistilineo $A_2 A_4 H$ e del segmento di $\mathfrak{S}_1$ la cui corda è HC, e sia h la distanza di H da τ. La sostituzione del trapezio $DA_1 A_4 C$ a $\mathfrak{S}_1$ aggiunge un momento statico $\geq \Delta' \cdot h$ e ne toglie uno $\leq \Delta'' \cdot h$; la eguaglianza dei momenti impone quindi che sia $\Delta' = \Delta''$. In maniera analoga si vede che il momento di inerzia non è diminuito dalla sostituzione.

In accordo con la proprietà precedentemente dimostrata [4] la limitazione risulta funzione *decrescente* di s. Per ogni valore di s il segno di uguaglianza nella (1) si ha quando la $\mathfrak{S}^*$ coincide con un trapezio avente le basi su τ_1 e τ_2; siccome tale trapezio è anch'esso una figura convessa, l'estremo superiore dei valori che ρ/d può assumere al variare di γ^* è un effettivo massimo.

3. LIMITE INFERIORE PER ρ. – Per la convessità del contorno, il punto C_0 tale che il triangolo DC_0B_1 abbia lo stesso momento statico di $\mathfrak{S}_2$ rispetto a τ non può essere interno al segmento DC (fig. 2). Essendo inoltre $d_1 \leq d_2$ il triangolo DC_0A_2 (non indicato in figura) ha un momento statico rispetto a τ non superiore a quello di DC_0B_1 e quindi a quello di $\mathfrak{S}_1$. Esiste pertanto un punto H, interno all'arco di γ compreso tra τ_1 e τ, tale che i prolungamenti di A_1H e di B_1C_0 delimitino, insieme agli assi, un quadrilatero DC_0FA_1, avente lo stesso momento di $\mathfrak{S}_1$ rispetto a τ. Quest'ultimo è quindi asse baricentrale anche per il triangolo A_1FB_1, la cui sostituzione a $\mathfrak{S}$ non aumenta, per una osservazione precedente, né il momento di inerzia né il raggio di girazione.

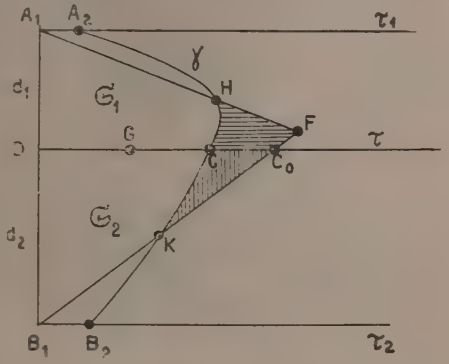


Fig. 2. – Sostituzione di un quadrilatero mistilineo convesso con un triangolo avente raggio di girazione non superiore.

Per ogni s, il valore di ρ relativo ad un triangolo avente il baricentro su τ, un lato normale ad esso, e due vertici su τ_1 e τ_2, costituisce quindi non solo un estremo inferiore, ma addirittura un minimo per il raggio di girazione baricentrale di una generica figura convessa, e sussiste quindi la limitazione:

$$\rho^2 \geq \frac{d_1^2 + d_2^2 - d_1 d_2}{6} = \frac{d^2}{24} + \frac{s^2}{2} \tag{2}$$

la quale conferma le precedenti previsioni essendo funzione *crescente* di s.

4. ULTERIORI LIMITAZIONI NEL CASO SIMMETRICO. – La limitazione che si ottiene combinando la (1) con la (2) risulta tanto più ristretta quanto maggiore è s; in particolare, quando esso assume il valore di $d/6$, che è il massimo compatibile con la convessità del contorno [5], il massimo ed il minimo coincidono nell'unico valore $d^2/18$.

(4) Cfr. loc. cit. nota (1).

(5) Si veda ad esempio la seconda opera citata nella nota (2) v. I, p. 242.

Nel caso in cui le tangenti siano equidistanti da τ, la limitazione risulta meno soddisfacente, in quanto ponendo nella (1) e nella (2) $s = 0$, si ha

$$\frac{d^2}{24} \leq \rho^2 \leq \frac{d^2}{12} \cdot \tag{3}$$

È pertanto sembrato conveniente cercare di stabilire per questo caso qualche limitazione più restrittiva: ciò risulta effettivamente possibile quando τ sia asse di simmetria [6] per $\mathfrak{S}$, e si conoscano inoltre o l'area $\Delta/2$ di $\mathfrak{S}_1$ (e quindi anche di $\mathfrak{S}_2$), oppure la distanza h_1 del relativo baricentro da τ.

Nel primo caso, se a $\mathfrak{S}_1$ ed a $\mathfrak{S}_2$ si sostituiscono rispettivamente i trapezi DCA_4A_1 e DCB_4B_1 aventi la stessa area, la retta τ resta asse baricentrale (fig. 3 *a*) e l'insieme dei due trapezi costituisce una figura convessa, poiché

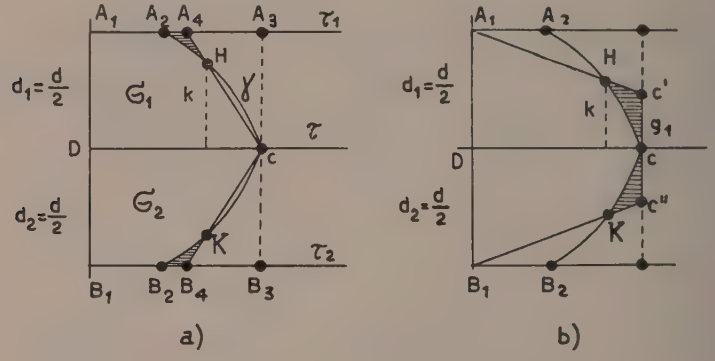


Fig. 3. – Trapezi aventi raggio di girazione:

a) non inferiore a quello di una $\mathfrak{S}$ simmetrica rispetto a τ; *b*) non superiore al raggio della stessa figura.

A_4 e B_4 si trovano dalla stessa banda di $\mathfrak{S}$ rispetto alla tangente [o ad una delle tangenti] a γ in C.

L'area Δ' del triangolo mistilineo A_2A_4H è uguale a quella Δ'' del settore di $\mathfrak{S}$ che ha come corda HC; inoltre, qualunque sia γ, la sostituzione del trapezio DCA_4A_1 a $\mathfrak{S}_1$, non diminuisce il momento di inerzia rispetto a τ, e quindi nemmeno ρ, in quanto il triangolo aggiunto a $\mathfrak{S}_1$ ha momento non minore di $\Delta' \cdot k^2$, ed il settore sottratto ha momento non maggiore della stessa quantità; il valore di ρ relativo ad un trapezio avente CD per base maggiore, ed altezza $d_1 = d/2$ costituisce pertanto il massimo dei valori che può assumere il raggio di girazione baricentrale relativo alla generica figura convessa simmetrica, avente area doppia.

Se si indica con $\delta \leq d/2$ la misura dell'area di $\mathfrak{S}_1$ rispetto a DC, al posto della (1) si può scrivere per ρ la limitazione più restrittiva:

$$\rho^2 \leq \frac{d^2}{24}\left[3 - \frac{d}{2\delta}\right] \cdot \tag{4}$$

[6] Nei riguardi di $\mathfrak{S}^*$ tale condizione implica l'eguaglianza dei segmenti intercetti da $\mathfrak{S}_1^*$ e $\mathfrak{S}_2^*$ su rette parallele ed equidistanti da τ.

Per ottenere il minimo valore di cui è suscettibile ρ si possono sostituire a $\mathfrak{S}_1$ ed a $\mathfrak{S}_2$, due trapezi aventi ancora la stessa area ma le basi normali a τ (fig. 3 *b*). In maniera del tutto analoga a quella seguita precedentemente si verifica che l'insieme dei due trapezi è una figura convessa, con raggio di girazione non superiore a quello di $\mathfrak{S}$, qualunque sia il contorno di quest'ultima, e si ottiene la limitazione inferiore:

$$\rho^2 \geqq \frac{d^2 + 8\delta^2 - 4d\delta}{12} \qquad (5)$$

La (4) e la (5) racchiudono il raggio di girazione in un intervallo che è considerevolmente più ristretto di quello fornito dalla (3), in quanto (fig. 4) la sua ampiezza massima è circa 1/3 del valore minimo di ρ^2, in più l'intervallo tende a zero quando δ si avvicina al suo valore massimo d_1 od al suo valore minimo $d_1/2$.

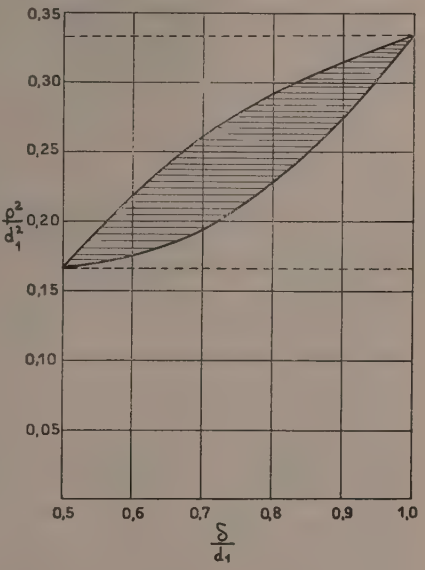


Fig. 4. – Dipendenza da δ/d_1 dell'intervallo (tratteggiato) in cui le (4). (5) racchiudono il raggio di girazione.

Una limitazione più restrittiva può essere ottenuta quando sia nota la distanza h_1 del baricentro di $\mathfrak{S}_1$ da τ. Basta infatti osservare che il raggio di girazione di $\mathfrak{S}$ non differisce da quello di $\mathfrak{S}_1$ o di $\mathfrak{S}_2$ calcolato sempre rispetto alla stessa retta τ. Si può quindi considerare la $\mathfrak{S}_1$ [o la $\mathfrak{S}_2$] come una superficie convessa asimmetrica, ed applicare ad essa le (1), (2); aggiungendo h_1^2 ai valori così calcolati, dalla (1) si ottiene la diseguaglianza

$$\rho^2 \leqq \frac{d \cdot h_1}{2} - \frac{d^2}{24} \qquad (6)$$

che corrisponde ad un effettivo massimo per il raggio di girazione in quanto l'insieme dei due trapezi relativi a Ξ_1 ed a Ξ_2, ed aventi le basi maggiori su τ, costituisce una figura convessa; invece dalla (2) si può ricavare soltanto un estremo inferiore per ρ, poiché in generale l'insieme dei due triangoli relativi a Ξ_1 ed a Ξ_2 non costituisce una figura convessa. Tuttavia la diseguaglianza che così si ottiene

$$\rho^2 > \frac{d_2}{24} + \frac{6h_1^2 - h_1 d}{4} \qquad (7)$$

racchiude ρ insieme alla precedente, in un intervallo la cui ampiezza massima (fig. 5), è appena 1/6 dell'estremo inferiore del raggio di girazione.

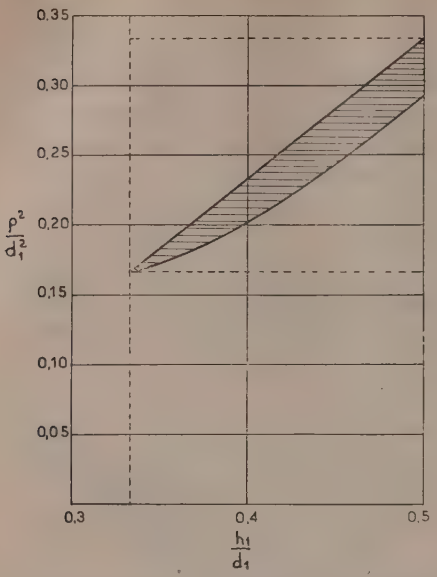


Fig. 5. – Dipendenza da h_1/d_1 dell'intervallo (tratteggiato) in cui le (6), (7) racchiudono il raggio di girazione.

5. Conclusioni. – Il rapporto ρ/d tra il raggio di girazione di una figura piana omogenea a contorno convesso rispetto ad un suo asse baricentrale, e la distanza tra le tangenti al contorno parallele a tale asse, è sempre compreso tra $1/\sqrt{24}$ ed $1/\sqrt{12}$.

Se è diversa da zero la distanza s tra l'asse baricentrale e la parallela che dimezza la striscia limitata dalle tangenti, il rapporto ρ/d riesce inoltre compreso nell'intervallo più ristretto che ha per estremi:

$$\sqrt{\frac{1}{24}+\frac{s^2}{2\,d^2}} \qquad \text{e} \qquad \sqrt{\frac{1}{12}-\frac{s^2}{d^2}}\,.$$

Se è invece $s = 0$ e se la $\mathfrak{S}^*$ intercetta segmenti eguali su rette parallele ed equidistanti da τ, è possibile stabilire limitazioni più restrittive per ρ/d quando si conosca l'area di $\mathfrak{S}^*$ o la distanza da τ dal baricentro di una delle due parti in cui tale asse divide la figura.

Chimica. — *Ricerche cinetiche per via polarometrica nel gruppo delle cumarine* (*). Nota di Antonio Foffani, presentata (**) dal Corrisp. G. Semerano.

Nella presente Nota vengono esposti i primi risultati di una serie di ricerche polarometriche, attualmente in corso, sulla cinetica di apertura, per idrolisi alcalina, dell'anello lattonico della cumarina e di alcuni suoi derivati.

Rinvio alla Nota precedente (1) per alcuni dettagli costruttivi e di impiego della cella usata in tali misure, e mi riservo di descrivere particolareggiatamente le altre condizioni sperimentali adottate in una Memoria conclusiva che verrà pubblicata tra breve (2); A. Mangini e R. Passerini

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica fisica dell'Università di Padova e Centro di Studio per la Polarografia del C.N.R.

(**) Nella seduta del 14 febbraio 1953.

(1) A. Foffani, «Atti Accad. Naz. Lincei», Classe sci. fis. mat. e nat.», vol. XIV, fasc. 2, pp. 281–285 (1953).

(2) A. Foffani, A. Mangini, R. Passerini e G. Semerano, manoscritto in compilazione.

hanno già reso noti [3], a questo proposito, i risultati di ricerche spettrali in ultravioletto sulla maggior parte delle sostanze studiate in questo lavoro.

I composti da me finora esaminati sono i seguenti: cumarina, 3–metil–cumarina, 4–metil–cumarina, 3,4–dimetil–cumarina, 5–metil–cumarina, 6–metil–cumarina, 7–metil–cumarina e 8–metil–cumarina.

Sul comportamento polarografico della cumarina e di suoi metil–derivati era stato svolto finora solo un limitato numero di ricerche sperimentali [4]; i risultati delle presenti ricerche sono generalmente in buon accordo con quelli di Harle, Lyons e Patzak–Neugebauer.

È stata confermata, sia per la cumarina che per i suoi metil–derivati, l'esistenza, in ambiente tamponato, di un unico gradino in tutto il campo di pH esaminato (pH = 6,0 ÷ 12,0); l'altezza di tale gradino è funzione del pH, in accordo con i risultati dei precedenti autori. Circa la comparsa, in taluni casi, di un piccolo gradino a potenziali circa 0,1 ÷ 0,2 volt meno negativi rispetto a quello normale, e di altezza circa 1 ÷ 2 % rispetto ad esso, verrà riferito in seguito [2].

È stata pure verificata con ottima approssimazione, in tutti i casi esaminati (ved. Tabella I), l'indipendenza del $\pi_{1/2}$ del gradino normale dal pH.

TABELLA I.

Valori di $\pi_{1/2}$ *(in volt rispetto all'E.C.N.) e di costante di corrente di diffusione*

$$I_d = \frac{i_d}{c \cdot m^{2/3} \cdot t^{1/6}}$$

Composto	$\pi_{1/2}$ [1]	c mmole/litro	I_d
Cumarina	— 1,560 ± 0,007	1,67	1,66
3–metil–cumarina	— 1,682 ± 0,006	0,76	1,53
4–metil–cumarina	— 1,677 ± 0,006	1,67	1,75
3,4–dimetil–cumarina . . .	— 1,781 ± 0,009	satura	—
5–metil–cumarina	— 1,585 ± 0,010	0,83	1,69
6–metil–cumarina	— 1,625 ± 0,002	0,76	1,75
7–metil–cumarina	— 1,640 ± 0,007	satura	—
8–metil–cumarina	— 1,605 ± 0,013	0,73	1,80

(1) Ogni valore di $\pi_{1/2}$ è la media di parecchie misure ripetute sia a pH costante, che per differenti valori di pH tutti i valori di $\pi_{1/2}$ sono stati corretti per la caduta ohmica $1/2 \cdot R \cdot i_d$.

(3) A. MANGINI e R. PASSERINI, « Boll. Scient. Fac. Chim. Ind. Bologna », *9*, 54 (1951).

(4) A. J. HARLE e L. E. LYONS, « J. Chem. Soc. », 1575–8 (1950); J. WRATIL, *Dissertation*, Univ. Wien. (1948); R. PATZAK e L. NEUGEBAUER, « Monatsh. », *82*, 662 70 (1951); *83*, 776 85 (1952); O. ČAPKA, « Coll. Czechoslov. Chem. Communs. », *15*, 965 71 (1950); « Proc. I int. polar. congr. », Praga, *1*, 701–3 (1951).

Data la limitata precisione della misura di corrente di diffusione per bassi valori di pH (specialmente a causa della presenza di massimi raccordati), si è preferito ricavare i valori limiti di costante di corrente di diffusione per estrapolazione, a tempo zero, delle rette rappresentanti l'andamento dei processi cinetici attuantisi, per queste sostanze, in ambiente fortemente alcalino (ved. ad esempio la fig. 3 della nota precedente [2]). Da tali valori (riportati in Tabella I) si ricava, ammettendo la monovalenza del processo primario all'elettrodo, un valore medio per il coefficiente di diffusione $D_{25^\circ} = 7{,}89 \cdot 10^{-6}$ cm$^2 \cdot$sec^{-1}, in accordo col valore riportato da Harle e Lyons [4] per il caso della cumarina. Risulta in tal modo confermato, in tutti i casi esaminati, il meccanismo del processo all'elettrodo proposto dai precedenti autori anche in base a misure coulombometriche [4].

Allo scopo di verificare l'esistenza o meno di processi cinetici all'elettrodo nei sistemi in esame, è stata eseguita una serie di misure a variabile altezza della riserva di mercurio del catodo e a differenti pH, per controllare la costanza del rapporto $i_d/h^{1/2}$. Era stata in precedenza controllata la dipendenza lineare della m dall'altezza h della colonna di mercurio.

TABELLA II.

Controllo della costanza del rapporto $i_d/h^{1/2}$ per la cumarina e 4 metil cumarina, a differenti pH.

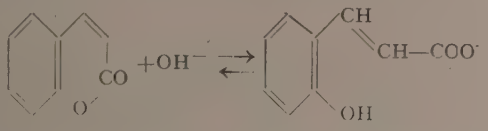
		Cumarina						4-metil-cum.	
		pH = 6,80		pH = 7,70		pH = 10,05		pH = 10,30	
h in cm	$h^{1/2}$	i_d in μA	$i_d/h^{1/2}$	i_d in μA	$i_d/h^{1/2}$	i_d in μA	$i_d/h^{1/2}$	i_d in μA	$i_d/h^{1/2}$
21	4,59	4,57	0,99	3,80	0,83	1,61	0,35	—	—
31,1	5,58	5,39	0,96	4,73	0,85	1,94	0,34	2,52	0,45
47,4 [1]	6,88	6,68	0,97	5,76	0,84	2,49	0,36	3,10	0,45
64,5	8,03	7,84	0,98	6,75	0,84	2,77	0,34	—	—
84	9,16	8,65	0,94	7,79	0,85	3,24	0,35	4,10	0,44
103	10,15	9,45	0,93	8,81	0,87	3,90	0,38	—	—
MEDIE			0,96		0,85		0,35		0,45
			±0,03		±0,02		±0,02		±0,01

(1) Per $h = 47{,}4$ cm si aveva $m = 2{,}150$ mg sec; tale valore di h è quello normalmente impiegato in tutte le misure ad altezza costante della riserva di mercurio.

I risultati sono riportati in parte in tabella II; altre misure a differenti pH e per altri composti hanno dato risultati analoghi. Si vede che, con buona approssimazione, i valori di $i_d/h^{1/2}$ risultano indipendenti dall'altezza della riserva in tutti i casi esaminati. È quindi lecito ammettere che il processo all'elettrodo sia controllato da soli fenomeni di diffusione; ciò rende possibile lo studio della cinetica di apertura dell'anello lattonico dei composti in esame senza il pericolo dell'intervento di processi secondari cinetici all'elettrodo.

La dipendenza della corrente di diffusione dal pH, già riscontrata dai precedenti Autori [4] e confermata per mezzo delle presenti ricerche in tutti i casi esaminati, come pure il comportamento spettrale a differenti pH [4], mettono chiaramente in evidenza la presenza, nei sistemi considerati, di un equilibrio reversibile tra una forma presente in soluzione acida ed una che si origina in ambiente alcalino. Si è ammesso che si tratti dell'equilibrio tra il lattone cumarina e l'anione del corrispondente acido cumarinico (forma cis dell'acido orto-ossicinnamico), secondo la reazione reversibile:

(1)



ed analogamente per i suoi derivati, a parte l'eventuale presenza di processi secondari.

Si è potuto verificare, in accordo con la (1), che il corrispondente andamento cinetico risulta, a pH costante, del primo ordine sia per la reazione diretta (di apertura dell'anello lattonico) che per quella inversa. Tutte le misure riportate nel presente lavoro si riferiscono a reazioni decorrenti fino a completa apertura dell'anello lattonico, per valori di pH da 10,0 a 12,0. In tale intervallo di pH la reazione (1) risulta fortemente catalizzata dagli ioni ossidrilici (ved. ad esempio la fig. 3 della nota precedente [1]); la costante di velocità k per la reazione diretta dipenderà quindi dalle condizioni di pH del mezzo secondo un'espressione della forma:

(2) $$k = k_{OH^-} \cdot c_{OH}$$

dove k_{OH^-} è la costante catalitica della reazione per gli ioni OH^-.

La fig. 1 della Nota precedente [1] dà un esempio di curva cinetica sperimentale, e la tabella I della stessa Nota mostra la riproducibilità dei valori di k nelle condizioni sperimentali adottate.

La validità della relazione (2) risulta dall'ottima linearità, in tutti i casi esaminati, dei diagrammi sperimentali che dànno la dipendenza di lg k dal pH; anche le misure in funzione della temperatura, a pH costante, dimostrano con ottima approssimazione, la dipendenza lineare normale di lg k da $1/T$; tali diagrammi verranno riportati in una Nota successiva [2], insieme ai risultati di ulteriori misure, attualmente in corso, su altri deri-

vati. Le misure in funzione della temperatura sono state corrette, onde tener conto della variazione con la temperatura del pH delle soluzioni tampone impiegate.

TABELLA III.

Dipendenza dell'energia ed entropia di attivazione dal pH *per la cumarina.*

Esp. N.	pH	lg k a 25°	ΔH^+ kcal. sper.	lg A	ΔS^+ cal/grado
1	10,70	$-3{,}37_5$	24,0	14,2	+ 6,4
2	11,10	$-2{,}98_5$	21,6	12,8	+ 0,3
3	11,48	$-2{,}61_0$	15,0	8,4	— 20,2
4	11,80	$-2{,}29_5$	13,6	7,7	— 23,3

TABELLA IV.

Composto	lg k a 25° per pH=11,80	ΔH^+ kcal sper.	ΔH^+ kcal corr. per pH=11,80	lg A	ΔS^+ cal/grado
Cumarina	$-2{,}29_5$	13,6 pH=11,80	13,6	7,7	— 23,3
3-metil-cumarina . .	$-1{,}71_5$	20,7 pH=11,60	18,4	11,8	— 4,7
4-metil-cumarina . .	$-2{,}57_0$	18,1 pH=11,75	17,5	10,3	— 11,6
3,4-dimetil-cumarina .	$-2{,}97_0$	23,0 pH=11,70	21,9	13,1	+ 1,3
5-metil-cumarina . .	$-2{,}48_0$	13,9 pH=11,85	14,4	8,1	— 21,5
6-metil-cumarina . .	$-2{,}13_5$	19,0 pH=11,75	18,4	11,4	— 6,5
7-metil-cumarina . .	$-2{,}50_5$	14,6 pH=11,70	13,5	7,4	— 24,7
8-metil-cumarina . .	$-2{,}25_0$	16,7 pH=11,90	17,8	10,8	— 9,1

In base a tali risultati sperimentali sono stati calcolati i valori di energia di attivazione ΔH , fattore di frequenza A ed entropia di attivazione

ΔS^+, riportati nelle tabelle III e IV. I valori sperimentali di ΔH^+ per i derivati della cumarina, che si riferiscono a valori di pH differenti da composto a composto, sono stati riportati a ugual valore di pH tenendo conto dei risultati di tabella III per la cumarina.

Le presenti ricerche vengono attualmente estese ad altri derivati della cumarina, e i risultati di esse verranno discussi, come già detto, in una Nota successiva [2], insieme ai risultati di una serie di ricerche spettrali (anche a bassa temperatura) sugli stessi composti, attualmente in corso presso l'Istituto di Chimica Industriale dell'Università di Bologna.

Chimica. — *Sintesi di alcuni β-amminoacidi bibasici* [*]. Nota di AURELIO ROMEO e LUCIA MAGNI, presentata [**] dal Socio G. BARGELLINI.

Mentre gli α-amminoacidi dalla formula

$$\begin{array}{l} HOOC-CH-(CH_2)_n-COOH \\ \quad\quad\quad\quad | \\ \quad\quad\quad\quad NH_2 \end{array}$$

sono conosciuti e la maggior parte di essi è stata preparata per sintesi, dei β-amminoacidi dello stesso tipo si conosce solamente l'acido aspartico.

In una breve comunicazione precedente di uno di noi [1], fu annunciato che si avevano in corso esperienze per la sintesi dell'acido β-amminopimelico

$$\begin{array}{l} HOOC-CH_2-CH-(CH_2)_3-COOH \\ \quad\quad\quad\quad\quad\quad | \\ \quad\quad\quad\quad\quad\quad NH_2 \end{array}$$

Nel presente lavoro descriviamo, accanto alla preparazione dell'acido β-amminopimelico, anche quella di altri analoghi β-amminoacidi bibasici.

La preparazione dell'acido β-amminoglutarico era già stata tentata da Emery [2] attraverso la riduzione dell'ossima dell'acido acetondicarbonico, con risultati negativi.

Prendendo come prodotto di partenza, invece dell'acido acetondicarbonico, il suo estere etilico abbiamo tentato di realizzare la sintesi attraverso le due vie seguenti:

1° riduzione dell'immina dell'estere dell'acido acetondicarbonico;

2° riduzione del fenilidrazone dell'estere dell'acido acetondicarbonico.

La riduzione catalitica in presenza di platino dell'immina dell'estere dell'acido acetondicarbonico si è dimostrata praticamente difficile da realizzare e ciò in accordo con i lavori di Decombe [3] su composti analoghi.

(*) Lavoro eseguito nel Laboratorio di Chimica organica dell'Istituto Chimico della Università di Roma.

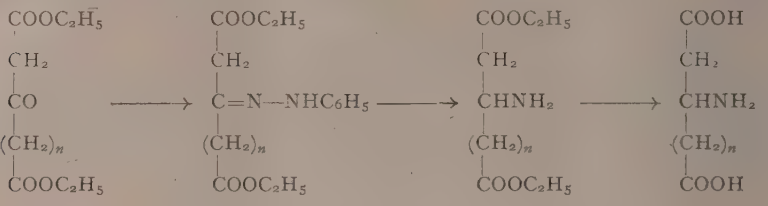
(**) Nella seduta del 14 febbraio 1953.

(1) A. ROMEO, « Ricerca Scientifica », 1306 (1950).

(2) W. ORREN EMERY, « Berichte », vol. 23 (2), 3765 (1890).

(3) J. DECOMBE, « Compt. rendus de l'Académie des Sciences », vol. 190, 268 (1930).

Pertanto abbiamo abbandonato questa via per battere la seconda basata sul seguente schema di reazioni:

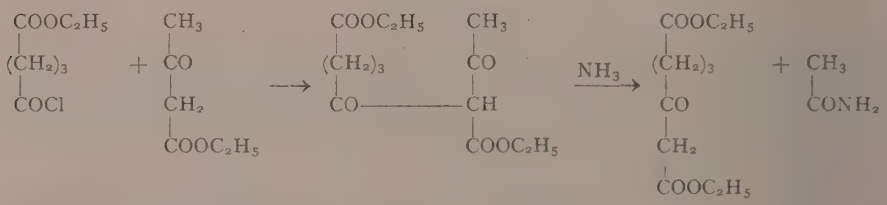


Infatti, facendo reagire l'estere dell'acido acetondicarbonico con fenilidrazina a freddo e sottoponendo direttamente a riduzione con amalgama di alluminio, a temperatura ambiente, la miscela di reazione con lo stesso metodo adottato da E. Fischer [4] per la preparazione dell'acido β–ammino–butirrico, abbiamo potuto ottenere l'estere dell'acido β–ammino–glutarico.

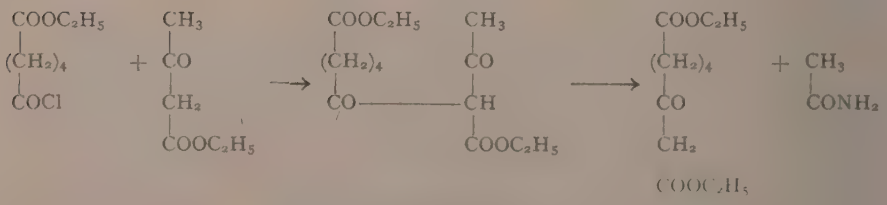
Saponificando quindi l'estere con idrato di bario a temperatura ambiente abbiamo ottenuto l'acido β–ammino–glutarico.

L'acido β–ammino–glutarico si comporta come un β–amminoacido e fonde decomponendosi e svolgendo ammoniaca a 272°. La titolazione acidimetrica in presenza di formaldeide [5], eseguita potenziometricamente, ha permesso di stabilire un peso equivalente pari a 72,75.

Dagli esteri degli acidi β–cheto–pimelico (III) e β–cheto–suberico (VI), ottenuti con lo stesso metodo seguìto da Bardahn [6] per la preparazione dell'estere dell'acido β–cheto–adipico e cioè secondo i seguenti schemi di reazione:



(I) (II) (III)

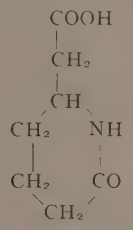


(IV) (V) (VI)

4) E. Fischer, « Liebigs Annalen der Chemie », vol. 383, 365 (1911).
5) Sörensen, « Biochemische Zeitschrift », vol. 7, 45 (1907); *Ibid.*, vol. 25, 1 (1910).
(6) Bardahn, « J. of the Chemical Society London », 1850 (1936).

siamo pervenuti, attraverso riduzione dei fenilidrazoni corrispondenti e successiva saponificazione, agli acidi β ammino pimelico e β–ammino–suberico. La titolazione acidimetrica in presenza di formaldeide, eseguita potenziometricamente, ha fornito, per l'acido β–ammino–pimelico, un peso equivalente pari a 87,25 per l'acido β–ammino–suberico quello di 93,5.

L'acido β–ammino–pimelico fonde a 183°–185°(7) decomponendosi e svolgendo acqua e precisamente il 10,1 % corrispondente a circa 1 mole di acqua per 1 mole di acido β–ammino–pimelico; il composto che si ottiene contiene 8,6% di azoto e alla titolazione acidimetrica eseguita potenziometricamente ha fornito un peso equivalente pari a 156,4, il che farebbe supporre una costituzione lattamica e precisamente di acido 2–piperidon–6–acetico



L'acido β–ammino–suberico fonde decomponendosi a 235° svolgendo acqua e ammoniaca contemporaneamente.

ACIDO β–AMMINO–GLUTARICO.

Acido β–ammino–glutarico. – A 56 g di estere etilico dell'acido acetondicarbonico, sciolti in 150 cm³ di etere etilico si aggiungono 30 g di fenilidrazina; si lascia in riposo per 24 ore a 0° 5°, si separa l'acqua formatasi, si secca su solfato sodico, la soluzione eterea e si evapora sotto vuoto (15°–20°) l'etere etilico.

All'olio che rimane, sciolto in 400 cm³ di alcool etilico si aggiungono 40 g di alluminio amalgamato, la temperatura è mantenuta a 25°–30° e la massa è agitata costantemente. Si aggiungono 150 cm³ di acqua e si lascia in agitazione per 10 ore. Si aggiungono quindi 200 cm³ di alcool etilico, 100 cm³ di acqua e altri 2 g di alluminio amalgamato. Dopo altre 10 ore di agitazione si aggiungono alla massa densa 1600 cm³ di acqua e si centrifuga l'allumina formatasi. L'idrato di alluminio viene poi lavato ripetutamente con acqua.

Nella soluzione acquosa si sciolgono 187 g di idrato di bario e si lascia in riposo per tre giorni a temperatura ambiente. Si precipita l'idrato di

(7) Il punto di fusione e le altre caratteristiche fisiche dell'acido β–ammino–pimelico da noi preparato per sintesi nella maniera sopra indicata, la struttura del quale non lascia adito a dubbi, risultano differenti da quelle del prodotto a punto di fusione 228° descritto in una Nota precedente 1) da uno di noi e per il quale si era supposta una costituzione di acido β ammino pimelico. Dovrà ora venire chiarita la natura del prodotto a punto di fusione 228°.

bario con la quantità stechimetrica di acido solforico e si elimina il solfato di bario formatosi per filtrazione. La soluzione acquosa viene evaporata a piccolo volume a 25° sotto vuoto. Si separano g 5 di sostanza che si purifica per cristallizzazione da acqua (50°–5°) da cui si separa in polvere microcristallina p.f. 268°–272° (con decomposizione).

La titolazione acidimetrica in presenza di formaldeide eseguita potenziometricamente, ha fornito un peso equivalente pari a 72,75.

Peso equivalente	trovato			72,75	
	calcolato per $C_6H_9O_4N$			73,75	
	trov. °/₀:	N	9,85	9,73	(Dumas)
			9,64		(Van Slyke)
per $C_5H_2O_4N$	calc. °/₀:	N	9,52		

Acido β–ammino–adipico.

Acido β–ammino–adipico. – Si è operato come per l'acido β–ammino–glutarico tuttavia in questo caso siamo riusciti ad isolare solo piccolissime quantità di un prodotto a p.f. 182–184° che non abbiamo potuto per ora caratterizzare esattamente.

Acido β–ammino–pimelico.

α–aceto–β–cheto–pimelato–dietilico. – In un pallone da 1 litro a tre colli provvisto di agitatore meccanico a valvola di mercurio, di un refrigerante, e di un imbuto separatore sono posti 500 cm³ di benzolo anidro, 29 g di estere acetacetico e 5 g di sodio metallico finemente suddiviso. La miscela viene riscaldata all'ebollizione per 24 ore. Dopo che la sospensione dell'estere sodico acetacetico è stata raffreddata si aggiungono 49 g del cloruro acido del glutarato acido di etile [8] in un periodo di due ore. La miscela viene lasciata bollire a ricadere per 8 ore; si lascia quindi raffreddare a temperatura ambiente e si aggiungono 100 g di ghiaccio tritato, si acidifica con acido solforico diluito fino a viraggio rosso Congo. Si è separata la soluzione benzenica dalla soluzione acquosa.

Lo strato benzenico è stato lavato con 300 cm³ di idrato sodico al 5 °/₀ (3 volte ogni volta 100 cm³); la soluzione acquosa alcalina è stata acidificata mantenendo la temperatura a 0–5° con acido solforico diluito fino a viraggio rosso Congo. La soluzione acquosa è stata estratta con etere etilico 5 volte, ogni volta 100 cm³ di etere. La soluzione eterea seccata su solfato sodico per evaporazione dell'etere lascia un olio che alla pressione di 0,01 mm distilla per la maggior parte (38 g) a 116–120°.

	trov. °/₀:	C	57,20	H 7,41	7,49
per $C_{13}H_{20}O_6$	calc.		57,34	7,40	

(8) W. E. Bachmann, « J. of the American Chemical Society », vol. 64, 974 (1942).

Estere etilico dell'acido β-cheto-pimelico. – 35 g di dicheto-estere sciolti in etere anidro (50 cm^3) sono raffreddati in miscela frigorifera e saturati con ammoniaca gassosa secca. Dopo 12 ore la soluzione viene lavata con acqua e con acido cloridrico diluito, seccata su solfato sodico e distillata. Il β-cheto-pimelato dietilico (15 g) è ottenuto come un olio incolore a p.e. 113°–0,1 mm.

	trov. %:	C	57,12	57,22	H	7,98	8,02
per $C_{11}H_{18}O_5$	calc.		57,38			7,88	

Acido β-ammino-pimelico. – Si è operato come per l'acido β-ammino-glutarico. L'acido β-ammino-pimelico, cristallizzato da acqua (40°–45°), o separato per precipitazione della soluzione acquosa con alcool etilico, fonde decomponendosi a 183°–5°. Si sono avute le stesse rese come per l'acido β-ammino-glutarico.

La titolazione acidimetrica in presenza di formaldeide, eseguita potenziometricamente, ha fornito un peso equivalente pari a 87,25.

	peso equivalente		trov.	87,25	
per $C_7H_{13}O_4N$			calc.	87,59	
	trov. °/₀:	N	8,21	8,15	(Dumas)
			7,82		(Van Slyke)
per $C_7H_{13}O_4N$	calc. °/₀:		8,00		

Acido 2-piperidon-6-acetico. – Scaldando l'acido β-ammino-pimelico a 180–190° in corrente di azoto, si ha una fusione con decomposizione e precisamente formazione di acqua (10,1 °/₀). Il residuo cristallizzato da cloroformio-etere di petrolio fonde a 140°.

La titolazione acidimetrica, eseguita potenziometricamente, ha fornito un peso equivalente pari a 156,4.

	peso equivalente	trov.	156,4	
per $C_7H_{11}O_3N$		calc.	157,17	
	trov. °/₀:	N	8,64	8,61
per $C_7H_{11}O_3N$	calc.		8,91	

ACIDO β-AMMINO-SUBERICO.

α-aceto-β-cheto-suberato-dietilico. – Si è operato come per l'α-aceto-β-chetopimelato dietilico. L'olio ottenuto per evaporazione della soluzione eterea, ad un saggio di distillazione a 0,5 mm, mostra di decomporsi parzialmente; pertanto è stato impiegato grezzo.

Estere etilico dell'acido β cheto-suberico. – Si è operato come per l'estere etilico dell'acido β-cheto-pimelico. L'estere etilico dell'acido β-cheto-suberico distilla a 146°–148°, 0,4 mm.

	trov. °/₀:	C	58,75	58,79	H	8,24	8,36
per $C_{12}H_{20}O_5$	calc. °/₀:		59,00			8,25	

Acido β–ammino–suberico. – Si è operato come per l'acido β–ammino–glutarico. L'acido β–ammino–suberico, cristallizzato da acqua–alcool etilico (1 : 4), fonde decomponendosi a 235°. Si sono avute le stesse rese come per gli acidi β–ammino–suberico e gluterico.

La titolazione acidimetrica in presenza di formaldeide, eseguita potenziometricamente, ha fornito un peso equivalente pari a 93,5.

	peso equivalente		trov.	93,5
per $C_8H_{15}O_4N$			calc.	94,6
	trov. °/₀:	N 7,45	7,52	(Dumas)
per $C_8H_{15}O_4N$	calc. °/₀:	7,4		

Chimica. — *Comportamento polarografico di alcuni metalli nobili in soluzioni debolmente complessanti*(*). Nota di Elio Scarano, presentata(**) dal Corrisp. G. Semerano.

Le indagini polarografiche sui metalli nobili sono state sempre condotte in presenza di agenti complessanti onde spostare i relativi potenziali di deposizione verso valori più negativi di quello di ossidazione del mercurio.

Willis (1) con i metalli del gruppo del platino, in soluzioni complessanti varie, ha registrato gradini proporzionali alla concentrazione solo per il palladio e per il rodio in soluzioni di piridina più KCl; poco soddisfacenti invece sono i risultati ottenuti con il rutenio, l'osmio, il platino e l'iridio. Repin (2) ha tratte praticamente le stesse conclusioni per il rodio. Entrambi questi sperimentatori abbandonarono lo studio dei clorocomplessi di rodio, perché poco stabili.

Anche per lo studio polarografico dell'oro e dell'argento si ritiene necessario l'ausilio dei complessanti, essendo i potenziali di riduzione degli ioni aurico ed auroso e dello ione argento più positivi o prossimi a quello di dissoluzione del mercurio.

Al fine di studiare i metodi di dosaggio dei metalli del gruppo del platino, singolarmente e nelle loro leghe, ho dovuto riesaminare tutta la letteratura al riguardo, e, ripetendo alcune prove, ho avuto modo di osservare che questi metalli debolmente complessati o allo stato di sali semplici presentano comportamenti chimici e polarografici particolarmente interessanti.

Così le soluzioni di rodio reagiscono rapidamente con il mercurio, indipendentemente da qualsiasi polarizzazione; ed il metallo ridotto non si amalgama con il mercurio, ma rimane sulla superficie della goccia sotto forma

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica Analitica dell'Università di Roma; Centro di Studi Polarografici del C.N.R. Padova.

(**) Nella seduta del 14 febbraio 1953.

(1) J. B. Willis, « J. Am. Chem. Soc. », *66*, 1067 (1944); *67*, 547 (1945).

(2) I. S. A. Repin, « J. Applied Chem. U.R.S.S. », *20*, 46 (1947); *20*, 55 (1947).

di pellicola sottilissima, in maniera da costituire quasi un elettrodo di rodio. Lo stesso avviene nel caso di soluzioni di oro, di palladio; il platino sembra invece che si comporti in maniera diversa.

Con elettrodo a goccia le soluzioni dei metalli nobili dànno a potenziale zero (contro E.C.S.) una corrente catodica dovuta probabilmente alla scarica degli ioni mercurio, provenienti dalla cennata reazione di spostamento. Applicando potenziali positivi o negativi alla goccia, non si impediscono questi fenomeni, ma altri se ne verificano che portano alla comparsa di onde polarografiche, e sui quali mi riservo di riferire ulteriormente.

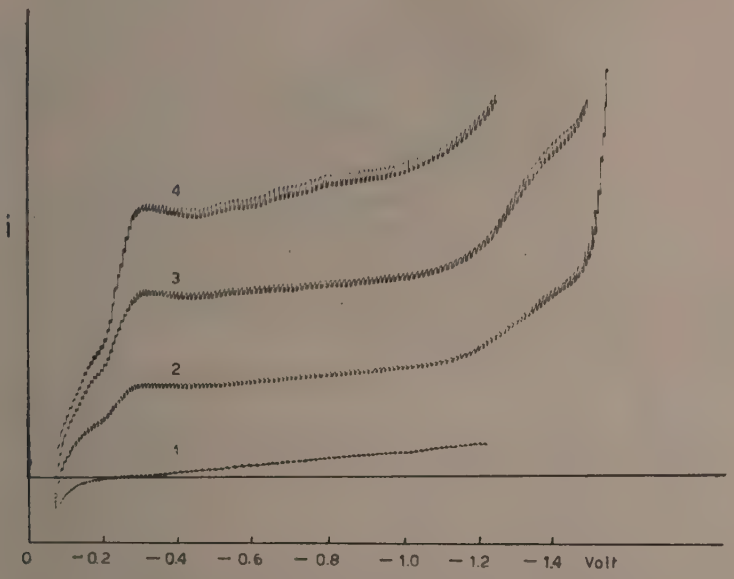


Fig. 1. – Comportamento polarografico di $RhCl_3$ in soluzione satura di KCl.
1) soluzione base, 2) $1{,}2 \cdot 10^{-4}$, 3) $2{,}4 \cdot 10^{-4}$, 4) $3{,}6 \cdot 10^{-4}$ M in $RhCl_3$.

In particolare sono state studiate soluzioni di rodio in acido nitrico o in nitrato di potassio, o in acido cloridrico o in cloruro potassico. Queste soluzioni reagiscono tutte subito con il mercurio, ad eccezione di quella contenente KNO_3.

I diagrammi ottenuti con cloruro di rodio ($2{,}4 \cdot 10^{-5}$ a $1{,}3 \cdot 10^{-3}$M in rodio metallico) in cloruro potassico (1, 2, 3 e 4 M) sono mostrati nelle figg. 1, 2 e 3. Le soluzioni sono state preparate a partire da una soluzione madre di $RhCl_3$ per diluizione e successivo riscaldamento a bagno maria per 20 minuti. Lo scopo del riscaldamento è quello di rendere più rapido il raggiungimento dell'equilibrio di formazione del complesso, equilibrio che attualmente è allo studio in questo Istituto a mezzo di misure spettrofotometriche.

Per la registrazione dei polarogrammi si è adoperato un polarografo Sargent XII e elettrodo di riferimento a calomelano saturo, congiunto con la soluzione a mezzo di ponte di agar/KCl. La soluzione viene disossigenata con corrente di azoto puro.

Dai diagrammi risulta che il primo gradino presenta le caratteristiche della onda di dissoluzione del mercurio, in proseguimento dell'onda anodica del cloro la corrente diventa catodica per un valore del potenziale dipendente dalla concentrazione del KCl, continuando a salire con l'aumentare del potenziale negativo, con inclinazione decrescente fino ad un certo

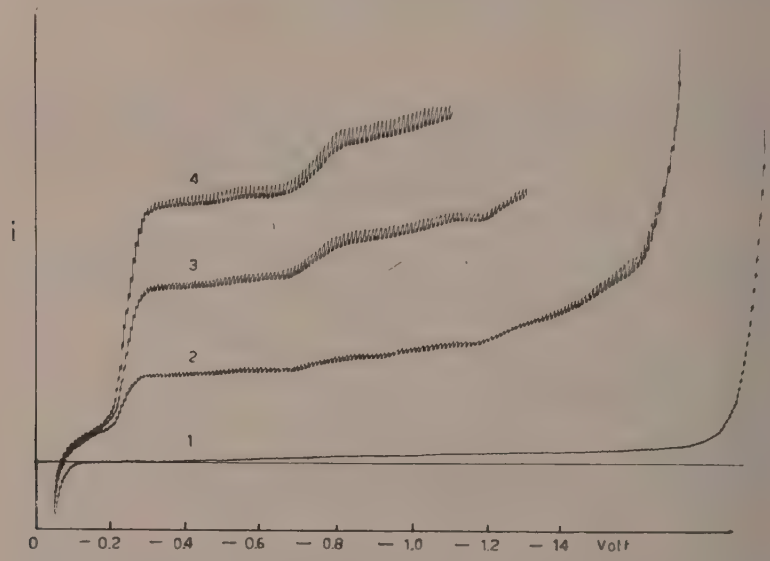


Fig. 2. – Comportamento polarografico di $RhCl_3$ in soluzione satura di KCl.

1) soluzione base, 2) $4{,}8 \cdot 10^{-4}$, 3) $9, 6 \cdot 10^{-4}$, 4) $1{,}44 \cdot 10^{-3}$ M in $RhCl_3$.

punto in cui si inizia la seconda onda. A causa della vicinanza delle due onde non si ha un tratto di corrente costante.

Il secondo gradino è ben netto e presenta un buon tratto di corrente di diffusione costante; il potenziale di semionda corrisponde, in soluzioni sature di cloruro potassico, a circa – 0,24 volt. La corrente inerente a questo gradino non è linearmente proporzionale alla concentrazione del rodio, crescendo più che linearmente con l'aumentare di questa. Ma il valore della corrente totale, in più punti del tratto di corrente di diffusione, ossia la somma di quelle inerenti al primo ed al secondo gradino, detratto naturalmente il valore della residua, è in ottima relazione lineare con la concentrazione di $RhCl_3$.

Il terzo gradino è molto più basso del secondo, con potenziale di semionda a circa – 0,75 volt; l'altezza di questo gradino non è linearmente

proporzionale alla concentrazione e diminuisce tanto rapidamente con il diminuire di questa che il gradino stesso praticamente scompare per basse concentrazioni di $RhCl_3$.

Il quarto gradino è vicinissimo alla scarica catalitica dell'idrogeno e si riesce a notarlo solo in soluzioni a bassa concentrazione di $RhCl_3$ e di KCl; il potenziale di semionda è intorno a — 1,2 volt. Il valore della corrente è elevato, dell'ordine di grandezza di quello del secondo gradino.

Subito dopo il quarto gradino la corrente si innalza rapidamente per la deposizione catalitica dell'idrogeno; molto prima quindi del po-

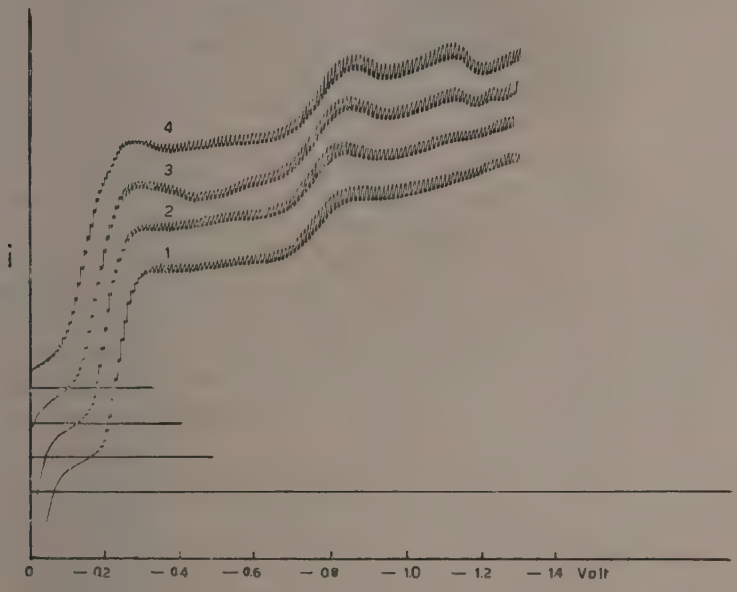


Fig. 3. – Influenza della concentrazione di KCl sul comportamento polarografico di $RhCl_3$.

1) soluzione satura, 2) 3, 3) 2, 4) 1 M in KCl e $1{,}2 \cdot 10^{-3}$ M in $RhCl_3$.

tenziale di decomposizione dell'elettrolita base, giacente intorno a — 1,9 volt.

Circa l'influenza della concentrazione del cloruro potassico si è notato:

che il primo ed il secondo gradino risultano spostati verso potenziali più negativi con l'aumentare della concentrazione di KCl, come era prevedibile;

che il potenziale di semionda del terzo gradino rimane praticamente costante;

che, con il diminuire della concentrazione di KCl, si manifestano in modo sempre più accentuato diminuzioni di corrente subito dopo il salto di corrente di tutti i gradini meno il primo; questo fenomeno è quasi inap-

prezzabile in soluzioni sature di KCl, per cui lo studio analitico è stato fatto con queste soluzioni.

Poche osservazioni fatte con soluzioni base di acido cloridrico mostrano che in questo ambiente $RhCl_3$ si comporta come nelle soluzioni di KCl, per quel che riguarda l'andamento del primo e del secondo gradino e l'influenza della concentrazione dello ione cloridrico. Ma il terzo ed il quarto gradino non compaiono a causa di una molto anticipata scarica catalitica di idrogeno, che inizia prima del potenziale al quale, in soluzioni di KCl, si trova il terzo gradino.

Le soluzioni di rodio nitrato in KNO_3 M, come già si è detto, non reagiscono con mercurio e mostrano due gradini polarografici a potenziali negativi. In soluzioni di acido nitrico, che sono decomposte dal mercurio, si riscontra un gradino tutto al disopra della linea zero di corrente, che inizia a valori positivi del potenziale e con la corrente di diffusione a potenziali negativi.

Da quanto osservato si può ammettere che le soluzioni cloridriche contengono un complesso clorurato di color rosa non stabile nei confronti del mercurio; questo opera la riduzione diretta a rodio elementare che aderisce alla superficie della goccia; si ha pertanto a che fare con un elettrodo di mercurio rodiato non più in grado di operare la riduzione del complesso. Su questo elettrodo scaricano gli ioni del mercurio formatisi dalla reazione di spostamento e ne risulta il primo gradino osservato. Conferendo all'elettrodo una polarizzazione negativa più spinta, si ha la riduzione del complesso clorurato, riduzione non più diretta ma polarografica, come è deducibile dall'esistenza del secondo gradino.

Riguardo all'altezza dei due primi gradini, non in relazione lineare con la concentrazione di $RhCl_3$, si ammette che la corrente legata al primo non possa salire oltre un certo limite a causa dell'arresto ad un certo punto della reazione di spostamento per la scomparsa della superficie libera di mercurio, e quindi di una concentrazione, intorno alla goccia, di ioni depositabili di mercurio non superante un certo valore. Parimenti l'altezza del secondo gradino non è funzione lineare della concentrazione per l'impoverimento, intorno alla goccia, della concentrazione del complesso del rodio, già in parte ridotto direttamente dal mercurio. La corrente legata ai due processi risulta invece proporzionale alla concentrazione perché legata alla diffusione di una sola specie riducibile.

Chimica. — *Studi di polarografia oscillografica.* – I. *Sulla cinetica della reazione tra l'acido piruvico e l'ammoniaca. Comportamento oscillografico dell'acido piruvico*[*]. Nota di PAOLO FAVERO, presentata[**] dal Corrisp. G. SEMERANO.

Numerosi lavori sono stati pubblicati durante gli ultimi 15 anni sull'applicazione dell'oscillografo a raggi catodici alla polarografia. Essenzialmente due tipi di tecniche sono state sviluppate: in una, si impiega l'elettrodo a getto al quale viene applicato un potenziale pulsante di opportuna frequenza; nell'altra, all'elettrodo a goccia di mercurio viene applicato uno sparpagliamento lineare di potenziale di breve durata (da 0,05 a 0,5 sec.), sia singolo che multiplo, durante la vita di una goccia. Dal punto di vista analitico, la seconda di queste tecniche si è dimostrata più adatta, specialmente per le determinazioni quantitative. In quasi tutti i lavori pubblicati fino al 1950, erano stati studiati soltanto sistemi inorganici, in modo che si poteva pensare che l'uso del polarografo oscillografico fosse limitato soltanto allo studio di tali sistemi.

F. C. Snowden e H. T. Page [1] hanno però mostrato che esso è applicabile con successo anche a molti sistemi organici; e che anzi, proprio in questo campo e in quello della cinetica di reazione, sono da attendersi da tale strumento numerosi contributi di notevole valore. A titolo di esempio, questi Autori hanno riportato i risultati ottenuti, con l'apparecchio da loro descritto, nella determinazione della velocità specifica di reazioni di ordine zero come quelle di fotolisi di diazocomposti, che già a 4° C sono complete in ca. 6 min., di reazioni di primo ordine, come la decomposizione termica dei sali di diazonio, aventi a 50° C un tempo di semitrasformazione dell'ordine dell'ora, e di reazioni di secondo ordine, come la formazione di coloranti azoici. Le loro ricerche non sono state però sistematiche, ma si sono limitate ad illustrare semplicemente le possibilità della polarografia oscillografica. Né, per quanto mi consta, è stata compiuta finora, anche da altri Autori, alcuna ricerca sistematica di cinetica chimica in cui si sia fatto esclusivo ricorso alla tecnica oscillografica.

Le possibilità dell'apparecchiatura oscillografica a sparpagliamento multiplo sono state confermate dalle mie esperienze sulla cinetica della reazione tra acido piruvico e ammoniaca alle quali è dedicata questa Nota ed altre che saranno quanto prima pubblicate.

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica Fisica dell'Università e Centro di Polarografia del C.N.R. di Padova.

(**) Nella seduta del 14 marzo 1953.

(1) F. C. SNOWDEN e H. T. PAGE, « Anal. Chem. », *22*, 969 (1950).

La costante di equilibrio della reazione

$$CH_3 \cdot CO \cdot COO^- + NH_3 \rightleftarrows CH_3 \cdot C(NH) \cdot COO^- + H_2O$$

in ambiente alcalino, in presenza di cloruro o solfato ammonico, a pH costante e a pH variabile, è stata determinata per via polarografica da P. Zuman [2]. Lo stesso Autore ha anche determinato, per via polarometrica, un singolo valore della costante di velocità di questa reazione per un ambiente con eccesso di ammoniaca, a ca. 2° C. Il valore ottenuto di k è circa 0,02 sec^{-1}; esso corrisponde, come è noto, a un periodo di semitrasformazione dell'ordine di 35 sec. Questo valore è evidentemente troppo piccolo perché sia determinabile con la tecnica polarografica ordinaria e deve perciò considerarsi come puramente indicativo.

In conseguenza di questo fatto, ho ritenuto conveniente di utilizzare il metodo oscillografico per lo studio sistematico ed esauriente di questo problema cinetico.

Il conportamento polarografico dell'acido piruvico è stato studiato da R. Brdička [3]. Da esso risulta che nell'intervallo di pH compreso fra circa 5 e 8, l'acido piruvico presenta due gradini di riduzione, il primo attribuibile alla molecola indissociata, il secondo all'anione. All'infuori del predetto intervallo di pH, l'acido piruvico presenta un solo gradino attribuibile alla molecola indissociata o all'anione a seconda che ci si trovi in campo acido o basico.

Come è noto, l'equazione che dà la dipendenza della corrente di picco oscillografico dai vari fattori che la determinano è stata ricavata da Randles [4] e Ševčik [5] ed è

$$I_{pk} = 2{,}344\, n^{3/2}\, m^{2/3}\, t^{2/3}\, v^{1/2}\, D^{1/2}\, C\ \mu A$$

in cui

n = numero di elettroni interessati al processo;
m = velocità di efflusso del mercurio in mg/sec;
t = età della goccia (in sec) nell'istante in cui si misura il picco;
D = coefficiente di diffusione del depolarizzatore;
C = concentrazione del depolarizzatore in millimole/litro;
$v = f \cdot E_{max}$ (dove f = frequenza di sparpagliamento in Hz e E_{max} = valore massimo, in Volt, del potenziale applicato).

Dalla precedente espressione risulta che la I_{pk} è proporzionale alla concentrazione e, ad altri parametri costanti, alla radice quadrata della velocità di sparpagliamento v. Secondo P. Delahay [6], la determinazione della dipendenza di I_{pk} dalla radice di v dà un criterio sulla reversibilità oscillografica del processo: questo è tanto più irreversibile quanto maggiore è lo scostamento di questa dipendenza dall'andamento lineare.

(2) P. Zuman, «Chem. Listy», *45*, 65 (1951).
(3) R. Brdička, «Coll. Czechoslov. Chem. Communs.», *12*, 212 (1947).
(4) J. E. B. Randles, «Tans. Faraday Soc.», *44*, 327 (1948).
(5) A. Ševčik, «Coll. Czechoslov. Chem. Communs.», *13*, 349 (1948).
(6) P. Delahay, «J. Phys. & Colloid. Chem.», *54*, 630 (1950).

DISPOSITIVO SPERIMENTALE. – Il polarografo oscillografico usato è quello precedentemente descritto [7]. Le misure venivano effettuate in una cella polarografica normale; la temperatura veniva mantenuta costante entro $\pm$ 0,05° C da un opportuno termostato. Il riscaldatore del termostato era alimentato in corrente continua per evitare le correnti parassite.

Il rilevamento degli oscillogrammi veniva eseguito per mezzo di una macchina fotografica, formato 36×24 mm., con un'apertura relativa di ca. 5,6 e con obiettivo munito di lente addizionale da 20 cm. per ottenere un sufficiente ingrandimento degli oscillogrammi; il rilevamento di questi ultimi veniva fatto su pellicola Ferrania X2 A, sensibile all'azzurro.

La misura dei picchi di corrente, dell'ordine del millimetro, veniva eseguita mediante un micrometro comparatore Zeiss che permetteva di apprezzare il millesimo di millimetro. I rilevamenti oscillografici venivano eseguiti quando l'apparecchiatura era a regime termico e questo per poter disporre di un livello costante di amplificazione dei vari stadi. Il tempo necessario per raggiungere un regime costante era di ca. 1 ora.

RISULTATI SPERIMENTALI. – Per gli scopi della mia ricerca è stato necessario studiare il comportamento oscillografico dell'acido piruvico per quel che riguarda la dipendenza della I_{pk} dalla concentrazione e dalla radice di v e ciò allo scopo di fissare le migliori condizioni di lavoro. Infatti, nelle esperienze di cinetica è necessario conoscere la dipendenza della I_{pk} dalla concentrazione: la condizione ideale è che questa dipendenza sia lineare. Occorre ancora determinare i valori di $\sqrt{v}$ entro i quali l'andamento $I_{pk}/\sqrt{v}$ è sensibilmente lineare e questo per fissare il valore più opportuno del prodotto $f \cdot E_{max}$.

È stata fatta una serie di esperienze per tracciare la curva $I_{pk}/\sqrt{v}$ relativa all'acido piruvico di concentrazione circa $1 \cdot 10^{-3}$ M in tampone di Britton 1 N a pH = 10,3. Gli oscillogrammi corrispondenti sono ben sviluppati e facilmente misurabili. Sono stati usati tre valori della frequenza: f = 10,3; 15,5; 31 Hz. In corrispondenza di queste frequenze è stato opportunamente variato il valore di $E_{ma.}$ in modo che, complessivamente, i valori di $\sqrt{v}$ fossero compresi fra 0.3 e 0,7. Il periodo di gocciolamento era costante e di circa 6 sec.; tutte le esperienze sono state fatte a 25° C. Poiché il diagramma $I_{pk}/\sqrt{v}$ è risultato sensibilmente lineare, per tutte le successive esperienze è stato scelto il valore intermedio di frequenza f = 15,5 Hz.

La curva I_{pk}/C, determinata per lo stesso ambiente e con il valore suddetto di frequenza, presenta un andamento lineare fino a concentrazioni dell'ordine di $6\text{–}7 \cdot 10^{-3}$ M. I risultati precedenti mostrano che, nelle condizioni indicate, è verificata per l'acido piruvico l'equazione di Randles Ševčik e che il processo di riduzione decorre, dal punto di vista oscillografico, in modo sensibilmente reversibile. La determinazione del potenziale di picco, non molto agevole con l'apparecchiatura di cui disponevo, ha dato un valore in buon accordo con il potenziale di semigradino (— 1,3 V, rif. E.C.S.)

(7) P. FAVERO, « Suppl. alla Ricerca sci. », p. 61 (1952).

I risultati oscillografici sono in accordo con quelli polarografici di P. Zuman in soluzione tampone concentrata $NH_3/(NH_4)_2SO_4$ a pH compreso tra 9 e 10 ca.; l'acido piruvico presenta infatti due picchi ben separati che corrispondono ai due gradini di riduzione: il primo è dovuto [2] alla riduzione dell'anione della chetimmide, che si origina dalla reazione tra l'acido piruvico e l'ammoniaca ($\pi_{1/2} = -1{,}0$ V, rif. E.C.S.); il secondo corrisponde alla riduzione dell'anione dell'acido piruvico e si presenta ad un potenziale praticamente coincidente con quello del picco che si ottiene in tampone senza ammoniaca.

Il primo picco si presenta un po' più arrotondato del secondo e ciò può indicare [4] una leggera irreversibilità del relativo processo elettrodico.

Anche in presenza di NH_3, le curve I_{pk}/C per i due processi di riduzione hanno un andamento lineare fino a concentrazioni di acido piruvico dell'ordine di $6\text{–}7 \cdot 10^{-3}$ M. L'errore massimo riscontrato nelle esperienze non ha superato il $\pm 2\%$, mentre l'errore probabile si aggira intorno all'1%; la riproducibilità è quindi dello stesso ordine di quella polarografica.

La descrizione dell'apparecchiatura per lo studio di cinetiche rapide e i risultati ottenuti per la reazione tra acido piruvico e ammoniaca verranno quanto prima pubblicati.

Biologia. — *Modificazioni metaboliche dell'epatopancreas di «Callianassa laticauda» nella castrazione parassitaria* [*]. Nota di GIORGIO M. BAFFONI, presentata [**] dal Socio G. COTRONEI.

È noto che nei Crostacei decapodi alcuni parassiti (Protozoari, Epicaridei o Rizocefali) provocano modificazioni sui caratteri sessuali ed alterazioni metaboliche.

Nell'emolinfa di Decapodi brachiuri parassitati da Rizocefali sono state infatti riscontrate modificazioni delle costanti fisico-chimiche (aumento della viscosità [1] e abbassamento del pH [2]), alterazioni percentuali dei componenti chimici (aumento di ioni Ca e Mg [2], di lipocromi [3], di grassi [4] e di proteine [2]), reazioni linfocitarie [5] e sierologiche [6].

(*) Lavoro eseguito nel Laboratorio di Istologia ed Embriologia della Facoltà di Scienze di Roma.

(**) Nella seduta del 14 marzo 1953.

(1) A. DAMBOVICEANU, «C.R. Soc. Biol.», vol. 98°, p. 1633 (1928).

(2) A. DRIHLON e E. A. PORA, «Trav. Stat. Biol. Roscoff», vol. 14°, p. 111 (1936).

(3) G. C. ROBSON, «Quart. Journ. Micr. Sci.», vol. 57°, p. 267 (1911).

(4) G. SMITH, «Quart. Journ. Micr. Sci.», vol. 57°, p. 251 (1911).

(5) M. KOLLMANN, «Ann. Sci. Nat. Zool.», vol. 8°, p. 1 (1908).

(6) J. CANTACUZÈNE, «C. R. Soc. Biol.», vol. 74°, p. 109 (1913); A. CANTACUZÈNE, «C. R. Soc. Biol», vol. 93°, p. 1417 (1925); R. LÉVY, «Boll. Soc. Zool. France», vol. 48°, p. 291 (1923); R. LÉVY, ivi, vol. 49°, p. 333 (1924).

Altre ricerche, partendo dall'osservazione che l'azione del parassita si esercita nelle femmine arrestando i processi della vitellogenesi, si sono orientate sullo studio dei grassi, ma non hanno conseguito risultati concordi: mentre infatti nell'epatopancreas di *Carcinus* (Smith [7]) e in *Upogebia* (Hughes [8]) parassitati sono stati riscontrati aumento di grassi e diminuzione di glicogeno, in *Pagurus* parassitati da *Peltogaster* (Rizocefalo) è stata osservata invece diminuzione di grassi (Reinhard e Von Brand [9]) ed in *Pagurus* parassitati da *Stegophryxus* (Epicarideo) non è stata messa in evidenza alcuna differenza in grassi nei confronti con gli animali indenni (Reinhard, Von Brand e McDuffie [10]). Va osservato in proposito che queste ricerche sono state compiute su animali di specie diverse ed è noto che parassiti zoologicamente affini possono produrre effetti molto diversi in ospiti di specie differente (Caroli [11]); inoltre alcune di tali ricerche sono state eseguite su animali infestati da Epicaridei ed altre su animali parassitati da Rizocefali, ed è noto dalle più accurate ricerche morfologiche che i varî parassiti provocano nel loro ospite peculiari modificazioni sia nei caratteri sessuali primari (Baffoni [12]) che in quelli secondari [13].

Manca una ricerca sistematica intesa ad indicare quali siano le principali alterazioni metaboliche provocate dall'azione parassitaria e specialmente quali siano le modificazioni fisiologiche causate dai diversi parassiti su uno stesso ospite.

A tale proposito ho iniziato una serie di ricerche sull'epatopancreas di Crostacei decapodi indenni e parassitati allo scopo di:

1° verificare se l'azione del parassita si eserciti provocando alterazioni metaboliche sul proprio ospite; in tal caso

2° osservare se queste possano riportarsi a un viraggio verso particolari condizioni fisiologiche (quali, ad esempio, quelle che avvengono alla muta o nelle femmine in vitellogenesi);

3° accertare se, analogamente a quanto è stato dimostrato dalle ricerche morfologiche sui caratteri sessuali, i varî parassiti abbiano una azione specifica, se cioè i Rizocefali conseguano un effetto diverso dagli Epicaridei.

Ho scelto per questa ricerca l'epatopancreas poiché tale ghiandola è sede di notevoli attività metaboliche ed in essa si accumulano le sostanze di riserva dell'organismo [14]. Dopo preliminari tentativi su *Upogebia*, *Eu-*

(7) G. SMITH, « Quart. Journ. Micr. Sci. », vol. 59°, p. 267 (1913).

(8) T. E. HUGHES, « Journ. Exptl. Biol. », vol. 17°, p. 331 (1940).

(9) E. G. REINHARD e T. BRAND (Von), « Physiol. Zöol. », vol. 17°, p. 31 (1944).

(10) E. G. REINHARD, T. BRAND e S. F. MCDUFFIE, « Proc. Helmint. Soc. Washington », vol. 14°, p. 69 (1947).

(11) E. CAROLI, « Arch. Zool. Ital. », vol. 16°, p. 316 (1931).

(12) G. M. BAFFONI, « Arch. Ocean. e Limnol. », Anno 6°, fasc. 2–3, p. 213 (1949).

(13) Ved. G. M. BAFFONI, « Pubbl. Staz. Zool. Napoli », vol. 21°, p. 236 (1948).

(14) L. RENAUD, « Ann. Inst. Ocean. Paris », vol. 24°, p. 259 (1949); M. FLORKIN e G. DUCHATEAU, « Arch. Intern. Physiol. », vol. 53°, p. 267 (1943).

pagurus e *Leander*, ho scelto l'epatopancreas di *Callianassa laticauda* Otto perché esso si prestava meglio all'esperienze di isolamento per le determinazioni respiratorie, ma anche perché *Callianassa* a Napoli è di frequente infestata da un Epicarideo (*Ione thoracica*) e parassitata da un Rizocefalo (*Parthenopea subterranea*), dei quali è nota l'azione sulle gonadi (Baffoni [12]) e sui caratteri sessuali secondari (Caroli [11], Reverberi [15]).

L'epatopancreas di *Callianassa laticauda* è costituito da un paio di voluminose ghiandole tubulari ramificate-semplici, di epitelio monostratificato, che originano immediatamente dietro allo stomaco e decorrono lungo i lati dell'intestino (in cui sbocca il dotto escretore) per tutto il torace e parte dell'addome. Non essendo risultate differenze macro, microscopiche e ponderali tra la ghiandola destra e la ghiandola sinistra di uno stesso individuo, ho eseguito le esperienze sulla respirazione con una delle ghiandole (previamente pesata) e con l'altra ho eseguito le altre determinazioni; per le esperienze sul quoziente respiratorio (Q.R.) una ghiandola veniva utilizzata per la determinazione con KOH e l'altra per quella senza KOH [16]. Da altri animali (di cui il numero nella tabella) sono state prelevate ambedue le ghiandole per ulteriori determinazioni chimiche.

In questa Nota riferisco circa le esperienze eseguite sul metabolismo respiratorio (metodo di Warburg), sul tasso d'idratazione (essiccamento col metodo del *freezing dryng* sec. Gersh), sul contenuto in grassi eterosolubili (col Soxhlet) ed in azoto (*N*) totale (col Kjeldahl) [17].

Ho insistito nelle determinazioni dell'*N* avendo osservato nelle sezioni istologiche degli ovari di *Callianassa* infestate da *Ione* e di *Eupagurus* parassitati da *Peltogaster* (Rizocefalo) che gli ovociti possono conservare quelle tipiche vacuolosità in cui sono localizzati i grassi (Kraińska [18]) anche quando la vitellogenesi è affatto soppressa; ciò mi ha fatto supporre che l'arresto della sintesi del tuorlo sia da riferirsi piuttosto alla diminuzione di sostanze proteiche; è noto infatti che il tuorlo è costituito in gran parte da proteine [19]. Nelle determinazioni di confronto eseguite tra maschi e femmine e tra i periodi di piena attività sessuale (novembre) e del riposo stagionale (luglio), ho scelto gli animali infestati da *Ione* poiché questo è un ectoparassita; *Parthenopea* invece va considerato come un endoparassita poiché penetra nell'ospite, si sviluppa in esso e col suo complesso di radici

(15) G. Reverberi, « Pubbl. Staz. Zool. Napoli », vol. 19°, p. 225 (1943).

(16) Ho eseguito le determinazioni del consumo di CO_2 col metodo diretto secondo W. W. Umbreit. *Manometric techniques and tissue metabolism*. Cap. II (Minneapolis 1949).

(17) Le ricerche sono state eseguite a Napoli ed a Roma; ringrazio il prof. R. Dorhn, Direttore della Stazione Zoologica di Napoli, e il prof. S. Visco, Direttore dell'Istituto di Fisiologia Generale dell'Università di Roma, che mi hanno benevolmente ospitato; ringrazio il prof. G. Bacci e il cav. M. Santarelli per le premure nel procurarmi il non facile materiale di studio, il dott. F. Ghiretti e il dott. G. Tecce per i consigli e l'assistenza prestatami nella messa a punto dei metodi.

(18) M. Kańska, « Pubbl. Staz. Zool. Napoli », vol. 17°, p. 92 (1938).

(19) Ved. E. Fauré-Premiet, *La cinétique du développement* (Paris 1925).

aderisce intimamente agli organi interni (specialmente all'epatopancreas) dell'ospite, penetrando in essi sì da rendere impossibile il loro completo isolamento.

L'epatopancreas è stato di proposito prelevato da animali di eguale mole somatica (mm. 50 ± 0,5 di lunghezza), essendo noto [10] che in rapporto all'età (desunta dalle dimensioni) varia la concentrazione di grassi nei tessuti.

I valori dei rapporti percentuali, ricavati dalle diverse determinazioni eseguite (la media dei quali è riportata nella tabella) sono risultati molto concordi e statisticamente significativi.

TABELLA I.

	n°. individui	Peso fresco	Peso secco	Acqua %	Grassi % P. s.	*N* Tot. % P. s.	n°. det	O_2 in $\mu l/h/100$ mg P. s.	Q. R.
A)									
Callianassa indenni	92	16,465	5.951	64	32,5	5,2	16	48 ± 1	0,74
» infestate da *Ione*.	55	10,675	4,498	58	41	4,0	16	50 ± 0,9	0,69
» parassitate da *Parthenopea* . . .	37	6,100	2.000	67	29	4,75	10	48 ± 2	0,68
B)									
Call. indenni ♂♂	23	4,167	1,519	63,5	32	5,1	8	47,8	0,735
Call. indenni ♀♀	17	3.037	1,093	64	33	5,3	8	48,1	0,745
Call. infestate da *Ione* ♂♂	12	2,280	0,945	58,5	41	4,0	8	49,7	0,688
Call. infestate da *Ione* ♀♀	14	2,730	1,143	58	41	4,0	8	50	0,692
C)									
Luglio Indenni	92	16,465	5,951	64	32,5	5,2	16	48	
Luglio Parassitate . .	55	10,675	4.498	58	41	4	16	50	
Novembre Indenni	8	1,991	0,735	62	—	5,25	5	53	
Novembre Parassitate . .	6	1,446	0,608	58	—	3,85	5	50,5	

I risultati conseguiti (ved. tabella I *A*) sono:

a) il peso medio dell'epatopancreas di *Callianassa* infestate da *Ione* (0,190 g) è un po' maggiore che nei controlli non parassitati (0,180 g), mentre quello di *Callianassa* parassitate da *Parthenopea* è minore (0,164 g);

b) l'acqua (contenuta in 100 parti di peso fresco) nell'epatopancreas di *Callianassa* infestate da *Ione* è meno che nei controlli; è invece presente in maggior quantità in *Callianassa* parassitate dal Rizocefalo;

c) i grassi (riferiti a 100 parti di peso secco) sono più abbondanti negli animali infestati dall'Epicarideo che negli animali indenni; diminuiscono invece notevolmente negli individui parassitati dal Rizocefalo;

d) l'*N* (su 100 parti di peso secco) diminuisce in *Callianassa* parassitata; negli epatopancreas degli animali parassitati da *Parthenopea* l'*N* è in maggior quantità di quelli infestati da *Ione*; ciò può essere dovuto o all'accumulo di cataboliti o alla porzione di radici del parassita che è impossibile allontanare dagli organi interni dell'ospite;

e) non sono risultate sensibili differenze nel consumo di O_2 (espresso in µl/h a 20° C e riferito a 100 mg. di peso secco) tra animali indenni e parassitati; ho osservato invece variazioni statisticamente significative in rapporto all'età (dimensioni) degli animali (tabella II); il Q.R. negli animali parassitati presenta un lieve abbassamento che non raggiunge però la significatività statistica;

f) non sono state riscontrate evidenti modificazioni metaboliche tra individui normali e parassitati rispettivamente di sesso maschile e femminile (tabella I *B*) né nei diversi periodi di attività sessuale (tabella I *C*).

TABELLA II.

Callianassa	N.	Indenni	N.	Parassitate
mm. 45	6	µl 55 ± 1,5	4	µl 55 ± 2
mm. 50	16	48 ± 1	16	50 ± 0,9
mm. 60	4	40 ± 2	6	43 ± 1,3

Il significato di questi dati, in armonia con gli scopi che mi ero prefisso, dimostrano che i diversi parassiti esercitano sul proprio ospite azioni diverse.

Infatti in *Callianassa* parassitate da *Parthenopea*, in cui sono state messe in evidenza alterazioni più drastiche ed uniformi (sulle gonadi [12] e sui caratteri sessuali secondari [11], blocco dei processi della muta e scarsa vitalità [15]), le modificazioni metaboliche si presentano più gravi: aumenta l'acqua e diminuiscono peso, grassi ed azoto nell'epatopancreas. Analoghe modificazioni sono state riscontrate nell'epatopancreas di Decapodi durante il periodo di digiuno che precede la muta (Renaud [14]); si può pertanto ritenere che *Parthenopea* abbia una così marcata azione sottrattiva sull'ospite da causare in questi uno stato di acuta denutrizione che a sua volta, impe-

dendo l'accumulo delle sostanze di riserva necessarie, blocchi la muta. Ho osservato che l'ossidazione dell'epatopancreas (nel corso delle determinazioni dell'*N*) di *Callianassa* parassitate da *Parthenopea* (anche in esperienze eseguite di proposito a parità di peso secco e sgrassato) avviene più rapidamente (in 6 h) che in quelli di *Callianassa* infestate da *Ione* (in 24 h) e indenni (48 h); determinazioni sull'*N* proteico stabiliranno se questo comportamento è dovuto all'accumulo di cataboliti azotati nell'epatopancreas degli animali parassitati. Che le modificazioni osservate nell'epatopancreas di *Callianassa* parassitate da *Parthenopea* siano da riferirsi ad uno stato di inanizione, è documentato anche dall'abbassamento del Q. R.; il consumo in O_2 non varia, però ricordo che negli animali tenuti a digiuno, dopo un primo periodo di depressione, esso torna ai valori iniziali [20]; in proposito va notato che gli animali da me prescelti avevano parassiti maturi (l'infezione cioè risaliva almeno a qualche mese prima – ved. Reverberi [21]): perciò non sono state messe in evidenza alterazioni del consumo di O_2.

Nell'epatopancreas di *Callianassa* infestate da *Ione*, invece, conforme a quanto è stato osservato macroscopicamente (Reverberi [15]), i grassi aumentano; diminuiscono invece l'acqua e l'*N*. L'aumento in peso e la diminuzione in acqua possono essere riferite all'accumulo di grassi; ad una maggior utilizzazione di sostanze grasse può attribuirsi l'abbassamento del Q.R. L'aumento di grassi nell'epatopancreas degli animali infestati da *Ione* può essere spiegato con l'ipotesi di Smith [7] e cioè supponendo che la sottrazione esercitata da *Ione* stimoli l'ospite ad accumulare ed a metabolizzare una maggior quantità di grassi onde far fronte alle accresciute esigenze del proprio metabolismo; ciò è avvalorato dal fatto che le modificazioni morfologiche provocate da *Ione* sono di minor entità rispetto a quelle provocate da *Parthenopea* (in cui l'ospite non riesce a bilanciare l'azione sottrattiva esercitata dal parassita).

Da questo confronto emerge la dimostrazione della specificità d'azione del parassita sul proprio ospite o, se vogliamo, della specificità reattiva dell'ospite a parassiti diversi; la presente ricerca perciò concilia le discordanze dei risultati ottenuti dai precedenti Autori, che vanno riferite alla diversa azione dei varî parassiti sui loro ospiti.

Come spiegare però che le diverse alterazioni metaboliche provocate dai singoli parassiti possono indurre modificazioni sugli stessi caratteri morfologici? Per ciò che riguarda le gonadi, le modificazioni si spiegano senza troppa difficoltà con l'azione sottrattiva, più o meno intensa, dei varî parassiti; più difficile è invece l'interpretazione delle modificazioni dei caratteri sessuali secondari e specialmente della comparsa *ex novo* di caratteri sessuali femminili nel maschio; al riguardo va ricordato che la determinazione dei caratteri sessuali secondari nei Crostacei decapodi è poco stabile (ved.

(20) Ved. S. MORGULIS, *Fasting and undernutrition* (New York 1923), p. 133.
(21) G. REVERBERI, « Pubbl. Staz. Zool. Napoli », vol. 19°, p. 89 (1941).

Baffoni [22]) perciò non è improbabile che essa possa essere influenzata dalle variazioni metaboliche del mezzo interno; è poco plausibile che queste consistano nell'emissione, da parte di parassiti così diversi (Protozoari, Epicaridei o Rizocefali), di vari cataboliti che conseguano lo stesso effetto sull'ospite e, tanto meno, di un'identica sostanza tossica; d'altra parte esperienze di castrazione ed osservazioni morfologiche escludono che le gonadi di Crostacei emettano ormoni capaci di produrre alterazioni su tutti quei caratteri sessuali che vengono modificati dal parassitismo. Non essendo risultati dati in appoggio all'ipotesi che il metabolismo dei maschi vira verso quello del sesso femminile, l'unica indicazione per rispondere al quesito emerge dall'impoverimento di *N*, riscontrato negli epatopancreas di tutti gli animali parassitati, che denuncia una sottrazione di composti azotati esercitata da ambedue i parassiti; questa diminuzione non è in antitesi con l'aumento di proteine messo in evidenza nell'emolinfa [2]), anzi l'aumento di sostanze proteiche nel circolo sanguigno può essere dovuto proprio all'impoverimento di *N* dell'epatopancreas.

Sarebbero interessanti ricerche fisiologiche intese a precisare l'attività degli enzimi proteolitici in Crostacei decapodi indenni e parassitati, specialmente per interpretare le modificazioni riscontrate nelle ricerche sulla emolinfa [1,2,6]).

Sono in corso esperienze per precisare se la sottrazione di *N* riscontrata negli epatopancreas di *Callianassa* parassitate interferisca con alterazioni dell'apparato endocrino (ghiandola del *sinus* e organo *x*).

La presente ricerca vuole avere solo un carattere orientativo verso la soluzione del problema della castrazione parassitaria; le determinazioni da me eseguite sono limitate a valutazioni quantitative; qualitativamente ho cercato solo di verificare se in *Callianassa* infestate da *Ione* e in quelle parassitate da *Parthenopea* i grassi dell'epatopancreas presentassero variazioni di grandezza molecolare o di doppi legami; ma le determinazioni del *n. di saponificazione* e del *n. di jodio* sono risultate eguali (rispettivamente 166 177 e 83) sia nei maschi che nelle femmine, sia negli animali indenni che in quelli infestati da *Ione* o parassitati da *Parthenopea*.

In conclusione: parassiti diversi agiscono sul proprio ospite provocando alterazioni metaboliche differenti. È stato dimostrato che in *Callianassa* il Rizocefalo (*Parthenopea*) ha un'azione sottrattiva più imponente dell'Epicarideo (*Ione*) e tale da causare nell'ospite uno stato di inanizione che impedisce l'attuarsi delle mute. L'unico fenomeno provocato da ambedue i parassiti è la diminuzione di *N* totale nell'epatopancreas dell'ospite; ciò è indice di alterazioni al livello del metabolismo proteico.

(22) G. M. Baffoni, « Pubbl. Staz. Zool. Napoli », vol. 21°, p. 132 (1947).

COMMEMORAZIONI

Commemorazione del Socio Virgilio Ducceschi

Tenuta(*) dal Corrisp. ACHILLE RONCATO

Il 19 giugno 1952, il prof. VIRGILIO DUCCESCHI, Socio effettivo di questa Accademia, terminava la sua giornata terrena.

Da circa due anni le sue forze andavano progressivamente declinando. Si spense senza crisi acute di malattia, ma lentamente, come si spegne il lucignolo, quasi volesse lasciare questo mondo sommessamente, in punta di piedi, per non turbare con repentine ansie la vigile cura, di cui i suoi allievi lo circondavano.

Quantunque raggiunti i limiti di età egli potesse, non avendo più obblighi didattici e scientifici, ritornare nella sua Toscana, tra gli amati suoi parenti, Egli ha preferito non allontanarsi dall'ambiente dell'Ateneo Patavino a cui era vivamente attaccato.

Con Lui è scomparsa una nobile e caratteristica figura di uomo, di studioso e di scienziato.

Di animo profondamente buono era portato a concepire la vita in tranquilla serenità che si rifletteva in tutti i suoi atti, dalla cordialità del suo volto, fino alla compostezza e signorilità di ogni suo gesto.

Fu profondo conoscitore ed indagatore dell'animo umano, e da questa sua continua meditazione sugli eventi e sulle persone, data la sua naturale bontà, ne sortì uno spirito di grande compatimento e di grande benevolenza verso tutto e verso tutti e la capacità di assurgere facilmente a sintesi di giudizio scultoree ed acute che egli esternava con espressione finemente arguta e buona nel contempo.

Credo che il Ducceschi non abbia mai conosciuto, non solo sentimenti di odio, che per Lui sarebbe stato un atteggiamento spirituale addirittura assurdo, ma neppure sentimenti di semplice antipatia.

La calma che sembrava pervadere ogni sua azione, non era però acquiescenza, né lentezza. All'occorrenza sapeva agire con rapidità di decisione e con vivace energia sia pure, mai disgiunta, da una connaturale spontanea cortesia.

Questo l'uomo nei tratti più salienti della sua fisonomia psichica.

Nato a Scansano (provincia di Grosseto) il 1° settembre 1871, si laureò nel 1895 in Medicina e Chirurgia presso il R. Istituto di Studi superiori in Firenze.

(*) Nella seduta del 14 marzo 1953.

La sua preparazione ed il suo perfezionamento negli studi di Fisiologia, ai quali si sentiva portato fin dal periodo del suo studentato, si compirono, dapprima (1895-1900) nell'Istituto di Fisiologia di Firenze diretto dal prof. Giulio Fano e, successivamente, (1900–1906) presso quello di Roma, diretto dal prof. Luigi Luciani.

Frequentò anche il Laboratorio di Biochimica di Strasburgo allora diretto dal celebre prof. F. Hofmeister, ed il Laboratorio di Fisiologia del prof. Goltz e del prof. J. R. Ewald.

Essendo riuscito nella terna del concorso per la cattedra di Fisiologia di Palermo (1905), è stato nominato (1 gennaio 1907) professore di Fisiologia Sperimentale nell'Università di Cordoba (Rep. Argentina) e, a datare dal giugno dello stesso anno, anche professore di Psicologia Sperimentale nella stessa Università.

Offertagli (1908) la direzione del laboratorio di Fisiologia di Buenos Aires, declinò l'offerta per non rinunciare all'insegnamento cattedratico. A Cordoba egli fondò anche la cattedra di Biochimica, della qual materia tenne l'insegnamento per incarico.

Nel 1916 tornò in Italia per partecipare, come volontario, alla grande guerra, terminata la quale, riesciva primo classificato nel concorso di Fisiologia nell'Università di Sassari nel 1919 e di qui passava, l'anno seguente, per trasferimento alla cattedra di Fisiologia di Pavia.

Nel 1925 la Facoltà Medica di Padova chiese il trasferimento del Ducceschi. In quest'ultima sede egli rimaneva fino all'ottobre del 1941, epoca del suo collocamento a riposo per raggiunti limiti di età.

Nel 1942 fu nominato professore emerito.

Il Ducceschi durante il suo periodo di Direttore dell'Istituto di Fisiologia dell'Università di Cordoba, per la sua attività didattica e scientifica, per la sua abilità organizzativa, e per il suo alto grado di cooperazione, diretta ad intensificare i legami culturali tra l'Italia e l'Argentina, si meritò da quest'ultima Nazione il riconoscimento più ambito e lusinghiero per un didatta straniero, cioè la nomina a professore onorario dell'Università di Cordoba.

Oltre che membro effettivo di questa Accademia, era membro effettivo dell'Istituto Veneto di Scienze Lettere ed Arti, e di diverse altre Accademie, od Istituzioni culturali, italiane e straniere.

Era insignito della Stella d'oro al merito della Scuola.

L'operosità scientifica del Ducceschi verte preminentemente nel campo vastissimo della Fisiologia classica, continuando in tal modo le gloriose tradizioni della Scuola fisiologica romana del suo illustre Maestro, prof. Luigi Luciani; non trascurò, tuttavia, anche il campo della Biochimica, la nuova e feconda branca della Biologia, che, allorquando il Ducceschi iniziò la sua carriera, qui in Italia aveva ancora pochi cultori.

Accentuata in modo impareggiabile è stata in Lui una grande abilità sperimentale; nella vivisezione la Sua mano aveva veramente del fatato;

nel progettare e nell'organizzare i dispositivi, che meglio valessero ad assicurare la riuscita dei suoi esperimenti, la sua ingegnosità era inesauribile di felici risorse.

Il Ducceschi ha lasciato oltre 100 pubblicazioni sui più differenti campi della Fisiologia; ed in tutti Egli lasciò profonde ed indelebili tracce per aver raggiunti risultati spesso di larghissima portata ed in ogni caso freschi di originalità.

Dovendo attenermi, in questa commemorazione, ad una rapida sintesi, sono costretto a mettere in evidenza solo i fondamentali problemi da Lui intrapresi, accennando alla loro impostazione ed ai principali risultati ottenuti.

Sull'apparato circolatorio vanno soprattutto ricordate le sue ricerche sul sistema venoso. La fisiologia di questo sistema deve al Ducceschi contributi addirittura basali. Dopo aver preso in esame la funzione motoria automatica delle grosse vene prossime al cuore e di aver cercato di adattare la dottrina di Engelmann sull'origine miogena del ritmo cardiaco alla spiegazione delle molteplici forme di aritmia e di alloritmia, studiò l'innervazione delle vene e la regolazione nervosa del loro tono.

Tra le sue ricerche sulle vene, rifulgono in modo particolare, quelle che riguardano il meccanismo delle valvole venose. Egli ha potuto dimostrare che la capacità delle vene normali ad opporsi al riflusso del sangue, contrariamente all'opinione generale, è completa e che la resistenza alle lacerazioni dei velamenti valvolari, pur così sottili e delicati, è veramente straordinaria.

Il sistema nervoso è stato pure un campo preferito dei suoi studi. Classiche sono le sue ricerche sull'innervazione centrale dello « Sphincter ani externus »; sugli effetti della compressione di nervi, limitata a brevi tratti, e sui disturbi di senso consecutivi all'asportazione dei cordoni spinali posteriori sul cane.

Le conclusioni alle quali Egli è pervenuto in queste ultime ricerche, cioè quelle riguardanti la funzione dei cordoni di Burdach, conclusioni che furono portate, come primizia, nel Congresso internazionale di Psicologia del 1905, rappresentano, per le numerose, concordi conferme successivamente ottenute, una acquisizione ormai indiscussa della Fisiologia generale del sistema nervoso centrale.

Anche sulla fisiologia del movimento il Ducceschi ha dedicato la sua attività; ricorderò le sue pubblicazioni sulle relazioni fra i caratteri fisici degli apparati di moto in riposo e le manifestazioni dinamiche di essi, quelle sul senso muscolare nelle lesioni cerebellari e quelle, del tutto originali e di importanza veramente eccezionale, nell'ambito della Fisiologia comparata dei muscoli in generale e del volo in particolare. Esse sono state dirette a stabilire la natura della contrazione muscolare nel volo degli insetti. Contrariamente all'opinione allora diffusa, la quale ammetteva che il ritmo dei moti dell'ala degli insetti fosse l'effetto della successione di singole scosse elementari del muscolo, Egli dimostrò che tale ritmo è dovuto ad un impulso

motore unico e continuato, il quale dà luogo ad un tetano muscolare incompleto, analogo ad un tremore, che determina la vibrazione rapidissima dell'ala. Il meccanismo motorio dell'ala degli insetti è dunque fondamentalmente differente da quello dell'ala degli uccelli.

Le ricerche più interessanti del Ducceschi sull'apparato digerente sono state rivolte alle funzioni motrici dello stomaco. Una esposizione sintetica dei risultati principali di queste ricerche di largo respiro è stata fatta dallo stesso prof. Luciani nel I volume nel suo celebre trattato di Fisiologia umana.

Senza entrare nelle particolarità e senza riferire sui singoli, numerosi ed interessanti risultati parziali di queste ricerche, mi limiterò solo a citare al riguardo, le parole riassuntive del prof. Luciani il quale dice: « lo studio delle condizioni determinanti i movimenti dello stomaco e della coordinazione alle diverse fasi della digestione gastrica era molto incompleto prima delle ricerche del Ducceschi » e solo in base a queste ricerche si è potuto dimostrare che « esiste un perfetto accordo tra le funzioni chimiche e dinamiche del ventricolo, il che legittima il sospetto della esistenza nello stomaco di un congegno nervoso di autoregolazione del complesso delle sue funzioni ».

Arrivato a questo punto ed in base a questo legittimo sospetto è comprensibile come il Ducceschi abbia, in proseguo di tempo, estese le sue ricerche allo studio dell'innervazioni dello stomaco, sulla distribuzione dei singoli sistemi di fibre sensitive in questo organo e sulla innervazione totale bilaterale dello stomaco e di altri visceri.

Anche sulla Fisiologia degli organi di senso vertono studi e ricerche interessanti del Ducceschi.

Già nei primi anni della sua carriera scientifica risolse il problema, allora ancora *sub iudice*, se gli animali acquatici possiedono il senso dell'udito.

Durante la sua permanenza in Argentina, ed approfittando della presenza in quella regione di marsupiali, studiò la sensibilità cutanea di questi animali, la quale, per le particolari attitudini di questi animali, presentava un singolare interesse.

Degli apparati sensitivi della cute umana ha messo in relazione i diversi dispositivi istologici con le quattro differenti modalità sensitive della cute, riuscendo a definire il significato funzionale dei corpuscoli di Ruffini.

Nell'ambito della Fisiologia della respirazione ha studiato la natura del tono dei muscoli bronchiali e l'innervazione che presiede e modula tale tonicità; i rapporti fra centro della deglutazione e centro respiratorio ed i rapporti tra la zona olfattiva ed i centri respiratori bulbari.

Una serie di pubblicazioni del Ducceschi, che ebbero una larga diffusione, si riferisce al così detto *puna* o mal di montagna quale si osserva nelle condizioni puramente locali, climatologiche o di altra natura nelle Ande. Si tratta di una raccolta minuziosa di dati numerosi, fino allora completa-

mente non registrati, i quali offrirono al Ducceschi la possibilità di discutere su larga base di osservazioni dirette le varie teorie del mal di montagna.

Nella Cordigliera il Ducceschi ha potuto anche descrivere, in alcune persone, un insieme di sintomi generali che intervengono durante la discesa rapida da un'alta montagna, la così detta, in gergo spagnolo, *puna de la bajada*. Il fenomeno è stato descritto dal Ducceschi per la prima volta ed è stato poi riscoperto e studiato, alcuni anni dopo, da Jacobi anche nelle nostre Alpi.

È del Ducceschi il primo tentativo di modificare la normale distribuzione statistica dei sessi con l'azione degli ormoni sessuali.

Come abbiamo detto nell'operosità scientifica del Ducceschi, si riscontrano due indirizzi distinti, quello fisiologico e quello biochimico, corrispondenti a due diversi influssi su di Lui esercitati dai suoi due maestri: il Luciani e l'Hofmeister.

In Lui l'indirizzo fisiologico era evidentemente preponderante, ma anche quello biochimico non è di scarsa importanza.

Questa constatazione deve essere messa in evidenza, perchè si porta a riconoscere nel Ducceschi uno fra i pionieri della Biochimica in Italia.

Chiunque intraprenda ad occuparsi della Biochimica dei pigmenti, presenti negli organismi animali, non può a meno di non prendere punto di partenza dalle ricerche del Ducceschi sulle melanine e sulla loro origine, ricerche veramente basali, ricordate in tutti i principali trattati di Biochimica italiani ed esteri e pubblicate, nella loro prima Nota, proprio in questa Accademia nel lontano 1901.

Altre giovanili ricerche del Ducceschi di carattere biochimico e di pur notevole interesse, sono quelle sulla cistina, fatte in collaborazione con Embdem, che più tardi doveva affermarsi come uno dei più illustri biochimici mondiali, e quelle sul metabolismo del sistema nervoso.

Spetta al Ducceschi di essere stato fra i primi a studiare gli enzimi tissulari e particolarmente quelli epatici; anche in questo campo il Ducceschi è stato un precursore.

I cospicui problemi alimentari che emersero durante la prima grande guerra ha indotto il Ducceschi a compiere a guerra finita interessanti ricerche dirette a dimostrare la possibile vantaggiosa utilizzazione, dal punto di vista dell'alimentazione umana, di alcuni sottoprodotti industriali, dapprima destinati ad altri usi.

È noto che tra i principî alimentari le meno abbondanti e le più costose sono le sostanze proteiche. Orbene, dalla estrazione dell'olio dai semi di soja residuano pannelli costituiti quasi totalmente di sostanze proteiche, di alto valore nutritivo; tali pannelli venivano impiegati o per mangime animale od erano esportati all'estero, per poi, in notevole parte, ritornare in Italia confezionati sotto forma di cioccolata o di altri prodotti.

Il Ducceschi dopo aver pubblicata una completa monografia sulla storia e sul valore alimentare della soja - è noto che la soja è largamente usata

dai popoli dell'Asia orientale – dimostrò, con quell'abbondanza di esperimenti sull'uomo che la natura del problema esigeva, come l'aggiunta al pane comune di opportune quantità di proteine tratte dai pannelli di soja, non solo ne accresceva il valore nutritivo, ma non ne modificava assolutamente la digeribilità.

L'applicazione di tali risultati, sarebbe stata evidentemente di larga portata nell'ambito dell'alimentazione nazionale se non fossero sopravvenute particolari condizioni all'industria italiana degli oli di semi, per cui la soja non fu o fu scarsamente importata in Italia. Ciò non implica che i risultati del Ducceschi abbiano in sé un alto valore intrinseco, dottrinale e pratico.

Così pure il Ducceschi dimostrò la fisiologica digeribilità ed utilizzazione di quegli oli che chimici industriali avevano da poco ottenuto dalla saponificazione e successiva riesterificazione dei così detti oli lampanti, di quegli oli cioè che rappresentano un abbondante residuo nella raffinazione olearia, e che dovevano essere sprecati per usi tuttaltro che alimentari.

Per merito di queste ricerche è stata sancita in maniera irrefutabile la possibilità di utilizzazione a scopo alimentare di questo nuovo prodotto, il quale in tal modo, con tutti i crismi dal punto di vista sanitario, entrava ad arricchire le disponibilità alimentari della Nazione in sostanze lipidiche.

Negli uomini di scienza non è infrequente il constatare nella loro età matura, la tendenza a studi sulla storia delle scienze, tendenza rivolta particolarmente alla storia di quelle discipline scientifiche che erano state oggetto delle loro fatiche.

Così è avvenuto anche per il Ducceschi e così trova ragione di essere una sua magnifica monografia, con la quale si è chiuso il ciclo nelle sue pubblicazioni, stampata fra le Memorie dell'Istituto Veneto di Lettere, Scienze ed Arti, e riguardante l'Alimentazione umana nelle età preistoriche.

Non è il caso che io mi dilunghi a citare altre pubblicazioni del Ducceschi riguardante la storia della Biologia e della Medicina. A parte il loro contenuto concreto, esse dimostrano ancora una volta la versatilità del Ducceschi.

Con rapido volo ed in linee veramente sommarie ho tracciato l'operosità scientifica del Ducceschi, operosità ampia, profonda e variata, che riflette la profondità della sua mente e la vastità della sua coltura.

Ci resta da accennare sulla sua operosità didattica, perché per un cattedratico è questo un lato che non può essere tralasciato, senza rendere incompleta la comprensione della sua intera personalità.

Il Ducceschi fu un espositore efficace e di una chiarezza difficilmente raggiungibile.

Nelle sue lezioni i concetti più difficili uscivano dalle sue parole completi ed armoniosamente coordinati, con una semplicità di esposizione che non conosceva né ampollose raffinatezze, né astruse concisioni.

Egli si vantava di non essersi mai presentato alla lezione senza previa preparazione. La lezione, egli affermava, è il primo dovere di un insegnante ed è la pietra di paragone, con cui egli viene giudicato dai suoi uditori, i quali, egli asseriva, in questo giudizio sono sempre infallibili.

Sono certo d'aver lumeggiato la figura del Ducceschi, quale uomo, quale scienziato e quale didatta in modo inadeguato ai suoi meriti. Quanto egli fosse di animo nobile e quanto fosse tutto proteso verso lo sviluppo degli studi lo dimostra il suo ultimo atto testamentario.

Fu un atto di amore verso l'Università di Padova, lasciandola erede del suo patrimonio per la fondazione della Casa dell'Assistente, intendendo con questa sua disposizione testamentaria di «giovare ad una benemerita classe di studiosi che costituisce l'avvenire della scienza italiana e che è spesso costretta condurre una vita di duro sacrificio e di abnegazione [1]».

Così il prof. Virgilio Ducceschi chiudeva e coronava la sua vita di studio, di operosità e di bontà.

COMUNICAZIONI VARIE

Il Presidente porge il saluto della Classe e suo personale al prof. Gustav Doetsch dell'Università di Freiburg in Breisgau, che si trova attualmente a Roma per collaborare con il Socio Picone e con gli altri studiosi dell'Istituto Nazionale del Calcolo.

Il Presidente invita i Soci a formulare proposte in merito alla procedura da adottare circa la designazione da parte dell'Accademia al Consiglio Nazionale delle Ricerche, di terne di studiosi, tra i quali saranno prescelti i Professori da comandare presso il predetto Consiglio per compiti di ricerca scientifica.

Poiché la Classe, a grande maggioranza, propone di rinviare la formulazione di dette proposte e la relativa discussione ad altra seduta, il prof. Giordani, aderendo a tale desiderio, comunica che l'argomeno sarà nuovamente messo all'ordine del giorno nella prossima adunanza.

PERSONALE ACCADEMICO

Il prof. Giordani dà la parola al Socio Roncato che pronuncia l'orazione commemorativa del compianto Collega Virgilio Ducceschi, ricordandone la nobile figura di uomo e di scienziato.

Il Presidente ringrazia l'oratore per le sue elevate parole e rinnova la espressione del più vivo cordoglio dell'Accademia e suo personale per la scomparsa dell'insigne Collega.

(1) Dal suo testamento.

PLICHI SUGGELLATI

Il Presidente presenta quindi un plico suggellato del sig. Domenico Frascatani, consegnato all'Accademia il 26 febbraio c. a.

La Classe, constatata l'integrità dei sigilli, delibera che il plico sia conservato, a disposizione dell'interessato, nell'archivio accademico.

PRESENTAZIONE DI LIBRI

Il Socio Bompiani offre in omaggio e illustra il I volume degli « Atti del IV Congresso dell'Unione Matematica Italiana », e il II volume delle Opere Matematiche di Paolo Ruffini, curate dal compianto prof. Ettore Bortolotti, con le seguenti parole:

« Ho l'onore di presentare all'Accademia il primo volume degli *Atti del Quarto Congresso dell'Unione Matematica Italiana*, tenuto in Taormina dal 25 al 31 ottobre 1951.

Questo volume raccoglie i discorsi e le conferenze generali tenuti in detto Congresso: il secondo volume, di imminente pubblicazione, ne raccoglierà le comunicazioni.

Presento anche il secondo volume delle *Opere Matematiche di Paolo Ruffini*, curate dal compianto prof. Ettore Bortolotti. Questo volume ha una storia tragica: l'edizione appena completata di esso venne distrutta durante l'ultima guerra da un bombardamento, ad eccezione di pochissime copie di cui una ebbi già l'onore di presentare all'Accademia.

L'attuale edizione è una riproduzione fotostatica della precedente. È nel programma dell'Unione Matematica Italiana pubblicare un terzo volume, pure curato dal Bortolotti che conterrà il carteggio del Ruffini con i grandi analisti del suo tempo.

I due volumi oggi presentati, quello delle *Opere* di Luigi Bianchi (presentato da G. Sansone nell'ultima seduta), i due precedenti delle *Opere* di Felice Casorati e la *Bibliografia Matematica Italiana* per il 1950 (che avrà presto un seguito per il 1951) testimoniano dell'attività organizzativa della Unione Matematica Italiana sorretta, in parte, dal contributo finanziario (che speriamo continui) del Consiglio Nazionale delle Ricerche.

La vivace ripresa editoriale matematica è stata resa possibile dall'entusiasmo e dalla perizia tecnica con cui l'Editore dott. P. Cremonese ha affiancato le iniziative dell'Unione Matematica Italiana ».

Il Socio Panetti offre in omaggio e illustra una pubblicazione del Consiglio Nazionale delle Ricerche dal titolo *Convegno di studio sulla propulsione a reazione* che contiene i testi integrali delle relazioni presentate e un sintetico resoconto del citato Convegno, svoltosi a Milano il 21 aprile 1952, nella seconda Giornata della Scienza, indetta dal Consiglio Nazionale delle Ricerche in occasione della XXX Fiera di Milano.

Il Presidente ringrazia i Soci Bompiani e Panetti.

Il prof. Giordani, quindi, in assenza del Segretario Accademico prof. De Blasi, in questi giorni malato e al quale indirizza, anche a nome dei Colleghi, un fervido augurio di pronta guarigione, presenta le pubblicazioni inviate in omaggio all'Accademia, mettendo in particolare evidenza i « Rendiconti del secondo Colloquio Internazionale di Spettrochimica », che ebbe luogo dal 14 al 16 settembre 1951 a Venezia, per iniziativa del Centro di Ricerche Spettrochimiche dell'Associazione Italiana di Metallurgia, una pubblicazione della « Deutsche Akademie der Landwirtschaftswissenschaften » dal titolo: « Die Halle der Wissenschaft », il volume *Problemi della Fisica moderna* di Filippo Selvaggi, una pubblicazione dal titolo: *Symposium sobre algunos problemas matemáticos que se están estudiando en Latino América. Punta del Este 19-21 diciembre 1951*, il Catalogo dei Periodici della Biblioteca del Museo Civico di Storia Naturale di Milano e un lavoro del prof. R. Tschermak-Seysenegg, dal titolo: *Historischer Ruckblick auf die Wiederentdeckung der Gregor Mendelschen Arbeit.*

PRESENTAZIONE DI NOTE E MEMORIE

Presentano Note, per le pubblicazioni nei Rendiconti, i Soci Fabiani, Picone, Quilico, Semerano, Cotronei, Armellini, Segre e Desio.

Il Socio Abetti presenta una Memoria di M. G. Fracastoro dal titolo: *La corona solare del 25 febbraio 1952*.

La Classe propone di affidare l'esame di detta Memoria ad una Commissione composta dallo stesso Socio Abetti e dal Collega Silva.

Le seguenti Note saranno pubblicate in fascicoli successivi:

Cimino M. – Sulla variazione del profilo di alcune righe spettrali dal centro al lembo del Sole. Nota IV (pres. dal Socio G. Armellini).

Corti R. – Il significato del tessuto nucellare e la sua funzione organizzatrice durante lo sviluppo del seme delle Querci (pres. dal Socio A. Chiarugi).

Daboni L. – Applicazione al caso del cubo di un metodo per il calcolo per eccesso e per difetto della capacità elettrostatica di un conduttore (pres. dal Socio M. Picone).

Faedo S. – Sulla maggiorazione dell'errore nei metodi di Ritz e dei minimi quadrati (pres. dal Socio M. Picone).

Simonetta M. e Favini G. – Sulla cinetica della reazione tra nitroclororderivati aromatici e idrato potassico in soluzione in miscele acqua diossano (pres. dal Socio L. Cambi).

Concorsi banditi dal Consiglio Nazionale delle Ricerche

BANDO DI CONCORSO A SETTANTASEI BORSE DI STUDIO PRESSO ISTITUTI O LABORATORI NAZIONALI

IL PRESIDENTE

Veduto il proprio decreto in data 26 dicembre 1945, n. 297;

Vedute le deliberazioni 16 febbraio 1953, n. 551 e n. 1328, rispettivamente, del Consiglio di Presidenza e della Giunta Amministrativa;

DECRETA:

ART. 1. – Sono indetti i concorsi a 76 borse da usufruirsi presso istituti o laboratori italiani, per studi e ricerche nelle discipline attinenti alle scienze esatte, sperimentali e tecniche.

Le borse anzidette sono ripartite tra i gruppi di discipline afferenti ai comitati nazionali del CNR nel modo che segue:

a) per la fisica e la matematica: borse n. 10;
b) per la chimica: borse n. 12;
c) per l'ingegneria e l'architettura: borse n. 10;
d) per la biologia e la medicina: borse n. 24;
e) per l'agricoltura e la zootecnia: borse n. 10;
f) per la geologia, la geografia e la talassografia: borse n. 10.

I concorsi sono per titoli e sono indetti separatamente per ciascuno dei gruppi di discipline sopraindicati.

ART. 2. – La durata di ciascuna borsa, non superiore a mesi otto, e l'istituto o laboratorio presso il quale dovrà essere usufruita saranno determinati dalla competente commissione giudicatrice, in relazione agli studi e alle ricerche cui l'assegnatario avrà dichiarato, a norma del successivo art. 4, lett. *b*), di voler attendere: di regola, sarà prescelto un istituto o laboratorio fuori del luogo di residenza dell'assegnatario medesimo.

L'importo delle singole borse sarà di L. 20.000 (ventimila) lorde mensili, se il vincitore ne usufruisca nel luogo di sua residenza e sia fornito di emolumenti a carattere continuativo a carico dello Stato, o di altri enti o di privati; sarà, invece, di L. 40.000 (quarantamila) lorde mensili, se il vincitore ne usufruisca fuori del luogo di sua residenza e non sia fornito di alcuno degli anzidetti emolumenti: in ogni altro caso, l'importo, al lordo delle ritenute di legge, sarà stabilito insindacabilmente dal Presidente del CNR entro i limiti minimo e massimo sopraindicati, tenuto conto della località in cui la borsa stessa dovrà essere usufruita e di ogni altra opportuna circostanza.

Ai fini di cui al precedente comma, si considera come luogo di residenza del candidato non soltanto il luogo in cui egli abitualmente dimora, ma anche quello in cui egli debba abitualmente recarsi per motivi inerenti all'esercizio di qualche ufficio o professione.

Qualora, durante il periodo di godimento della borsa, si verifichino mutamenti nelle circostanze in base alle quali ne è stato determinato l'importo (attribuzione di emolumenti a carattere continuativo inizialmente non percepiti dall'assegnatario, perdita o diminuzione di tali emolumenti, cambiamento di residenza dell'interessato, ecc.), si farà luogo alle conseguenti opportune variazioni dell'importo medesimo.

ART. 3. – Possono prendere parte ai concorsi i cittadini italiani che abbiano conseguito la laurea presso un'Università o Istituto superiore italiano dopo il 31 dicembre 1947.

Non possono partecipare ai concorsi coloro che abbiano già usufruito di una delle borse di studio all'interno o all'estero conferite dal CNR. Possono, tuttavia, parteciparvi, salva l'osservanza del 2° comma, lett. *a*), dell'art. 9, coloro che abbiano usufruito di una delle borse all'interno o all'estero conferite dal CNR in base al bando 31 marzo 1952, sempreché non abbiano precedentemente usufruito di altra borsa del CNR e si trovino nelle condizioni di cui al primo comma del presente articolo.

Non possono in ogni caso partecipare ai concorsi i professori universitari di ruolo e il personale ad essi equiparato.

ART. 4. – Coloro che intendano partecipare ad uno dei concorsi di cui all'art. 1 devono farne domanda al Presidente del CNR, su carta legale da L. 32.

Oltre le proprie generalità e la propria residenza, il candidato deve indicare nella domanda:

a) a quale dei concorsi di cui all'art. 1 intenda partecipare;

b) gli studi e le ricerche che egli intende compiere;

c) l'istituto o laboratorio presso il quale egli desidererebbe svolgere gli studi e le ricerche di cui sopra.

La domanda deve essere corredata dei seguenti certificati, documenti e titoli:

1) certificato delle votazioni riportate nei singoli esami di profitto e in quello di laurea, con l'indicazione della data di quest'ultimo esame;

2) certificato di nascita;

3) certificato di cittadinanza italiana;

4) certificato di buona condotta;

5) certificato generale del casellario giudiziario;

6) almeno una memoria a stampa o dattiloscritta, in cinque copie;

7) qualsiasi altro titolo o documento atto a meglio comprovare la preparazione dell'aspirante nel campo degli studi e delle ricerche che egli intende compiere;

8) *curriculum* degli studi compiuti, in sei copie;

9) elenco, in sei copie, di tutti i certificati, documenti e titoli presentati al concorso.

I certificati debbono essere conformi alle vigenti disposizioni delle leggi sul bollo; quelli di cui ai nn. 2, 3, 4 e 5 debbono essere debitamente legalizzati; quelli di cui ai nn. 3, 4 e 5 debbono essere di data non anteriore a tre mesi dalla data di presentazione della domanda.

I documenti e i titoli voluminosi possono essere inviati al CNR in pacchi separati dal piego contenente la domanda e i certificati: tali pacchi dovranno portare, tanto sull'involucro esterno, quanto nell'interno, l'indicazione del nome, cognome e indirizzo del concorrente e del concorso al quale egli intende prendere parte.

La domanda e i relativi certificati, documenti e titoli devono pervenire al Consiglio nazionale delle ricerche – Segreteria generale – in Roma, Piazzale delle Scienze n. 7, non più tardi del 30 maggio 1953.

Non sarà tenuto conto delle domande che pervenissero dopo tale data, anche se presentate in tempo utile alle autorità locali o agli uffici postali o ferroviari; dopo la data medesima, non saranno accettati altri certificati, documenti o titoli, oltre quelli già presentati, né altre memorie o pubblicazioni, o parti di esse; né sarà comunque consentita la sostituzione di certificati, documenti, titoli, memorie o pubblicazioni già presentati, ancorché si tratti di sostituire memorie dattiloscritte o bozze di stampa con lavori stampati.

La data di arrivo al Consiglio nazionale delle ricerche delle domande e della relativa documentazione sarà accertata, a tutti gli effetti, dal bollo di archivio.

ART. 5. – Coloro i quali intendano eventualmente partecipare a due o più dei concorsi indicati nell'art. 1, debbono presentare tante domande separate quanti sono i concorsi ai quali desiderano prendere parte, allegando i certificati, i documenti e i titoli ad una sola di esse e facendo riferimento, nelle altre, alla domanda cui i certificati, i documenti e i titoli sono stati allegati.

Art. 6. – I concorsi sono giudicati da apposite commissioni composte ciascuna si tre o cinque membri, nominati dal presidente del CNR, uditi i comitati nazionali competenti.

È in facoltà delle commissioni di sottoporre i candidati ad una prova di esame o ad un colloquio secondo modalità da stabilirsi dalle commissioni medesime.

Nel loro giudizio, le commissioni terranno particolarmente conto dell'attitudine dei singoli candidati a svolgere compiti di ricerca scientifica, quale risulterà dai rispettivi titoli e, se del caso, dalla prova di esame o dal colloquio di cui al comma precedente.

Art. 7. – Al termine dei suoi lavori, ogni commissione presenterà una relazione contenente il suo giudizio intorno a ciascun concorrente e la graduatoria dei candidati giudicati meritevoli delle borse, esclusa ogni designazione *ex aequo*.

Ogni componente la commissione dispone di dieci punti: sono compresi nella graduatoria soltanto coloro i quali abbiano conseguito almeno gli otto decimi del totale dei punti di cui la commissione dispone.

Il giudizio di merito delle commissioni è insindacabile.

Art. 8. – Il CNR notifica a ciascun concorrente l'esito del concorso comunicandogli se sia stato o meno compreso nella graduatoria di merito, e in caso affermativo, il posto che vi occupa e la votazione riportata.

Qualora il candidato, pur essendo compreso tra i vincitori, non possa conseguire la borsa in applicazione del 2° comma, lett. *a*), dell'art. 9, il CNR ne dà opportuna notizia all'interessato con la comunicazione di cui al comma precedente.

Entro dieci giorni dalla notificazione dell'esito del concorso, i vincitori, salvo il caso previsto dal comma precedente, debbono dichiarare per iscritto, sotto la loro personale responsabilità e a pena di decadenza, se e quale impiego o ufficio abbiano alle dipendenze dello Stato o di altri enti o di privati, indicando, in caso affermativo, l'importo netto mensile della relativa retribuzione.

Art. 9. – Le borse sono conferite con decreto del Presidente del CNR ai candidati classificati ai primi posti della relativa graduatoria e secondo l'ordine della graduatoria medesima.

Peraltro:

a) nei riguardi dei candidati di cui al 2° comma dell'art. 3, non si farà luogo al conferimento di più di due borse, per ciascuno dei concorsi di cui all'art. 1;

b) nei riguardi degli assistenti universitari di ruolo o del personale ad essi equiparato, si farà luogo al conferimento della borsa soltanto quando il godimento di essa implichi l'effettiva e continuativa residenza dell'interessato in sede diversa da quella in cui esso presta servizio.

Art. 10. – Decadono dal diritto alla borsa:

a) coloro che esercitino un impiego od ufficio, che, a giudizio insindacabile del CNR, sia incompatibile con l'esatto adempimento degli obblighi di studio e di ricerca inerenti alla borsa medesima;

b) coloro che usufruiscano di altra borsa di studio, salvo che non rinunzino a questa ultima: pertanto, gli assegnatari delle borse del CNR, nel termine di quindici giorni dalla data della lettera di comunicazione del conferimento della borsa, dovranno, a pena di decadenza, dichiarare, sotto la loro personale responsabilità, se usufruiscano o meno di altra borsa di studio, e, ove ne usufruiscano, comprovare di avervi rinunziato;

c) coloro che, entro l'accennato termine di quindici giorni dalla data della lettera di assegnazione della borsa, non dichiarino di accettarla e coloro che, dopo averla accettata, non diano inizio, presso l'istituto o laboratorio loro assegnato ad entro la data che verrà all'uopo stabilita dal CNR, alle ricerche per le quali la borsa stessa è stata loro conferita.

ART. 11. – In caso di rinunzia o di decadenza dei vincitori, le borse potranno essere assegnate ai successivi graduati, secondo l'ordine della graduatoria.

ART. 12. – Coloro cui sia stata conferita la borsa assumono l'obbligo di attendere regolarmente alle ricerche e agli studi per i quali la borsa stessa è stata loro conferita, presso l'istituto o laboratorio cui sono stati assegnati, per tutta la durata di essa.

Gli assegnatari delle borse non possono assumere impieghi od uffici che siano incompatibili con l'esatto adempimento degli obblighi di cui al comma precedente. Pertanto, prima di assumere, durante il periodo di godimento della borsa, un qualsiasi impiego od ufficio, dovranno chiedere il preventivo assenso del CNR, comunicando, anche ai fini dell'eventuale applicazione dell'ultimo comma dell'art. 2, il preciso ammontare della retribuzione netta mensile che verrebbero a percepire.

ART. 13. – Il pagamento delle borse è effettuato in rate: il numero delle rate sarà stabilito all'atto dell'assegnazione dal Presidente del CNR, in relazione alla durata e all'ammontare di ciascuna borsa.

La prima rata sarà corrisposta non appena l'assegnatario avrà comprovato, mediante dichiarazione del direttore dell'istituto o laboratorio, presso il quale la borsa deve essere usufruita, di avere dato inizio agli studi inerenti alla borsa medesima, e ciascuna delle successive, a seguito di dichiarazione del detto direttore, dalla quale risulti che l'interessato ha ottemperato regolarmente ai suoi obblighi di studio.

Nella dichiarazione relativa al pagamento della seconda rata, il direttore non soltanto dovrà riferire se l'assegnatario abbia o meno regolarmente ottemperato ai suoi obblighi di studio, ma dovrà altresì esprimere il suo esplicito e motivato parere circa le attitudini dimostrate dall'assegnatario medesimo a svolgere compiti di ricerca scientifica e conseguentemente sull'opportunità o meno che egli continui a godere della borsa assegnatagli.

ART. 14. – In qualsiasi momento il CNR potrà dichiarare la decadenza dell'assegnatario dal godimento della borsa, qualora egli non ottemperi agli obblighi di cui all'art. 12. o si renda comunque responsabile di altra grave mancanza, ovvero non dimostri sufficiente attitudine a svolgere compiti di ricerca scientifica.

ART. 15. – Al compimento delle ricerche per le quali la borsa è stata loro conferita, gli assegnatari dovranno trasmettere al CNR una particolareggiata relazione intorno all'attività da essi svolta. La relazione dovrà essere corredata da una dichiarazione del direttore dell'istituto o laboratorio frequentato, contenente l'esatta indicazione del periodo complessivo durante il quale essi avranno atteso alle ricerche predette.

Ove i risultati delle ricerche compiute dal borsista siano stati o debbano essere oggetto di una memoria scritta, oltre alla relazione, dovrà essere trasmessa al CNR anche copia della memoria.

Il CNR si riserva di pubblicare, integralmente o in sunto, nella sua rivista, previo parere favorevole del direttore dell'Istituto o laboratorio presso cui l'interessato ha usufruito della borsa, la relazione o eventualmente la memoria scritta.

Art. 16. – In nessun caso si fa luogo alla restituzione dei documenti di rito allegati alle domande di ammissione al concorso.

I titoli si restituiscono immediatamente a coloro i quali siano state conferite le borse; a tutti gli altri concorrenti vengono restituiti solo dopo scaduto il 180° giorno dalla comunicazione dell'esito del concorso.

Roma, 2 marzo 1953.

Il Presidente
COLONNETTI

BANDO DI CONCORSO A DICIASSETTE BORSE DI STUDIO PRESSO ISTITUTI O LABORATORI ESTERI

IL PRESIDENTE

Veduto il proprio decreto in data 26 dicembre 1945, n. 297;

Vedute le deliberazioni 16 febbraio 1953, n. 551 e n. 1328, rispettivamente, del Consiglio di Presidenza e della Giunta Amministrativa;

DECRETA:

ART. 1. – Sono indetti i concorsi a 17 borse da usufruirsi presso istituti o laboratori esteri, per studi e ricerche nelle discipline attinenti alle scienze esatte, sperimentali e tecniche.

Le borse anzidette sono ripartite fra i gruppi di discipline afferenti ai comitati nazionali del CNR nel modo che segue:

a) per la fisica e la matematica: borse n. 4;
b) per la chimica: borse n. 4;
c) per l'ingegneria e l'architettura: borse n. 2;
d) per la biologia e la medicina: borse n. 3;
e) per l'agricoltura e la zootecnia: borse n. 2;
f) per la geologia, la geografia e la talassografia: borse n. 2.

I concorsi sono per titoli e sono indetti separatamente per ciascuno dei gruppi di discipline soprandicati.

ART. 2. – La durata di ciascuna borsa, non superiore a mesi sei, e l'istituto o laboratorio presso il quale dovrà essere usufruita, saranno determinati dalla competente commissione giudicatrice, in relazione agli studi e alle ricerche cui l'assegnatario avrà dichiarato, a norma del successivo art. 4 lettera *b*), di voler attendere.

L'importo di ogni borsa, comprensivo anche delle spese di viaggio, sarà stabilito insindacabilmente dal Presidente del CNR, tenuto conto dello Stato estero in cui la borsa stessa dovrà essere usufruita e di ogni altra opportuna circostanza: in ogni caso, detto importo non potrà eccedere la somma di L. 1.500.000.

Le borse di studio potranno, in tutto o in parte, essere sostituite, a giudizio insindacabile del CNR, con altre borse o assegni messi a disposizione degli studiosi e ricercatori italiani da enti, istituzioni, laboratori o istituti stranieri: a questo effetto, i concorrenti alle borse di studio del CNR assumono, pel fatto stesso della loro partecipazione al concorso, l'impegno di sottoporsi a tutti quegli adempimenti che fossero eventualmente richiesti dagli enti, istituzioni, laboratori o istituti di cui trattasi, per il conferimento delle borse o assegni predetti.

ART. 3. – Possono prendere parte ai concorsi i cittadini italiani, i quali abbiano conseguito la laurea, presso un'Università o un Istituto superiore italiano, anteriormente al 1° gennaio 1951.

Non possono tuttavia parteciparvi i professori universitari di ruolo e il personale ad esso equiparato, né coloro che abbiano già usufruito, presso istituti o laboratori esteri, di altra borsa del CNR.

ART. 4. – Coloro che intendano partecipare ad uno dei concorsi di cui all'articolo 1 devono farne domanda al Presidente del CNR, su carta legale da L. 32.

Oltre le proprie generalità e la propria residenza, il candidato deve indicare nella domanda:

a) a quale dei concorsi di cui all'art. 1 intende prendere parte;
b) gli studi e le ricerche che egli intende compiere;

c) l'istituto o laboratorio presso il quale egli desidererebbe svolgere gli studi e le ricerche di cui sopra;

d) quali siano le lingue straniere che egli è in grado di usare correntemente.

La domanda deve essere corredata dei seguenti certificati, documenti e titoli:

1) certificato delle votazioni riportate nei singoli esami di profitto e in quello di laurea, con l'indicazione della data di quest'ultimo esame;

2) certificato di nascita;

3) certificato di buona condotta;

4) certificato di cittadinanza italiana;

5) certificato generale del casellario giudiziario;

6) almeno una memoria a stampa o dattiloscritta, in cinque copie;

7) qualsiasi altro titolo o documento atto a meglio comprovare la preparazione dell'aspirante nel campo degli studi e nelle ricerche che egli intende compiere;

8) *curriculum* degli studi compiuti, in sei copie;

9) elenco, in sei copie, di tutti i certificati, documenti e titoli presentati al concorso.

I certificati debbono essere conformi alle vigenti disposizioni delle leggi sul bollo; quelli di cui ai nn. 2, 3, 4 e 5 debbono essere debitamente legalizzati; quelli di cui ai nn. 3, 4 e 5 debbono essere di data non anteriore a tre mesi dalla data di presentazione della domanda.

I documenti e i titoli voluminosi possono essere inviati al CNR in pacchi separati dal piego contenente la domanda e i certificati: tali pacchi dovranno portare tanto sull'involucro esterno, quanto nell'interno, l'indicazione del nome, cognome e indirizzo del concorrente e del concorso al quale egli intende prender parte.

La domanda e i relativi certificati, documenti e titoli devono pervenire al Consiglio nazionale delle ricerche – Segreteria generale – in Roma, Piazzale delle Scienze n. 7, non più tardi del *30 maggio 1953*.

Non sarà tenuto conto delle domande che pervenissero dopo tale data, anche se presentate in tempo utile alle autorità locali o agli uffici postali o ferroviari: dopo la data medesima, non saranno accettati altri certificati, documenti o titoli, oltre quelli già presentati, né altre memorie o pubblicazioni o parti di esse; né sarà comunque consentita la sostituzione di certificati, documenti, titoli, memorie o pubblicazioni già presentati, ancorché si tratti di sostituire memorie dattiloscritte o bozze di stampa con lavori stampati.

La data di arrivo al Consiglio nazionale delle ricerche delle domande e della relativa documentazione sarà accertata, a tutti gli effetti, dal bollo di archivio.

ART. 5. – Coloro i quali intendano partecipare a due o più dei concorsi indicati nell'art. 1 debbono presentare tante domande separate quanti sono i concorsi ai quali desiderano prendere parte, allegando i certificati, i documenti e i titoli ad una sola di esse e facendo riferimento, nelle altre, alla domanda cui i certificati, i documenti e i titoli sono stati allegati.

ART. 6. – I concorsi sono giudicati da apposite commissioni composte ciascuna di tre o cinque membri, nominati dal Presidente del CNR, uditi i Comitati nazionali competenti.

È in facoltà delle commissioni di sottoporre i candidati ad una prova di esame o ad un colloquio secondo modalità da stabilirsi dalle commissioni medesime.

Nel loro giudizio, le commissioni terranno particolarmente conto dell'attitudine dei singoli candidati a svolgere compiti di ricerca scientifica, quale risulterà dai rispettivi titoli e, se del caso, dalla prova di esame o dal colloquio di cui al comma precedente.

ART. 7. – Al termine dei suoi lavori, ogni commissione presenterà una relazione contenente il suo giudizio intorno a ciascun concorrente e la graduatoria dei candidati giudicati meritevoli delle borse, esclusa ogni designazione *ex aequo*.

Ogni componente la commissione dispone di dieci punti: sono compresi nella graduatoria soltanto coloro i quali abbiano conseguito almeno gli otto decimi del totale dei punti di cui la commissione dispone.

Il giudizio di merito delle commissioni è insindacabile.

ART. 8. – Il CNR notifica a ciascun concorrente l'esito del concorso, comunicandogli se sia stato o meno compreso nella graduatoria di merito e, in caso affermativo, il posto che vi occupa e la votazione riportata.

Entro dieci giorni dalla notificazione dell'esito del concorso, i vincitori debbono dichiarare per iscritto, sotto la loro personale responsabilità e a pena di decadenza, se e quale impiego o ufficio abbiano alle dipendenze dello Stato, o di altri enti o privati, indicando, in caso affermativo, l'importo netto mensile della relativa retribuzione.

ART. 9. – Le borse sono conferite con decreto del Presidente del CNR ai candidati classificati ai primi posti della graduatoria e secondo l'ordine della graduatoria medesima.

ART. 10. – Decadono dal diritto alla borsa coloro che, entro quindici giorni dalla comunicazione del conferimento della borsa stessa, non dichiarino di accettarla e coloro che, dopo averla accettata, non inizino, presso l'istituto o laboratorio loro assegnato ed entro la data che verrà all'uopo stabilita dal CNR, gli studi per i quali la borsa è stata loro conferita.

Decadono del pari dal diritto alla borsa coloro i quali usufruiscano di altra borsa di studio, salvo che non rinunzino a quest'ultima. A tale effetto, gli assegnatari, nel termine di quindici giorni di cui al comma precedente, dovranno, a pena di decadenza, dichiarare, sotto la loro personale responsabilità, se usufruiscano o meno di altra borsa di studio, e, ove ne usufruiscano, comprovare di avervi rinunziato.

ART. 11. – In caso di rinuncia o di decadenza dei vincitori, le borse potranno essere assegnate ai successivi graduati, secondo l'ordine della graduatoria.

ART. 12. – Coloro cui sia stata conferita la borsa assumono l'obbligo di attendere regolarmente alle ricerche e agli studi per i quali la borsa stessa è stata loro conferita, presso l'istituto o laboratorio cui sono stati assegnati, per tutta la durata di essa.

ART. 13. – Il pagamento delle borse è effettuato in rate: il numero delle rate e le modalità per il pagamento di ciascuna di esse saranno stabilite dal Presidente del CNR, all'atto dell'assegnazione della borsa.

Art. 14. – In qualsiasi momento il CNR potrà dichiarare la decadenza dell'assegnatario dal godimento della borsa, qualora egli non ottemperi agli obblighi di cui all'art. 12, o si renda comunque responsabile di altra grave mancanza, ovvero non dimostri sufficiente attitudine a svolgere compiti di ricerca scientifica.

ART. 15. – Al compimento delle ricerche per le quali la borsa è stata loro conferita, gli assegnatari dovranno trasmettere al CNR una particolareggiata relazione intorno all'attività da essi svolta. La relazione dovrà essere corredata da una dichiarazione del direttore dell'istituto o laboratorio frequentato, contenente l'esatta indicazione del periodo complessivo durante il quale essi avranno atteso alle ricerche predette.

Ove i risultati delle ricerche compiute dal borsista siano stati o debbano essere oggetto di una memoria scritta, oltre alla relazione, dovrà essere trasmessa al CNR anche copia della memoria.

Il CNR si riserva di pubblicare, integralmente o in un sunto, nella sua rivista, previo parere favorevole del comitato nazionale competente, la relazione o eventualmente la memoria scritta.

ART. 16. – In nessun caso si fa luogo alla restituzione dei documenti di rito allegati alle domande di ammissione al concorso.

I titoli si restituiscono immediatamente a coloro i quali siano state conferite le borse; a tutti gli altri concorrenti vengono restituiti solo dopo scaduto il 180° giorno dalla comunicazione dell'esito del concorso.

Roma, 2 marzo 1953.

Il Presidente
COLONNETTI

OPERE PERVENUTE IN DONO ALL'ACCADEMIA

presentate nella seduta del 14 marzo 1953

AKADEMIE (DEUTSCHE) DER LANDWIRTSCHAFTSWISSENSCHAFTEN ZU BERLIN. — *Die Halle der Wissenschaft*. Berlin, 1952. Pp. 127, in-8°.

Atti del quarto Congresso dell'Unione Matematica Italiana tenuto in Taormina nei giorni 25-31 ottobre 1951. Vol. I. Roma, Edizioni Cremonese, 1953. Pp. IX–324, in-8°.

BIBLIOTECA DEL MUSEO CIVICO DI STORIA NATURALE DI MILANO. *Catalogo dei periodici*. Milano, 1951. Pp. 35, in-8°.

BORTOLOTTI Ettore. – Vedi: RUFFINI Paolo.

CENTRO DI RICERCHE SPETTROCHIMICHE DELL'ASSOCIAZIONE ITALIANA DI METALLURGIA. — *Rendiconti del Secondo Colloquio Internazionale di Spettrochimica* (Venezia, settembre 1951). London, Pergamon Press, 1952. Pp. VII–200, in-8°.

CONSIGLIO NAZIONALE DELLE RICERCHE. — *Convegno di studio sulla propulsione a reazione. Milano, 21 aprile 1952*. (Seconda giornata delle scienza indetta dal C.N.R. in occasione della XXX fiera di Milano). Roma, 1952. Pp VI–79, in-8°.

ROLL-HANSEN Jens. — *Damping av jord til tomat*. Estr. da « Forskning og forsok i landbruket », 1952.

RUFFINI Paolo. — *Opere matematiche*. Pubblicate sotto gli auspici dell'Unione Matematica Italiana a cura del prof. dr. Ettore Bortolotti. Tomo secondo. Roma, Edizioni Cremonese, 1953. Pp. XIII–507, in-8°.

SELVAGGI Filippo. — *I problemi della fisica moderna*. Brescia, « La Scuola » ed., 1953. Pp. 164, in-8°.

Symposium sobre algunos problemas matemáticos que se están estudiando en Latino America. Punta del este 19-21 Diciembre 1951. Montevideo, Centro de Cooperación Científica de la Unesco para America Latina, 1951. Pp. 183, in-8°.

TSCHERMAK-SEYSENEGG ERICH. — *Historischer Rückblick auf die Wiederentdeckung der Gregor Mendelschen Arbeit*. Estr. da « Verhandlungen der Zoologisch-Botanischen Gesellschaft in Wien », vol. XCII, 1951.

D. DE BLASI e U. AMALDI.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

Seduta dell'11 aprile 1953

Presiede il Presidente FRANCESCO GIORDANI

NOTE PRESENTATE DA SOCI

Analisi numerica. — *Applicazione al caso del cubo di un metodo per il calcolo per eccesso e per difetto della capacità elettrostatica di un conduttore* (*). Nota di LUCIANO DABONI, presentata (**) dal Socio M. PICONE.

Il problema del calcolo della capacità elettrostatica di un conduttore è stato oggetto, anche di recente, di diverse ricerche specie nel caso di un conduttore avente forma di cubo.

G. Polya e G. Szegö (1) in un loro recentissimo trattato, dedicato alle disuguaglianze *isoperimetriche* della fisica matematica, dimostrano che la capacità elettrostatica C di un conduttore avente forma di cubo, il cui spigolo ha lunghezza a, verifica le seguenti limitazioni:

$$0{,}632\, a < C < 0{,}71055\, a.$$

Quasi contemporaneamente D. K. Reitan e T. J. Higgins (2) hanno pubblicato i risultati di una loro ricerca, con la quale essi ottengono il seguente valore approssimato per C:

$$C \simeq 0{,}6555\, a.$$

(*) Lavoro eseguito per l'Istituto Nazionale per le Applicazioni del Calcolo nell'Istituto Matematico dell'Università di Trieste.

(**) Nella seduta del 14 marzo 1953.

(1) G. POLYA e G. SZEGÖ, *Isoperimetric Inequalities in Matematical Physics*. Princeton University Press, Princeton, p. 76 (1951).

(2) Questi Autori indicano tale valore come un valore approssimato per difetto di C. Tale assai presumibile circostanza, che essi deducono dal procedimento numerico adottato, non viene però giustificata da una dimostrazione matematica. Vedi: D. K. REITAN e T. J. HIGGINS, *Calculation of the electrical Capacitance of a Cube*. « Journal of Applied Physics », vol. 22, n. 2, p. 223 e sgg. (febr. 1951).

Il problema è stato anche studiato nell'Istituto Nazionale per le Applicazioni del Calcolo da W. Gross [3] il quale, applicando in questo particolare problema uno dei metodi generali dovuti a M. Picone e relativi alla integrazione delle equazioni e dei sistemi di equazioni differenziali lineari, è pervenuto al seguente valore approssimato per C:

$$C \simeq 0{,}6464\, a$$

e con procedimento numerico ha conseguito la seguente maggiorazione per l'errore di approssimazione:

$$|\, C - 0{,}6464\, a \,| \leq 0{,}032\, a\,.$$

Scopo della presente Nota è l'applicazione al caso del cubo di un metodo per il calcolo della capacità elettrostatica di un conduttore, che si fonda su un teorema indicatomi dal prof. G. Fichera e che viene riportato nel primo paragrafo di questa Nota.

Il metodo consente di ottenere valori per eccesso e per difetto per la capacità di un conduttore. Nel caso del cubo i risultati ottenuti sono i seguenti:

$$0{,}645\, a < C < 0{,}676\, a.$$

È opportuno anche notare che l'applicazione del metodo ha condotto alla costruzione di una funzione u, armonica all'esterno del cubo ed infinitesima all'infinito, che sulla superficie del cubo stesso verifica la limitazione:

$$0{,}98 < u < 1{,}013.$$

Tale funzione può considerarsi come una soddisfacente approssimazione della funzione potenziale del cubo.

1. Considerazioni teoriche preliminari. – Sia Γ un insieme chiuso e limitato dello spazio euclideo a tre dimensioni. Sia D un qualsiasi dominio limitato la cui frontiera è costituita esclusivamente da punti regolari [4] e che contiene Γ nel suo interno.

Indicheremo con φ la funzione armonica continua in $\mathcal{C}D + \mathcal{F}D$ [5], armonica in $\mathcal{C}D$, infinitesima all'infinito e che su $\mathcal{F}D$ assume il valore 1. La funzione φ è il potenziale di $\mathcal{F}D$. Detta $\Sigma(R)$ una superficie sferica di raggio R a cui D è interno, per capacità $C(\Gamma)$ di Γ si definisce l'estremo inferiore dell'insieme numerico descritto da

$$C(D) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Sigma(R)} \frac{\partial \varphi}{\partial \nu}\, d\sigma \qquad \begin{array}{l}\text{(essendo la } \nu \text{ normale} \\ \text{interna a } \Sigma(R))\end{array}$$

(3) W. Gross, *Sul calcolo della capacità elettrostatica di un conduttore.* « Rendiconti Acc. Naz. dei Lincei »; Sc. fis. mat. e nat., vol. XII, fasc. 5, p. 496 e sgg. (maggio 1952).

(4) Per la definizione di punto regolare cfr. O. D. Kellogg, *Foundations of potential theory.* « F. Ungar Publ. Comp. », New York, pp. 328, 329.

(5) $\mathcal{C}D$ denota il complementare di D, $\mathcal{F}D$ la sua frontiera.

al variare di D nella classe dei domini limitati, aventi frontiera costituita da punti regolari, contenenti Γ nel loro interno.

Sussiste il seguente teorema:

Sia B *un qualsiasi insieme boreliano contenuto in* Γ *ed* $\alpha(E)$ *una funzione completamente additiva definita su tutti i boreliani* E *contenuti in* B, *tale che la funzione*

$$u(P) = \int_B \frac{d_Q \alpha}{\overline{PQ}}$$

sia positiva e continua in $\mathfrak{C}\Gamma + \mathfrak{F}\Gamma$ (6).

Sussistono le limitazioni:

$$(1) \qquad \frac{\alpha(B)}{\max_{\mathfrak{F}\Gamma} \int_B \frac{d_Q \alpha}{\overline{PQ}}} \leq C(\Gamma) \leq \frac{\alpha(B)}{\min_{\mathfrak{F}\Gamma} \int_B \frac{d_Q \alpha}{\overline{PQ}}}.$$

Decomponiamo lo spazio S_3 in cubi aventi lo spigolo uguale a 1 e, dato l'intero $n > 0$, ognuno di questi in $1/2^{3n}$ cubetti uguali fra di loro. Consideriamo, per ogni n, tutti i cubi di spigolo $1/2^n$ che hanno punti in comune con Γ. Sia R_n il dominio costituito da tutti questi cubi e da quelli che hanno con questi qualche punto in comune; R_n contiene Γ nel suo interno. Sia φ_n la funzione potenziale di $\mathfrak{F}R_n$. Si ha:

$$\frac{1}{4\pi} \int_{\mathfrak{F}R_n} u \frac{\partial \varphi_n}{\partial \nu} d\sigma = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathfrak{F}R_n} \frac{\partial u}{\partial \nu} d\sigma = \alpha(B)$$

e quindi

$$(2) \qquad \frac{\alpha(B)}{\max_{\mathfrak{F}R_n} u} \leq \frac{1}{4\pi} \int_{\mathfrak{F}R_n} \frac{\partial \varphi_n}{\partial \nu} d\sigma \leq \frac{\alpha(B)}{\min_{\mathfrak{F}R_n} u}.$$

Si ha intanto:

$$(3) \qquad \lim_{n \to \infty} \frac{1}{4\pi} \int_{\mathfrak{F}R_n} \frac{\partial \varphi_n}{\partial \nu} d\sigma = C(\Gamma).$$

Infatti la successione $\left\{ \frac{1}{4\pi} \int_{\mathfrak{F}B_n} \frac{\partial \varphi_n}{\partial \nu} d\sigma \right\}$ è decrescente (7) ed inoltre, detto D un qualsiasi dominio che contiene l'insieme chiuso Γ nel suo interno, i domini R_n riescono definitivamente contenuti in D e quindi è definitivamente:

$$\frac{1}{4\pi} \int_{\mathfrak{F}R_n} \frac{\partial \varphi_n}{\partial \nu} d\sigma < C(D).$$

(6) L'integrazione va intesa qui nel senso di Stieltjes.

(7) Cfr. la osservazione di M. PICONE in calce al citato lavoro di W. GROSS (vedi nota).

Si ha inoltre:

$$\lim''_{n\to\infty} (\max_{\mathfrak{F}R_n} u) \leq \max_{\mathfrak{F}\Gamma} u \tag{4}$$

$$\lim'_{n\to\infty} (\min_{\mathfrak{F}R_n} u) \geq \min_{\mathfrak{F}\Gamma} u. \tag{5}$$

Sia, infatti, P_n un punto di $\mathfrak{F}R_n$ tale che $u(P_n) = \max_{\mathfrak{F}R_n} u$. Dalla $\{P_n\}$ possiamo estrarre una successione $\{P_{n_k}\}$ tale che:

$$\lim_{k\to\infty} u(P_{n_k}) = \lim''_{n\to\infty} u(P_n).$$

Sia P_0 un punto di accumulazione per $\{P_{n_k}\}$; è ovvio che P_0 non può aver distanza positiva da Γ e quindi P_0 è in $\mathfrak{F}\Gamma$. Possiamo supporre che $\lim_{k\to\infty} P_{n_k} = P_0$.

Avremo allora:

$$u(P_0) = \lim''_{n\to\infty} u(P_n) \leq \max_{\mathfrak{F}\Gamma} u.$$

Analogamente si dimostra la (5). Dalle (2), (3), (4), (5) segue la tesi.

2. Applicazione al caso del cubo. – Sia Γ il cubo di spigolo unitario. Assunto $B \equiv B_1 \equiv \mathfrak{F}\Gamma$ ed $\alpha_1(E) = \text{mis}_{\text{sup}}\, E$ [8], sarà:

$$u(P) = u_1(P) = \int_{\mathfrak{F}\Gamma} \frac{d_Q \sigma}{PQ}.$$

Tale funzione verifica le condizioni del teorema del paragrafo 1 e, su $\mathfrak{F}\Gamma$, si ha:

$$7{,}6683 < u < 9{,}7681.$$

Si ricava quindi la seguente prima approssimazione per $C(\Gamma)$:

$$0{,}6142 < C(\Gamma) < 0{,}7824.$$

Tali limitazioni sono poco soddisfacenti ove si pensi che $\alpha_1(E)$ rappresenta, evidentemente, una distribuzione di cariche non aderente a quella effettiva.

Si può tuttavia cercare di moltiplicare $\alpha_1(B)$ per una costante k in modo tale che il valore ottenuto approssimi la carica totale sul conduttore, cioè $C(\Gamma)$.

A questo scopo divido ogni faccia del cubo Γ in 100 quadratini eguali (e di lato 0,1) ed indico con $\beta(E)$ la funzione la quale vale n per ogni insieme E che contenga n vertici della quadrettatura. Determino k imponendo la condizione $\int_{\mathfrak{F}\Gamma} [k\, u(P) - 1]^2\, d\beta =$ minimo, pongo cioè

(8) Con mis_{sup} intendiamo la misura superficiale.

$k = \dfrac{\int_{\mathfrak{F}\Gamma} u(P)\, d\beta}{\int_{\mathfrak{F}\Gamma} u(P)^2\, d\beta} = 0{,}1090$. Si ottiene in tal modo: $k\,\alpha_1(B) = 0{,}6542$ che, come confermeremo in seguito, è una buona approssimazione di $C(\Gamma)$.

Sia ora B_2 l'insieme costituito da tutti i punti che si trovano sugli spigoli del cubo Γ' concentrico ed omotetico al dato, avente lo spigolo uguale a 0,98. Porremo: $B = B_1 + B_2$ e denoteremo con α_1 la funzione che sugli insiemi di B_1 coincide con la α_1 già considerata e che è identicamente nulla su B_2, laddove con $\alpha_2(E)$ denoteremo la funzione identicamente nulla su B_2 e tale che sia $\alpha_2(E) = \text{mis}_{\text{lin}}\, E$ (9) per ogni boreliano E contenuto in B_2.

Pongo $\alpha(E) = k_1\,\alpha_1(E) + k_2\,\alpha_2(E)$ e $u(P) = \int_B \dfrac{d_Q\,\alpha}{\overline{PQ}}$.

Determino le costanti k_1 e k_2 imponendo la condizione

$$\int_{\mathfrak{F}\Gamma} [u(P) - 1]^2\, d\beta = \text{minimo}.$$

Ciò fornisce $k_1 = 0{,}07314$, $k_2 = 0{,}01917$.

La funzione $u(P)$ verifica le condizioni del teorema del paragrafo 1. La carica totale relativa alla funzione $u(P)$ testè considerata è la seguente: $\alpha(B) = 0{,}6643$, nel mentre che la $u(P)$ verifica su $\mathfrak{F}\Gamma$ le seguenti limitazioni $0{,}9449 < u(P) < 1{,}0280$.

Pertanto la (1) fornisce, in questo caso,

(7) $$0{,}6461 < C(\Gamma) < 0{,}7030.$$

Giova notare che le limitazioni indicate dalla (7) già migliorano quelle dovute a G. Polya e G. Szegö sopra riportate.

Risultati ancora più soddisfacenti si ottengono assumendo sempre $B = B_1 + B_2$ ed $\alpha(E) = k_1'\,\alpha_1(E) + k_2'\,\alpha_2(E) + k_3'\,\alpha_3(E)$, dove α_1 ed α_2 sono le due funzioni di insieme già sopra considerate ed $\alpha_3(E)$ è la funzione che vale n se l'insieme E contiene n vertici di Γ'. Posto allora:

(8) $$u(P) = \int_B \frac{d_Q\,\alpha}{\overline{PQ}}$$

e determinate le costanti k_1', k_2', k_3' imponendo la condizione

$$\int_{\mathfrak{F}D} [u(P) - 1]^2\, d\beta = \text{minimo};$$ si ottiene:

$$k_1' = 0{,}077125\,, \qquad k_2' = 0{,}016036\,, \qquad k_3' = 0{,}0014295.$$

La $u(P)$ pertanto verifica le condizioni del paragrafo 1. Per essa sussistono, su $\mathfrak{F}\Gamma$, le limitazioni:

(9) $$0{,}98 < u(P) < 1{,}013.$$

(9) Con mis_{lin} intendiamo la misura lineare.

Si ha inoltre: $\alpha(B) = 0{,}6627$ e quindi, per la (1):

$$0{,}654 < C(\Gamma) < 0{,}676. \tag{10}$$

Le (9) ci assicurano che la funzione (8), armonica ed infinitesima all'infinito, approssima soddisfacentemente la funzione potenziale di Γ in tutto $e\Gamma$.

Credo opportuno riportare la tabella dei valori numerici di u (P). Date le simmetrie di cui gode u (P) basta considerare i punti di una faccia di Γ che, rispetto ad un sistema di assi coordinati cartesiani ortogonali col centro nel centro della faccia e paralleli ai lati, hanno coordinate $0 \leq x \leq 0{,}5$, $0 \leq y \leq x$. Mi limiterò a riportare solo i valori relativi ai punti $x_m = m/10$, $y_n = n/10$ $(m, n = 0, 1 \cdots 5)$ (10).

0,5						1,0033
0,4					0,9848	0,9923
0,3				0,9907	0,9906	0,9990
0,2			0,9998	0,9951	0,9936	1,0066
0,1		1,0057	1,0022	0,9988	0,9939	1,0115
$y = 0$	1,0077	1,0067	1,0039	1,0000	0,9988	1,0130
	$x = 0$	0,1	0,2	0,1	0,4	0,5

Analisi numerica. — *Sulla maggiorazione dell'errore nei metodi di Ritz e dei minimi quadrati.* Nota di SANDRO FAEDO, presentata (*) dal Socio M. PICONE.

1. Consideriamo il problema differenziale

$$\begin{cases} L(y) = \frac{d}{dx}\left[\theta(x)\frac{dy}{dx}\right] + A(x)\,y = f(x) \\ y(a) = y(b) = 0, \end{cases} \tag{1}$$

dove $\theta(x) > 0$, $A(x)$ e $f(x)$ sono funzioni continue assegnate sull'intervallo (a, b); scelto un opportuno sistema di funzioni $\{\varphi_k(x)\}$ completo su (a, b), per avere l'n^{ma} approssimazione $Y_n(x)$ del metodo dei minimi quadrati – nella forma datagli da M. Picone – si considerano il funzionale

$$J(y) = \int_a^b [L[y] \quad f(x)]^2 dx + y^2(a) + y^2(b)$$

e le funzioni

$$y_n(x) = \sum_{k=1}^{n} a_{k,n}\,\varphi_k(x).$$

(10) Tutti i calcoli interessanti il problema sono stati accuratamente controllati all'I.N.A.C. dalla dott. M. J. de Schwarz.

(*) Nella seduta del 14 marzo 1953.

Per ogni n la $Y_n(x)$ è la $y_n(x)$ che rende minima la funzione $J(y_n)$ delle variabili $a_{1,n}, a_{2,n}, \cdots, a_{n,n}$.

M. Picone [1] ha dimostrato il

TEOREMA I. – *Se per il problema* (1) *l'unità non è un autovalore; se i coefficienti di* $L(y)$ *e* $f(x)$ *hanno derivate continue fino all'ordine* $2+\nu$*; se si sceglie il sistema*

$$\left\{ \cos k\frac{2\pi(x-a)}{b+\delta-a}\ ,\quad \operatorname{sen} k\frac{2\pi(x-a)}{b+\delta-a} \right\} \qquad (k=0,1,2,\cdots), \tag{2}$$

dove $\delta > 0$ *è una costante arbitrariamente fissata; allora l'errore puntuale massimo di* $Y_n(x)$ *e di* dY_n/dx *è infinitesimo per* $n \to \infty$ *dell'ordine almeno di* $1+\nu$ *rispetto a* $1/n$.

Successivamente [2] ho dimostrato che tale proprietà continua a sussistere anche se, in luogo del sistema detto, se ne prendono altri fra cui, ad esempio il sistema delle potenze

$$1, x, x^2, \cdots, x^k, \cdots \tag{3}$$

Se invece si vuol risolvere il problema (1) col metodo di Ritz, per il quale occorre che il sistema $\{\varphi_k(x)\}$ verifichi per ogni k le condizioni

$$\varphi_k(a) = \varphi_k(b) = 0, \tag{4}$$

si può assumere il sistema

$$\varphi_k(x) = \operatorname{sen} k\pi\frac{x-a}{b-a} \qquad (k=1,2,\cdots). \tag{5}$$

M. Picone, con lo stesso procedimento con cui aveva ottenuto il teorema I, ha dimostrato per il metodo di Ritz il

TEOREMA II. – *Se si sceglie il sistema* (5) *e il minimo autovalore positivo del problema* (1) *è maggiore di* 1; *allora, se i coefficienti di* $L(y)$ e $f(x)$ *sono derivabili fino ad un ordine abbastanza alto, l'errore puntuale massimo dell'*n^{ma} *approssimazione del metodo di Ritz è infinitesimo almeno dell'ordine* $3/2$ *rispetto a* $1/n$.

Anche supponendo che i coefficienti di $L(y)$ *e* $f(x)$ siano analitici il teorema II non permette di assicurare per l'errore suddetto un ordine di infinitesimo maggiore di $3/2$.

Se invece del sistema (5) si assumono i sistemi

$$\{(x-a)(b-x)x^k\} \qquad (k=0,1,2,\cdots), \tag{6}$$

(1) M. PICONE, *Sul metodo delle minime potenze ponderate e sul metodo di Ritz per il calcolo approssimato nei problemi della Fisica-Matematica*. « Rend. Circolo Mat. Palermo », T. LII, 1928.

(2) S. FAEDO, *Sul metodo di Ritz e su quelli fondati sul principio dei minimi quadrati per la risoluzione approssimata dei problemi della Fisica-Matematica*. « Rend. Matematica », Roma 1947.

oppure

$$(7) \qquad \left\{ (x-a)(b-x) \operatorname{sen} k\pi \frac{x-a+\delta}{b+2\delta-a} \right\} \qquad (\delta > 0 \, ; \, k = 1, 2, \cdots)$$

oppure

$$(8) \qquad \left\{ (x-a)(b-x) \cos k \frac{2\pi(x-a)}{b+\delta-a} \, , \quad (x-a)(b-x) \operatorname{sen} k \frac{2\pi(x-a)}{b+\delta-a} \right\}$$

$$(\delta > 0 \quad ; \quad k = 0, 1, 2, \cdots),$$

o altri da me indicati [2], tutti verificanti le (4), si ha il

TEOREMA III. – *Se si sceglie il sistema* (6) [*oppure* (7) *o* (8)] *e il minimo autovalore positivo del problema* (1) *è maggiore di* 1; *se i coefficienti di* L (y) ed $f(x)$ *hanno derivate continue fino all'ordine* $2 + \nu$, *allora l'errore puntuale massimo dell'*n^{ma} *approssimazione del metodo di Ritz è infinitesimo almeno dell'ordine di* $1 + \nu$ *rispetto a* $1/n$.

Il teorema III corrisponde quindi, nel metodo di Ritz, al teorema I del metodo dei minimi quadrati, quando si trascuri l'approssimazione della derivata.

2. Nei sistemi (2), (7) ed (8) compare la costante positiva δ che assicura che il periodo delle funzioni trigonometriche considerate è maggiore dell'ampiezza dell'intervallo (a, b), mentre per la completezza di tali sistemi su (a, b) basterebbe che fosse $\delta \geqq 0$. Il sistema (3) [e così pure il fattore essenziale x^k di (6)] non dipendono invece dall'intervallo (a, b) e vien naturale di presumere che i teoremi I e III si possano allargare facendo nei sistemi (2), (7) ed (8) $\delta = 0$; ciò porterebbe ad ampliare il teorema II, il cui sistema (5) equivale a quello (2) in cui si ponga $\delta = 0$.

Le dimostrazioni dei teoremi I e III, fondate essenzialmente sul fatto che sia $\delta > 0$, non permettono di vedere cosa accada per $\delta = 0$.

Scopo di questa Nota è di provare che i *teoremi* I *e* III *non si possono ampliare al caso* $\delta = 0$.

Così viene ancora una volta sottolineata l'importanza della scelta opportuna dei sistemi $\{ \varphi_i(x) \}$, potendo accadere che sistemi che naturalmente si impongono [come il sistema (5) verificante le (4) per il metodo di Ritz] portino a una convergenza assai meno rapida di altri sistemi che, per la loro più complessa struttura, potrebbero apparire *a priori* meno opportuni [ad esempio i sistemi (7) ed (8) nei confronti di (5)].

3. Consideriamo il seguente caso particolare del problema (1)

$$\theta(x) = 1 \quad , \quad A(x) = 0 \quad , \quad f(x) = x \quad , \quad a = 0 \quad , \quad b = \pi,$$

cioè il problema

$$(1') \qquad y'' = x \quad , \quad y(0) = y(\pi) = 0,$$

che è privo di autovalori ed ha l'unica soluzione

$$y = \frac{x(x^2 - \pi^2)}{6}. \tag{9}$$

Risolviamo il problema (1') col metodo di Ritz scegliendo il sistema

$$\varphi_k(x) = \operatorname{sen} kx \qquad (k = 1, 2, \cdots). \tag{5'}$$

Posto $y_n = \sum_{r=1}^{n} a_r \operatorname{sen} rx$, per avere l'$n^{ma}$ approssimazione del metodo di Ritz si devono determinare le a_k in modo che sia

$$\int_0^{\pi} [y_n'' - x] \operatorname{sen} kx\, dx = 0 \qquad (k = 1, 2, \cdots, n). \tag{10}$$

Avendosi

$$y_n'' = -\sum_{r=1}^{n} r^2 a_r \operatorname{sen} rx,$$

il sistema (10) diviene

$$\int_0^{\pi} \left[-\sum_{r=1}^{n} r^2 a_r \operatorname{sen} rx - x \right] \operatorname{sen} kx\, dx = -k^2 a_k \int_0^{\pi} \operatorname{sen}^2 kx\, dx - \int_0^{\pi} x \operatorname{sen} kx\, dx = 0,$$

ossia

$$k^2 \frac{\pi}{2} a_k = (-1)^k \frac{\pi}{k};$$

ne segue

$$a_k = \frac{2(-1)^k}{k^3}$$

e l'n^{ma} approssimazione del metodo di Ritz è data da

$$y_n(x) = 2 \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k^3} \operatorname{sen} kx.$$

Sviluppando la funzione $y(x)$ data dalla (9) in serie di Fourier sull'intervallo $(0, \pi)$ si ha, con convergenza uniforme,

$$\frac{x(x^2 - \pi^2)}{6} = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \operatorname{sen} kx,$$

dove è

$$b_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{x(x^2 - \pi^2)}{6} \operatorname{sen} kx\, dx = a_k,$$

come subito si verifica. Perciò l'errore puntuale massimo dell'n^{ma} approssimazione del metodo di Ritz è

$$\rho_n = \max_{0 \leq x \leq \pi} \left| \frac{x(x^2-\pi^2)}{6} - 2\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k^3} \operatorname{sen} kx \right| \leq \max_{0 \leq x \leq \pi} 2 \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^3} \operatorname{sen} kx \right| .$$

Procuriamoci ora una limitazione inferiore per ρ_n. Si ha

$$\rho_{2n} \geqq 2 \left| \sum_{k=2n+1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^3} \operatorname{sen} k\frac{\pi}{2} \right| = 2 \left| \sum_{k=n}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k+1)^3} \right| .$$

La serie

$$\sum_{k=n}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k+1)^3}$$

è a termini di segno alterno e in valore assoluto decrescenti; perciò è

$$\left| \sum_{k=n}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k+1)^3} \right| \geqq \left| \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)^3} + \frac{(-1)^{n+2}}{(2n+3)^3} \right| = \frac{1}{(2n+1)^3} - \frac{1}{(2n+3)^3} = \frac{2(12n^2+24n+13)}{(2n+1)^3(2n+3)^3} .$$

Ne segue

$$\rho_{2n} > \frac{4(12n^2+24n+13)}{(2n+1)^3(2n+3)^3} .$$

Il secondo membro è infinitesimo, per $n \to \infty$, di ordine 4 rispetto a $1/n$; perciò ρ_n è infinitesimo di ordine ≤ 4.

Nel caso particolare considerato i coefficienti di $L(y)$ ed $f(x) = x$ sono analitici; perciò la tesi del teorema III non può sussistere quando si scelga il sistema (5), perchè ρ_n dovrebbe essere infinitesimo di ordine superiore a ogni ordine finito, mentre invece è d'ordine ≤ 4.

4. Quanto si è dimostrato per il metodo di Ritz vale anche per il metodo dei minimi quadrati. Infatti volendo risolvere il problema (1') col metodo dei minimi quadrati scegliendo il sistema (5') [equivalente al sistema (2) quando si faccia $\delta = 0$] si pone ancora $y_n = \sum_{r=1}^{n} a_r \operatorname{sen} rx$ e si cerca il minimo di

$$J(y_n) = \int_0^{\pi} [y_n'' - x]^2 \, dx .$$

Si ha

$$\frac{\partial J(y_n)}{\partial a_k} = 2 \int_0^{\pi} [y_n'' - x] \operatorname{sen} kx \, dx = 0$$

che coincide con la (10). Perciò le approssimazioni dei due metodi coincidono e le considerazioni svolte nel n. 3 per il metodo di Ritz valgono anche per quello dei minimi quadrati.

Analisi funzionale. — *Sulla compattezza di successioni di funzioni reali*(*). Nota di CARLO PUCCI, presentata(**) dal Socio M. PICONE.

Ad una funzione di una variabile reale corrisponde nel piano un insieme di punti, il suo grafico, e quindi ad una successione di funzioni corrisponde una successione di insiemi. Ponendoci da questo punto di vista e basandoci su qualche elementare nozione topologica si può trattare il problema della compattezza di una successione di funzioni reali con considerazioni semplici e di non difficile interpretazione geometrica. Si possono così generalizzare i noti risultati ottenuti in tal campo da Giulio Ascoli e Cesare Arzelà ed inoltre si determinano le condizioni necessarie e sufficienti perché una successione di funzioni, anche non continue, converga ad una funzione continua e dotata di derivate fino a un ordine assegnato.

Nella presente Nota mi limito allo studio di funzioni di una sola variabile ed alle loro derivate prime. Risultati molto più generali sono contenuti in una mia Memoria di prossima pubblicazione. Fondandomi su tali risultati ho potuto ottenere nuovi teoremi di esistenza nella teoria delle equazioni a derivate parziali.

1. Riportiamo preliminarmente quelle nozioni di topologia sulle quali è fondato il presente lavoro. Indichiamo con S_r uno spazio euclideo ad r dimensioni, con x un punto di S_r, con E_n, $n = 1, 2, \cdots$, un insieme non vuoto di punti di S_r. Indichiamo con $\overline{xE}_n$ la distanza del punto x dall'insieme E_n ovverosia l'estremo inferiore delle distanze del punto x dai punti di E_n.

Diciamo che un punto x appartiene *al limite superiore* della successione $\{E_n\}$ se $\lim'_{n\to\infty} \overline{xE}_n = 0$ (1).

Diciamo che x appartiene al *limite inferiore* di $\{E_n\}$ se $\lim''_{n\to\infty} \overline{xE}_n = 0$ (2). Se il limite superiore ed inferiore della successione $\{E_n\}$ coincidono si dice che la successione $\{E_n\}$ è *convergente*.

Gli insiemi E_n si dicono *equilimitati* se la loro somma è un insieme limitato.

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto Nazionale per le Applicazioni del Calcolo.

(**) Nella seduta dell'11 aprile 1953.

(1) Il punto x è quindi, secondo una definizione di M. PICONE, un elemento di compattezza della successione $\{E_n\}$: *Due conferenze sui fondamenti del calcolo delle variazioni*. «Giorn. Mat. Battaglini», IV, 80, pp. 50–79 (1950–51).

(2) Notiamo che tali limiti differiscono da quelli impiegati nella teoria generale degli insiemi e cioè il limite ristretto $\sum_{n=0}^{\infty} \prod_{k=0}^{\infty} E_{n+k}$ e il limite completo $\prod_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} E_{n+k}$. Per le proprietà dei limiti inferiore e superiore cfr. ad esempio C. KURATOWSKI, *Tolopogie*, vol. I, Warszawa, pp. 241–245 (1948).

Sussiste il fondamentale teorema di Bolzano–Weierstrass generalizzato. *Se gli insiemi* E_n , $n = 1, 2, \cdots$, *sono equilimitati, esiste una successione* $\{E_{\lambda_n}\}$, *subordinata ad* $\{E_n\}$, *che è convergente ad un insieme chiuso non vuoto* (3).

Fissato un insieme I di S_r e un numero positivo ε diciamo *sferoide* di centro I e raggio ε l'insieme dei punti x di S_r tali che $\overline{xI} \leq \varepsilon$ (4). Indichiamo tale insieme con $[I]_\varepsilon$.

Riportiamo infine il seguente teorema: *Gli insiemi* E_n , $n = 1, 2, \cdots$, *siano equilimitati. Condizione necessaria e sufficiente perché la successione* $\{E_n\}$ *sia convergente ad un insieme* E *è che, fissato comunque un numero positivo* ε, *esista corrispondentemente un indice* n_ε *tale che*

$$(1) \qquad E_n \subset [E]_\varepsilon \ , \ E \subset [E_n]_\varepsilon \qquad per \quad n > n_\varepsilon \ (5).$$

2. Indichiamo con A_n , $n = 1, 2, \cdots$, un insieme di valori della variabile reale x e con $f_n(x)$ una funzione reale definita in A_n.

Indicato con x_0 un punto appartenente al limite inferiore della successione $\{A_n\}$ diciamo che la successione $\{f_n(x)\}$ è *biconvergente* nel punto x_0 se, fissata comunque una successione $\{x_n\}$ convergente ad x_0 e $x_n \in A_n$, la successione $\{f_n(x_n)\}$ risulta convergente (6). Diciamo che $\{f_n(x)\}$ è biconvergente nell'insieme A se lo è in ogni punto di A.

Diciamo che le funzioni $f_n(x)$, $n = 1, 2, \cdots$, sono *pseudoequicontinue* se per ogni numero positivo arbitrario ε esistono corrispondentemente due numeri positivi n_ε , δ_ε tali che

$$(2) \quad |f_n(x) - f_n(x')| < \varepsilon \qquad \text{per} \quad x, x' \in A_n \ , \ n > n_\varepsilon \ , \ |x - x'| < \delta_\varepsilon \ (7).$$

Teorema I. – *Gli insiemi* A_n , $n = 1, 2, \cdots$, *siano equilimitati e la successione* $\{A_n\}$ *sia convergente ad un insieme* A. *Se le funzioni* $f_n(x)$ *sono equilimitate e pseudoequicontinue esiste una successione* $\{f_{\lambda_n}(x)\}$, *subordinata ad* $\{f_n(x)\}$, *che è biconvergente in* A *ad una funzione continua* (8).

(3) Cfr. ad esempio C. Kuratowski, op. cit. (2), pp. 246–247.

(4) Cfr. M. Picone, *Conferenze* cit. (1).

(5) Cfr. F. Hausdorf, *Mengenlehre*. Leipzig, p. 148 (1935). Notiamo che tale Autore usa l'espressione di limite chiuso inferiore (superiore) invece di limite inferiore (superiore).

(6) Nel caso che gli insiemi A_n coincidano fra loro tale definizione di biconvergenza coincide con quella data dal prof. M. Picone nei suoi corsi di *Analisi Superiore*. Notiamo che se le funzioni $f_n(x)$ sono definite in uno stesso insieme A e $\{f_n(x)\}$ è biconvergente in A, tale successione risulta uniformemente convergente in A ad una funzione continua; cfr. ad esempio C. Kuratowski, op. cit. (3), pp. 108-109. (Tale Autore usa l'espressione di convergenza in modo continuo invece di biconvergenza).

(7) Successioni di funzioni pseudoequicontinue sono state considerate per la prima volta da C. Arzelà, « Acc. Bologna », VI, 3, p. 119 (1906). In tale Memoria non viene introdotta una denominazione specifica per indicare tali successioni ed ivi esse vengono definite fondandosi sul concetto di funzioni equioscillanti a meno di ε. Successioni di funzioni pseudoequicontinue sono anche chiamate successioni normali.

(8) Nel caso che gli insiemi A_n coincidono con A tale teorema è già stato provato da C. Arzelà nella Memoria cit. (7). Vogliamo notare che la presente generalizzazione non è inutile. Ci si serve infatti di tale teorema in uno studio, di prossima pubblicazione, sulle equa-

Indichiamo con E_n l'insieme dei punti (x, y) tali che $x \in A_n$, $y = f_n(x)$. Siccome le funzioni $f_n(x)$ e gli insiemi A_n sono equilimitati anche gli insiemi E_n sono equilimitati. Per il teorema di Bolzano-Weierstrass generalizzato esiste una successione $\{E_{\lambda_n}\}$, subordinata ad $\{E_n\}$, che è convergente ad un insieme E non vuoto. Proviamo che l'insieme E può essere considerato come il grafico di una funzione continua $f(x)$, definita in A, e che $\{f_{\lambda_n}(x)\}$ biconverge a $f(x)$.

Fissato un punto x_0 in A indichiamo con r la retta $x = x_0$. L'insieme E ha almeno un punto in comune con r. Se ciò non fosse la distanza di E da r sarebbe positiva essendo E chiuso e limitato [9]. Ciò è assurdo perchè fissato un numero positivo ε esiste un indice n_ε tale che $\overline{x_0 A_n} < \varepsilon$ per $n > n_\varepsilon$ e quindi pure $r\overline{E_n} < \varepsilon$.

Proviamo ora che l'insieme E ha un solo punto in comune con la retta r. Fissato un numero positivo δ indichiamo con $O_\delta[f_{\lambda_n}]$ l'oscillazione di $f_{\lambda_n}(x)$ in $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$, e con O_δ la differenza fra la massima e la minima ordinata dei punti di E le cui ascisse appartengono all'intervallo $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$. Fissato un numero positivo ε per la convergenza di $\{E_{\lambda_n}\}$ ad E esiste un indice n_ε tale che per $n > n_\varepsilon$ sussiste la (1) e cioè $E \subset [E_{\lambda_n}]_\varepsilon$. Ne segue $O_\delta < O_\delta[f_{\lambda_n}] + 2\varepsilon$ per $n > n_\varepsilon$. Per la pseudoequicontinuità delle funzioni $f_{\lambda_n}(x)$ esistono due numeri positivi $\delta_\varepsilon, \nu_\varepsilon$ tali che $O_{\delta_\varepsilon}[f_{\lambda_n}] < \varepsilon$ per $n > \nu_\varepsilon$; si ottiene perciò $O_{\delta_\varepsilon} < 3\varepsilon$ per $n > n_\varepsilon$, $n > \nu_\varepsilon$ ovverosia O_δ è un infinitesimo con δ. Ne segue che l'insieme E ha un solo punto a comune con la retta r.

Siccome si è provato che ad ogni punto x_0 di A corrisponde uno e un solo punto di E, quello appartenente alla retta $x = x_0$, l'insieme E definisce una funzione $f(x)$ tale che $[x, f(x)] \in E$ per $x \in A$. La funzione $f(x)$ è continua perché la sua oscillazione O_δ in un intorno di ampiezza δ di un generico punto x_0 è infinitesima con δ.

La successione $\{f_{\lambda_n}(x)\}$ biconverge in A ad $f(x)$. Infatti se $x_0 \in A$, $x_{\lambda_n} \in A_{\lambda_n}$ e $\{x_{\lambda_n}\}$ converge ad x_0, posto $P_{\lambda_n} \equiv [x_{\lambda_n}, f_{\lambda_n}(x_{\lambda_n})]$ il limite inferiore di $\{P_{\lambda_n}\}$ è contenuto in E (perché $P_{\lambda_n} \in E_{\lambda_n}$) e in r (perché $\{x_n\} \to x_0$) e quindi esso è il solo punto $[x_0, f(x_0)]$ comune ad E e ad r.

Enunciamo ora due teoremi per la cui dimostrazione rimandiamo alla Memoria di prossima pubblicazione.

Gli insiemi A_n, $n = 1, 2, \cdots$, *siano equilimitati, la successione* $\{A_n\}$ *sia convergente ad un insieme* A *e la successione* $\{f_n(x)\}$ *biconvergente in* A. *In tali ipotesi le funzioni* $f_n(x)$, $n = 1, 2, \cdots$, *sono pseudoequicontinue ed equilimitate a partire da un certo indice* n [10].

Gli insiemi A_n, $n = 1, 2, \cdots$, *siano equilimitati e le funzioni* $f_n(x)$ *pseudoequicontinue. Esiste una successione crescente di numeri naturali*

zioni a derivate parziali dove si ricerca la compattezza delle successioni di soluzioni di equazioni a differenze finite relative a reticoli A_n diversi fra loro. Inoltre il teorema I è necessario per la dimostrazione del teorema III.

(9) La distanza di E da r è l'estremo inferiore delle distanze dei punti di E da r.

(10) Nel caso che gli insiemi A_n coincidano con A tale teorema è già stato provato da C. ARZELÀ, Memoria cit. [8].

$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n, \cdots$ *tale che la successione* $\{A_{\lambda_n}\}$ *è convergente ad un insieme* A *e in ogni intervallo contenuto in* A *la successione* $\{f_{\lambda_n}(x)\}$ *o è biconvergente ad una funzione continua o è bidivergente* [11] *a* $+\infty$ *oppure a* $-\infty$.

3. Poniamo

$$R_n(x, x') = \frac{f_n(x) - f_n(x')}{x - x'}$$

e consideriamo tale funzione definita nell'insieme piano $I_n(\tau_n)$ definito dalle condizioni $x \in A_n$, $x' \in A_n$, $|x - x'| > \tau_n$ ove τ_n è un numero positivo. Ciò posto stabiliamo la seguente proposizione preliminare.

TEORIA II. – *Gli insiemi* A_n, $n = 1, 2, \cdots$, *siano equilimitati e la successione* $\{A_n\}$ *sia convergente ad un intervallo* A. *Se esiste una successione di numeri positivi* $\tau_1, \tau_2, \cdots, \tau_n, \cdots$ *convergente a zero tale che risultano equilimitate le funzioni* $R_n(x, x')$, *ciascuna considerata in* $I_n(\tau_n)$, *allora le funzioni* $f_n(x)$ *sono pseudoequicontinue.*

Per ipotesi esiste un numero positivo M tale che

$$R_n(x, x') < M \quad \text{per} \quad (x, x') \in I_n(\tau), \qquad n = 1, 2, \cdots. \tag{3}$$

Per la convergenza di $\{A_n\}$ ad A e di $\{\tau_n\}$ a zero, fissato un numero positivo ε esiste corrispondentemente un indice n_ε tale che

$$\tau_n < \varepsilon, \quad A \subset [A_n]_\varepsilon, \quad A_n \subset [A]_\varepsilon \quad \text{per} \quad n > n_\varepsilon.$$

Per le due ultime relazioni, essendo A un intervallo, anche $[A_n]_\varepsilon$ è un intervallo e quindi per ogni punto x di A_n ne esiste un altro x' pure di A_n e tale che $|x - x'| \leq 2\varepsilon$. Siano x_1, x_2 due punti di A_n, $n > n_\varepsilon$, tali che $|x_1 - x_2| < \varepsilon$. Esiste allora un punto $\bar{x}$ pure di A_n e tale che la sua distanza da x_1 e x_2 sia maggiore di ε e minore di 3ε (supposto ε sufficientemente piccolo rispetto all'intervallo A). Essendo $\tau_n < \varepsilon$ è $(x_1, \bar{x}) \in I_n(\tau_n)$, $(x_2, \bar{x}) \in I_n(\tau_n)$ e per la (3) di ottiene

$$|f_n(x_1) - f_n(x_2)| \leq |f_n(x_1) - f_n(\bar{x})| + |f_n(\bar{x}) - f_n(x_2)| \leq M\{|x_1 - \bar{x}| + |\bar{x} - x_2|\} < 6\varepsilon M,$$

essendo $n > n_\varepsilon$, $x_1, x_2 \in A_n$, $|x_1 - x_2| < \varepsilon$. Allora le funzioni $f_n(x)$ sono pseudoequicontinue.

TEOREMA III. – *Gli insiemi* A_n, $n = 1, 2, \cdots$, *siano equilimitati e la successione* $\{A_n\}$ *sia convergente ad un intervallo* A. *Le funzioni* $f_n(x)$ *siano equilimitate ed esista inoltre una successione di numeri positivi* $\tau_1, \tau_2, \cdots, \tau_n, \cdots$ *convergente a zero tale che le funzioni* $R_n(x, x')$ *risultano pseudoequicontinue ciascuna considerata nel corrispondente insieme* $I_n(\tau_n)$. *In tali ipotesi esiste una successione* $\{f_{\lambda_n}(x)\}$, *subordinata ad* $\{f_n(x)\}$, *che è biconvergente in* A *ad una funzione dotata di derivata continua in* A.

(11) Indicato con x_n un generico punto di A_n, diciamo che la successione $\{f_n, x'\}$ è bidivergente a $+\infty$ ($-\infty$) nel punto x_0 se la convergenza di $\{x_n\}$ ad x_0 implica la divergenza a $+\infty$ ($-\infty$) di $\{f_n(x_n)\}$.

Indichiamo con $A^{(2)}$ il prodotto topologico $A \times A$ e cioè l'insieme dei punti (x, x') tali che $x \in A$, $x' \in A$. Proviamo che $\{I_n(\tau_n)\}$ converge ad $A^{(2)}$. Dalla convergenza di $\{A_n\}$ ad A segue la convergenza di $\{A_n^{(2)}\}$ ad $A^{(2)}$ (12). Fissato un numero positivo ε per la (1) esiste un indice n_ε tale che

$$A \subset [A_n]_\varepsilon \,,\ A^{(2)} \subset [A_n^{(2)}]_\varepsilon \,,\ A_n^{(2)} \subset [A^{(2)}]_\varepsilon \qquad \text{per} \quad n < n_\varepsilon \,. \tag{4}$$

Essendo A un intervallo anche $[A_n]_\varepsilon$ è un intervallo e quindi per ogni punto x di A_n ne esiste un altro x' tale che $|x - x'| < 2\varepsilon$. Da ciò segue che, indicato con n'_ε un indice $\geqq n_\varepsilon$ e tale che per $n > n'_\varepsilon$ sia $\tau_n < \varepsilon$, si ha per $n > n'_\varepsilon$ $A_n^{(2)} \subset [I_n(\tau_n)]_{2\varepsilon}$ e quindi $[A_n^{(2)}]_\varepsilon \subset [I_n(\tau_n)]_{3\varepsilon}$ e per la (4)

$$A^{(2)} \subset [I_n(\tau_n)]_{3\varepsilon} \qquad \text{per} \quad n < n'_\varepsilon \,. \tag{5}$$

Essendo inoltre $I_n(\tau_n) \subset A_n^{(2)}$ per la (4) è $I_n(\tau_n) \subset [A^{(2)}]_{3\varepsilon}$ per $n > n'_\varepsilon$. Da tale relazione e dalla (5) segue per un teorema riportato al n. 1 che $\{I_n(\tau_n)\}$ converge ad $A^{(2)}$.

Per ipotesi esiste un numero positivo M tale che $|f_n(x)| < M$ per $x \in A_n$, $n = 1, 2, \cdots$, e, fissato un numero positivo ε, esistono due numeri positivi n_ε, δ_ε tali che

$$|R_n(x_1, x_2) - R_n(y_1, y_2)| < \varepsilon \quad \text{per} \quad (x_1, x_2), (y_1, y_2) \in I_n(\tau_n),\ n > n_\varepsilon, \tag{6}$$

e per $|x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| < 3\delta_\varepsilon$. Si ha

$$|R_n(x_1, x_2)| = \left|\frac{f_n(x_1) - f_n(x_2)}{x_1 - x_2}\right| < \frac{2M}{\delta_\varepsilon} \qquad \text{per} \quad (x_1, x_2) \in I_n(\delta_\varepsilon). \tag{7}$$

Per la convergenza di $\{A_n\}$ ad A esiste un indice $n'_\varepsilon \geqq n_\varepsilon$ tale che per $n > n'_\varepsilon$ $A \subset [A_n]_{\delta_\varepsilon}$; essendo A un intervallo, fissato un punto x_1 in A_n, $n > n'_\varepsilon$, esiste un punto $\bar{x}$ pure di A_n e tale che $\delta_\varepsilon < |x_1 - \bar{x}| \leq 2\delta_\varepsilon$. Allora se $(x_1, x_2) \in I_n(\tau_n)$ e $|x_1 - x_2| < \delta_\varepsilon$ è $|x_2 - \bar{x}| < 3\delta_\varepsilon$ e per le (6), (7)

$$|R_n(x_1, x_2)| \leq |R_n(x_1, x_2) - R_n(x_1, \bar{x})| + |R_n(x_1, \bar{x})| < \varepsilon + \frac{2M}{\delta_\varepsilon}.$$

Le funzioni $R_n(x_1, x_2)$, per $n > n'_\varepsilon$, risultano perciò equilimitate, considerate ciascuna in $I_n(\tau_n)$. Per il teorema I esiste allora una successione crescente di numeri naturali $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n, \cdots$ tale che le successioni $\{f_{\lambda_n}(x)\}$, $\{R_{\lambda_n}(x_1, x_2)\}$ sono biconvergenti, la prima in A ad una funzione continua $f(x)$ e la seconda in $A^{(2)}$ ad una funzione continua $R(x_1, x_2)$. Essendo

$$\frac{f_{\lambda_n}(x_1) - f_{\lambda_n}(x_2)}{x_1 - x_2} = R_{\lambda_n}(x_1, x_2) \qquad \text{per} \quad (x_1, x_2) \in I_{\lambda_n}(\tau_{\lambda_n}),$$

si ha

$$\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = R(x_1, x_2) \qquad \text{per} \quad (x_1, x_2) \in A^{(2)} \ \text{ e } \ x_1 \neq x_2 :$$

per la continuità in $A^{(2)}$ di $R(x_1, x_2)$ esiste

$$\lim_{x_2 \to x_1} \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = f'(x_1) \qquad \text{per} \quad x_1, x_2 \in A \,.$$

(12) Cfr. ad esempio C. KURATOWSKI, op. cit. (3) p. 245, n. 9.

Enunciamo infine un teorema che in una forma più generale è provato nella Memoria di prossima pubblicazione.

Le funzioni reali $f_n(x)$, $n = 1, 2, \cdots$, *siano definite in un intervallo chiuso e limitato* A. *Condizione necessaria e sufficiente perchè la successione* $\{f_n(x)\}$ *converga uniformemente in* A *ad una funzione dotata di derivata prima continua è che*

1° *la successione* $\{f_n(x)\}$ *converga in un insieme ovunque denso in* A,

2° *esista una successione di numeri positivi* $\tau_1, \tau_2, \cdots, \tau_n, \cdots$ *convergente a zero tale che i rapporti incrementali* $R_n(x_1, x_2)$, $n = 1, 2, \cdots$, *siano pseudoequicontinui ciascuno riferito al corrispondente insieme* $I(\tau_n)$.

Matematica. — *Sull'esistenza in un dominio jordaniano di funzioni olomorfe all'interno e convergenti al contorno verso valori assegnati.* Nota di Giovanni Zin, presentata (*) dal Corrisp. G. Ascoli.

A complemento di alcuni risultati, conseguiti dall'autore in una recente Memoria (1), sarà ora stabilito il seguente teorema:

Sia C *una curva continua, chiusa, semplice, rettificabile, del piano della variabile complessa* z. *Sia* D *il dominio costituito dai punti di* C *e dai punti interni a* C. *Sia* $\varphi(z)$ *una funzione data su* C, *ivi a variazione limitata* (2) *e soddisfacente alle condizioni*

$$(1) \qquad \int_C \varphi(z)\, z^n\, dz = 0 \qquad (n = 0, 1, 2, 3, \cdots).$$

Allora, da tali ipotesi, consegue:

A) *qualunque sia il punto* z *di* C *si ha* (3)

$$\varphi(z^+) = \varphi(z^-)$$

(*) Nella seduta dell'11 aprile 1953.

(1) G. Zin, *Esistenza e rappresentazione di funzioni analitiche, le quali, su una curva di Jordan, si riducono a una funzione assegnata*, « Ann. di Matematica pura e applicata » (4), 34, pp. 365-405 (1953).

Il teorema che viene dato nella presente Nota, contiene, rispetto a quello stabilito al Cap. I della citata Memoria, un risultato più generale, per quanto riguarda il comportamento della funzione analitica al contorno. Ma a tale risultato si perviene introducendo una restrizione sulla $\varphi(z)$, che qui viene supposta a variazione limitata.

(2) Dette $x = x(s)$, $y = y(s)$ $(0 \leq s \leq L)$ le equazioni parametriche di C e posto $z(s) = x(s) + i\,y(s)$, $\varphi(z(s)) = u(s) + iv(s)$ con $u(s)$ e $v(s)$ funzioni reali, si dice che $\varphi(z)$ è su C a variazione limitata quando tale è $|\varphi(z(s))|$ nell'intervallo $0 \leq s \leq L$. Quando ciò avviene, anche $u(s)$ e $v(s)$ sono in tale intervallo a variazione limitata. Viceversa se $u(s)$ e $v(s)$ sono in $0 \leq s \leq L$ a variazione limitata, tale è $|\varphi(z(s))|$.

Analogamente si dice che $\varphi(z(s))$ è assolutamente continua in $0 \leq s \leq L$ se tale è $|\varphi(z(s))|$. Sono allora in $0 \leq s \leq L$ assolutamente continue anche $u(s)$ e $v(s)$. Vale ancora il viceversa.

(3) Con il simbolo $\varphi(z^+)$ $(\varphi(z^-))$ si intende il limite a cui tende $\varphi(t)$ quando il punto t di C tende al punto z di C percorrendo C in senso negativo (risp. positivo).

B) *la funzione* $f(z)$ *definita in* D *dalle relazioni*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{\varphi(t)\,dt}{t-z} \quad \text{per} \quad z \text{ in } D-C\,,\ f(z) = \varphi(z^+) = \varphi(z^-) \quad \text{per} \quad z \text{ su } C$$

è continua in ogni punto di D;

C) *dette*

$$x = x(s) \quad , \quad y = y(s) \qquad (0 \leq s \leq L)$$

le equazioni parametriche di C *riferite all'arco* s (L = *lunghezza di* C) *e posto* $z(s) = x(s) + iy(s)$, *ogni funzione* $\Phi(z)$, *continua in* D, *olomorfa in* D — C *e tale che* $\Phi(z(s))$ *sia in* $0 \leq s \leq L$ *assolutamente continua, soddisfa alla relazione*

$$\int_0^L \varphi(z(s))\,\frac{d\Phi(z(s))}{ds}\,ds = 0.$$

Dapprima si dedurrà la conseguenza C), la quale servirà poi a stabilire le A) e B).

Si ponga

$$\varphi(z(s)) = u(s) + iv(s) \qquad (0 \leq s \leq L) \tag{2}$$

con $u(s)$ e $v(s)$ reali. Poiché $u(s)$ e $v(s)$ sono in $0 \leq s \leq L$ a variazione limitata, si può ulteriormente porre

$$u(s) = u_1(s) - u_2(s) \quad , \quad v(s) = u_3(s) - u_4(s) \qquad (0 \leq s \leq L) \tag{3}$$

con $u_i(s)$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ funzioni non decrescenti e limitate in $0 \leq s \leq L$. Esiste allora un numero positivo M per il quale, in tutto $0 \leq s \leq L$, si ha

$$-M < u_i(s) < M \qquad (i = 1, 2, 3, 4). \tag{4}$$

Sia $\Phi(z)$ una funzione continua in D, olomorfa in D — C e tale che $\Phi(z(s))$ sia in $0 \leq s \leq L$ assolutamente continua.

Per un noto teorema di Walsh [4] una funzione $\Phi(z)$ continua in D ed olomorfa in D — C può essere approssimata quanto si vuole, ed uniformemente in D, mediante una successione di polinomi in z.

Si scelga allora un $\varepsilon < 0$ arbitrario e, per quanto detto, un polinomio $P(z)$ tale che in tutto D risulti

$$|\Phi(z) - P(z)| < \varepsilon. \tag{5}$$

Si osservi che pure $P(z(s))$ è funzione assolutamente continua in $0 \leq s \leq L$ (infatti $x(s)$ e $y(s)$ sono assolutamente continue perché a rapporto incrementale limitato; le parti reale e immaginaria di $P(z)$ sono polinomi nelle due variabili x e y, cioè le parti reale e immaginaria di $P(z(s))$ sono polinomi

(4) Per la bibliografia sull'argomento si veda J.-L. WALSH, *Approximation by Polynomials in the complex Domain*, « Mémorial des sciences mathématiques », fascicule LXXIII, Paris, 1935.

nelle due funzioni $x(s)$ e $y(s)$; le parti reale e immaginaria di $P(z(s))$ sono perciò assolutamente continue, perché tali sono le somme e i prodotti di funzioni assolutamente continue). Ne consegue che $\varphi(z(s))\frac{dP(z(s))}{ds}$ è integrabile (secondo Lebesgue) in $0 \leq s \leq L$. Poiché $\frac{dP(z)}{dz}$ è ancora un polinomio in z, tenendo presenti le (1) si ha [5]

$$(6) \qquad \int_0^L \varphi(z(s))\frac{dP(z(s))}{ds}\,ds = \int_0^L \varphi(z(s))\frac{dP(z)}{dz}\frac{dz}{ds}\,ds = \int_C \varphi(z)\frac{dP(z)}{dz}\,dz = 0.$$

Perciò si può scrivere

$$\int_0^L \varphi(z(s))\frac{d\Phi(z(s))}{ds}\,ds = \int_0^L \varphi(z(s))\left[\frac{d\Phi(z(s))}{ds} - \frac{dP(z(s))}{ds}\right]ds.$$

Introducendo la posizione

$$(7) \qquad \frac{d\Phi(z(s))}{ds} - \frac{dP(z(s))}{ds} = R(s) + iI(s)$$

(con $R(s)$ e $I(s)$ si intendono funzioni reali), ricordando le (2) e (3) e usando notazioni abbreviate, dalla precedente si ha

$$\int_0^L \varphi(z(s))\frac{d\Phi(z(s))}{ds}\,ds = \int_0^L (u_1 - u_2 + iu_3 - iu_4)(R + iI)\,ds = \int_0^L u_1 R\,ds -$$

$$- \int_0^L u_2 R\,ds - \int_0^L u_3 I\,ds + \int_0^L u_4 I\,ds + i\int_0^L u_1 I\,ds - i\int_0^L u_2 I\,ds + i\int_0^L u_3 R\,ds - i\int_0^L u_4 R\,ds.$$

Da questa si deduce

$$(8) \qquad \left|\int_0^L \varphi(z(s))\frac{d\Phi(z(s))}{ds}\,ds\right| \leq \sum_{h=1}^{h=4}\left|\int_0^L u_h(s)\,R(s)\,ds\right| + \sum_{h=1}^{h=4}\left|\int_0^L u_h(s)\,I(s)\,ds\right|.$$

Poiché le $u_h(s)$ sono non decrescenti e limitate, agli integrali che compaiono al 2° membro si può applicare il secondo teorema della media [6]. Si ha così per le (4)

$$\int_0^L u_h(s)\,R(s)\,ds = -M\int_0^l R(s)\,ds + M\int_l^L R(s)\,ds \qquad (h = 1, 2, 3, 4)$$

(5) Anche se esistono in $0 \leq s \leq L$ punti nei quali le due funzioni integrande $\varphi(z(s))\cdot\frac{dP(z(s))}{ds}$ e $\varphi(z(s))\frac{dP(z)}{dz}\cdot\frac{dz}{ds}$ acquistano valori diversi, esse risultano, in ogni caso, uguali quasi dappertutto in $0 \leq s \leq L$. Perciò, essendo esse entrambe integrabili, i loro integrali sono uguali.

(6) Il secondo teorema della media viene qui usato nella forma di Bonnet Carathéodory; lo si può trovare in G. VITALI e G. SANSONE, *Moderna teoria delle funzioni di variabile reale*, parte I, Bologna, p. 116 (1943).

dove l è un opportuno valore dell'intervallo $(0, L)$ dipendente da h. Da questa si ottiene ancora

$$(9) \qquad \left|\int_0^L u_h(s)\,R(s)\,ds\right| \leq M\left|\int_0^l R(s)\,ds\right| + M\left|\int_l^L R(s)\,ds\right| \leq$$

$$\leq M\left|\int_0^l (R(s) + iI(s))\,ds\right| + M\left|\int_l^L (R(s) + iI(s))\,ds\right|.$$

Ma per la posizione (7) e per l'assoluta continuità di $\Phi(z(s))$ e $P(z(s))$ in $0 \leq s \leq L$, si ha:

$$\int_0^l (R(s) + iI(s))\,ds = [\Phi(z(l)) - P(z(l))] - [\Phi(z(0)) - P(z(0))].$$

Ora, per la (5), è $|\Phi(z(l)) - P(z(l))| < \varepsilon$, $|\Phi(z(0)) - P(z(0))| < \varepsilon$ e di conseguenza

$$\left|\int_0^l (R(s) + iI(s))\,ds\right| < 2\varepsilon.$$

Poiché con calcolo analogo si ha $\left|\int_l^L (R(s) + iI(s))\,ds\right| < 2\varepsilon$, dalla (9) si deduce

$$(10) \qquad \left|\int_0^L u_h(s)\,R(s)\,ds\right| < 4M\varepsilon \qquad (h = 1, 2, 3, 4).$$

Evidentemente seguendo un analogo procedimento si ottiene pure

$$\left|\int_0^L u_h(s)\,I(s)\,ds\right| < 4M\varepsilon \qquad (h = 1, 2, 3, 4).$$

Per questa e per la (10) dalla (8) si ha

$$\left|\int_0^L \varphi(z(s))\,\frac{d\Phi(z(s))}{ds}\,ds\right| < 32M\varepsilon.$$

Siccome ε è un valore positivo arbitrario, da questa si deduce

$$\int_0^L \varphi(z(s))\,\frac{d\Phi(z(s))}{ds}\,ds = 0.$$

La conseguenza C) è così stabilita.

Saranno ora dedotte le conseguenze A) e B).

Sia $\zeta = \tau(z)$ la funzione continua in D, olomorfa in D—C, che opera la trasformazione conforme del campo D—C nel cerchio $|\zeta| < 1$ del piano della variabile complessa ζ [7]. Nel seguito con Δ si intenderà il dominio circolare $|\zeta| \leq 1$ del piano della ζ e con γ il suo contorno, cioè la circonferenza rappresentata dall'equazione parametrica

$$\zeta = e^{i\theta} \qquad (0 \leq \theta \leq 2\pi).$$

Le equazioni parametriche

$$x = x(s) \quad , \quad y = y(s) \qquad (0 \leq s \leq L)$$

di C si scelgano in modo che il punto $s = 0$ di C (cioè il punto $z(0) = x(0) + iy(0)$) corrisponda, per la trasformazione $\zeta = \tau(z)$, al punto $\theta = 0$ di γ (cioè al punto $\zeta = 1$ di γ). Evidentemente la corrispondenza subordinata dalla funzione $\zeta = \tau(z)$ fra un punto $z(s)$ di C e un punto $e^{i\theta}$ di γ consente di considerare l'arco θ di γ quale funzione $\theta(s)$ dell'arco s si C, definita nell'intervallo $0 \leq s \leq L$, ivi continua e sempre crescente.

Da un teorema di Keldysch e Lavrentieff [8] discende che la funzione $\theta(s)$ è assolutamente continua in $0 \leq s \leq L$. Perciò anche la funzione $\zeta^n = \tau^n(z(s)) = e^{in\theta(s)} = \cos n\theta(s) + i \operatorname{sen} n\theta(s)$, dove n è un intero positivo qualunque, è assolutamente continua in $0 \leq s \leq L$. La continuità di $\tau^n(z)$ in D, la sua olomorfia in D—C e l'assoluta continuità di $\tau^n(z(s))$ in $0 \leq s \leq L$, consentono di utilizzare la conseguenza C) sopra stabilita e scrivere

$$\int_0^L \varphi(z(s)) \frac{d\tau^n(z(s))}{ds} ds = 0 \qquad (n \geq 1)$$

ossia

$$\int_0^L \varphi(z(s)) \frac{d\zeta^n}{ds} ds = 0 \qquad (n \geq 1). \tag{11}$$

Evidentemente anche l'arco s di C può essere considerato una funzione $s(\theta)$ dell'arco θ di γ, continua nell'intervallo $0 \leq \theta \leq 2\pi$, e ivi sempre crescente. Di ciò si può approfittare per rappresentare la curva C mediante le equazioni

$$x = x(s(\theta)) \quad , \quad y = y(s(\theta)) \qquad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

(7) Ciò è notoriamente possibile per il teorema di CARATHÉODORY, «Math. Ann.», t. 73, pp. 305–320 (1913).

(8) M. KELDISCH e M. LAVRENTIEFF. *Sur la représentation conforme des domaines limités par des courbes rectifiables*, «Ann. Éc. Norm. Supér.» (3), 54, pp. 1–38 (1937). A tali Autori si deve il seguente risultato: Se D contiene il cerchio $|z| < \rho$, a un insieme di punti di C di misura ε corrisponde sulla circonferenza γ un insieme di misura $< \frac{K\varepsilon}{|\log(\varepsilon/\rho)| + 1}$, dove K è una costante indipendente da ε. Se inoltre è $\tau(0) = 0$, K è una costante assoluta.

Evidentemente, da tale risultato, discende l'assoluta continuità della funzione $\theta(s)$.

riferite al parametro θ. Per un teorema di F. Riesz [9] le due funzioni $x(s(\theta))$ e $y(s(\theta))$ della variabile θ sono assolutamente continue in $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Ma allora, per un teorema di Tonelli [10], anche l'arco $s(\theta)$ è funzione assolutamente continua di θ in $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Si può perciò applicare all'integrale che compare al primo membro della (11) il teorema di integrazione per sostituzione, vuoi nella forma di Lebesgue, vuoi nella forma di De La Vallée Poussin. Si ha così:

$$\int_0^{2\pi} \varphi(z(s(\theta))) \frac{d\zeta^n}{ds} \frac{ds}{d\theta} d\theta = 0 \qquad (n = 1, 2, 3, \cdots).$$

Ponendo per semplicità

$$\psi(e^{i\theta}) = \varphi(z(s(\theta)))$$

dalla precedente si ottiene [11]

$$\int_0^{2\pi} \psi(e^{i\theta}) \frac{d\zeta^n}{d\theta} d\theta = 0 \qquad (n = 1, 2, 3, \cdots).$$

Da questa, essendo $\frac{d\zeta^n}{d\theta} = n\zeta^{n-1} \frac{d\zeta}{d\theta}$, si ottiene

$$\int_0^{2\pi} \psi(e^{i\theta}) \zeta^{n-1} \frac{d\zeta}{d\theta} d\theta = 0 \qquad (n = 1, 2, 3, \cdots). \tag{12}$$

o anche, mutando $n-1$ in n e trasformando l'integrale a primo membro in integrale curvilineo esteso alla circonferenza γ,

$$\int_\gamma \psi(\zeta) \zeta^n d\zeta = 0 \qquad (n = 0, 1, 2, 3, \cdots). \tag{13}$$

Si ponga ora

$$\psi(e^{i\theta}) = p(\theta) + iq(\theta) \qquad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

con $p(\theta)$ e $q(\theta)$ reali. Poiché $\varphi(z)$ è su C a variazione limitata, anche $p(\theta)$ e $q(\theta)$ sono in $0 \leq \theta \leq 2\pi$ a variazione limitata. Perciò le loro serie di Fourier

$$p(\theta) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\theta + b_n \operatorname{sen} n\theta) \tag{14}$$

$$q(\theta) = \frac{1}{2} c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (c_n \cos n\theta + d_n \operatorname{sen} n\theta) \tag{15}$$

convergono in ogni punto di $0 \leq \theta \leq 2\pi$ (teorema di Dirichlet–Jordan).

(9) F. RIESZ, *Ueber die Randwerte der analytischen Funktionen*, «Math. Ztsch.», t. 18, pp. 87-95 (1923).

(10) L. TONELLI, *Sulla rettificazione delle curve*, «Atti della R. Accad. delle Scienze di Torino», 1907 1908, oppure, *Fondamenti di calcolo delle variazioni*. Vol. I, Bologna, p. 67 (1921).

(11) Si osservi quanto detto in nota (5) relativamente a un caso analogo.

Eseguendo nelle (12) la sostituzione $\psi(e^{i\theta}) = p(\theta) + iq(\theta)$, $\zeta = e^{i\theta}$ e separando le parti reali dalle immaginarie si ottiene

$$\int_0^{2\pi} p(\theta) \cos n\theta \, d\theta = \int_0^{2\pi} q(\theta) \operatorname{sen} n\theta \, d\theta \quad , \quad \int_0^{2\pi} p(\theta) \operatorname{sen} n\theta \, d\theta = -\int_0^{2\pi} q(\theta) \cos n\theta \, d\theta$$

$$(n = 1, 2, 3, \cdots).$$

Tenendo presenti le formule di Eulero–Fourier che forniscono i coefficienti delle (14) e (15), dalle relazioni ora stabilite si deduce $a_n = d_n$, $b_n = -c_n$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$. La serie (14) è perciò, secondo la terminologia usuale, la coniugata della serie (15). Ma per un noto risultato di Pringsheim [12], la serie coniugata della serie di Fourier della $q(\theta)$ diverge in tutti i punti di $0 < \theta < 2\pi$ in cui è $q(\theta^+) \neq q(\theta^-)$ e anche in $\theta = 0$ se è $q(0^+) \neq q(2\pi^-)$. Poiché come sopra rilevato, le serie (14) e (15) sono sempre convergenti, ne discende $q(\theta^+) = q(\theta^-)$ per ogni θ di $0 < \theta < 2\pi$ e ancora $q(0^+) = q(2\pi^-)$.

Analogamente, poiché la serie (15) è, a meno del segno, la coniugata della (14), si ha $p(\theta^+) = p(\theta^-)$ in $0 < \theta < 2\pi$ e ancora $p(0^+) = p(2\pi^-)$.

Perciò, qualunque sia il punto z di C, si ha

$$\varphi(z^+) = \varphi(z^-). \tag{16}$$

La conseguenza A) è così stabilita.

Si introduca ora la funzione $\omega(\zeta)$ definita su γ dalle relazioni

$$\omega(\zeta) = \psi(\zeta^+) = \psi(\zeta^-).$$

Evidentemente la $\omega(\zeta)$ risulta continua su γ. Inoltre la $\psi(\zeta)$ e la $\omega(\zeta)$ differiscono su γ al più in un'infinità numerabile di punti, ché, al più, tanti sono i punti di discontinuità di una funzione a variazione limitata. Perciò alle (13) possono sostituirsi le seguenti altre

$$\int_\gamma \omega(\zeta) \zeta^n \, d\zeta = 0 \qquad (n = 0, 1, 2, 3 \cdots).$$

Poiché i punti della circonferenza γ sono tutti lipschitziani, per un teorema dell'autore [13] esiste nel dominio circolare Δ una funzione continua in Δ, olomorfa in $\Delta - \gamma$ e coincidente con la $\omega(\zeta)$ su γ. Per la corrispondenza fra i dominî D e Δ, subordinata dalla trasformazione conforme $\zeta = \tau(z)$ di D — C in $\Delta - \gamma$, esiste allora in D una funzione $f(z)$ continua in D, olomorfa in D — C e soddisfacente su C alla condizione

$$f(z) = \omega(\tau(z)) = \varphi(z^+) \qquad (z \text{ su C}).$$

(12) A. Pringsheim, *Ueber das Verhalten von Potenzreihen auf dem Convergenzkreise*. « Sitzungsberichte der Münch. Akad. », Bd. XXIX pp. 37-100 1900, oppure L. Tonelli, *Serie trigonometriche*, Bologna, p. 312 (1928).

(13) G. Zin, loc. cit., in nota (2), p. 371. Evidentemente il ricorso a tale teorema può, nel caso del cerchio, essere evitato mediante semplici considerazioni sulle serie di potenze.

Evidentemente la $f(z)$ è allora in D—C fornita dall'integrale di Cauchy

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{\varphi(t^+)\,dt}{t-z} \qquad (z \text{ in } D-C).$$

Poiché, per la (16), $\varphi(t^+)$ e $\varphi(t)$ differiscono su C al più in un'infinità numerabile di punti, dalla precedente si ha

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{\varphi(t)\,dt}{t-z}.$$

Anche la conseguenza B) risulta così stabilita. c. v. d.

Analisi matematica. — *Una generalizzazione del teorema di Abel sulle serie di potenze* (*). Nota di FERNANDO BERTOLINI, presentata (**) dal Socio M. PICONE.

1. Come è elementarmente noto, se la successione (complessa) $\{a_k(z_1-\alpha)^k\}$ è limitata ($z_1 \neq \alpha$), allora la serie di potenze $\sum_{k=1}^{\infty} a_k(z-\alpha)^k$ converge *totalmente* in ogni insieme chiuso contenuto nel cerchio $|z-\alpha| < |z_1-\alpha|$; è pure ben noto che, se la serie numerica $\sum_{k=1}^{\infty} a_k(z_1-\alpha)^k$ ($z_1 \neq \alpha$) converge, allora la serie di potenze $\sum_{k=1}^{\infty} a_k(z-\alpha)^k$ converge *uniformemente* in ogni insieme del tipo

$$0 \leq \frac{|z-z_1|}{|z_1-\alpha|-|z-\alpha|} \leq \omega,$$

ω essendo un arbitrario numero reale non minore d'uno (1).

È mio intendimento di estendere questi due teoremi elementari alle serie

$$(1) \qquad \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{n} a_{ik}(z-\alpha_i)^k,$$

$$(2) \qquad \sum_{k=1}^{\infty}\{a_{0k}(z-\alpha_0)^k + \sum_{i=1}^{n} a_{ik}(z-\alpha_i)^{-k}\},$$

dove $\alpha_0, \alpha_1, \cdots, \alpha_n$ sono $n+1$ fissati punti del piano complesso (2).

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto Nazionale per le Applicazioni del Calcolo.

(**) Nella seduta dell'11 aprile 1953.

(1) Per il secondo risultato, vedi M. PICONE, *Lezioni di Analisi Matematica*, II corso, n. 89, XV.

(2) L'argomento del presente lavoro mi è stato suggerito dal prof. M. Picone.

2. Dati due punti z_1 ed α nel piano complesso, ed un numero reale ω non minore d'uno, il luogo dei punti verificanti la limitazione

$$0 \leqq \frac{|z - z_1|}{|z_1 - \alpha| - |z - \alpha|} \leqq \omega$$

verrà chiamato *lumaca interna di Pascal* di vertice z_1, polo α, parametro ω, ed indicata con la scrittura $L_i(z_1, \alpha, \omega)$: essa è contenuta nel cerchio $C(z_1, \alpha)$ definito dalla diseguaglianza

$$|z - \alpha| \leqq |z_1 - \alpha|,$$

e ne invade l'interno al diverger di ω; il suo aspetto risulta dalla fig. 1.

Il luogo dei punti del piano complesso z verificanti la limitazione

$$0 \leqq \frac{|z - z_1|}{|z - \alpha| - |z_1 - \alpha|} \leqq \omega$$

verrà chiamato *lumaca esterna di Pascal* di vertice z_1, polo α, parametro ω, ed indicata con la scrittura $L_e(z_1, \alpha, \omega)$: essa è la trasformata della

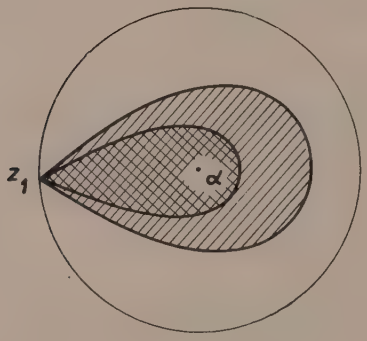


Fig. 1.

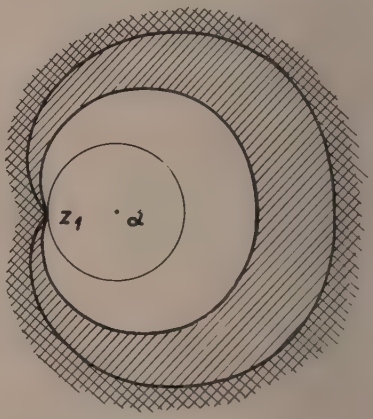


Fig. 2.

lumaca interna $L_i(z_1, \alpha, \omega)$ mediante l'inversione per raggi vettori reciproci che lascia invariata la circonferenza di centro α e raggio $|z_1 - \alpha|$; perciò essa è contenuta nel dominio $C'(z_1, \alpha)$ definito dalla diseguaglianza

$$|z - \alpha| \geqq |z_1 - \alpha|$$

e ne invade l'interno al diverger di ω, è illimitata ma ha frontiera limitata; il suo aspetto risulta dalla fig. 2.

Si osservi che la somma delle frontiere dei due insiemi $L_i(z_1, \alpha, \omega)$ ed $L_e(z_1, \alpha, \omega)$ è appunto la curva nota col nome di lumaca di Pascal.

3. Sia ora p una variabile complessa; banale conseguenza del criterio del confronto è il teorema

I. *Se le successioni (complesse)* $\{a_k\}$ *e* $\{q_k\}$ *sono limitate, allora la serie* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k q_k p^k$ *converge totalmente in ogni insieme chiuso contenuto nel cerchio* $|p| < 1$.

Applicando due volte le regole di convergenza di Abel [3] si dimostra che

II. *Se la serie* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *converge, e la successione* $\{q_k\}$ *è a variazione finita, allora la serie* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k q_k p^k$ *converge uniformemente in ogni insieme del tipo*

$$0 \leqq \frac{|1-p|}{1-|p|} \leqq \omega,$$

ω *essendo un arbitrario numero reale non minore d'uno.*

Difatti, la serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k q_k$ deve convergere, e nell'insieme detto la successione $\{p^k\}$ ha variazione totale eguale a zero od a

$$|p| \frac{|1-p|}{1-|p|} \leqq \omega.$$

Ricordiamo che, se due successioni $\{q'_k\}$ e $\{q''_k\}$ hanno variazione totale finita, altrettanto accade per le successioni $\{q'_k q''_k\}$ e $\{q'_k + q''_k\}$, ottenute sommando o moltiplicando termine a termine le successioni date; se inoltre la successione $\{q''_k\}$ non ha termini nulli e converge ad un limite non nullo, allora anche la successione $\{q'_k/q''_k\}$ ha variazione totale finita.

4. Siano dati i punti $z_0, z_1, z_2, \cdots, z_n$, tali che i cerchi $C(z_j, \alpha_j)$ $(j=1,2,\cdots,n)$ siano mutuamente esterni, e tutti interni al cerchio $C(z_0, \alpha_0)$: avremo perciò

$$(3) \quad \begin{cases} \left|\dfrac{z_j - \alpha_j}{z_i - \alpha_j}\right| < 1 & (\text{per } i = 0, 1, \cdots, n \quad ; \quad j = 1, 2, \cdots, n;\ i \neq j) \\ \left|\dfrac{z_i - \alpha_0}{z_0 - \alpha_0}\right| < 1 & (\text{per } i = 1, 2, \cdots, n). \end{cases}$$

I teoremi da dimostrare sono i seguenti:

A_1. *Se i singoli termini della serie* (1) *nei punti* $z_1, z_2, \cdots, z_n$ *formano una successione limitata, allora la serie* (1) *converge totalmente in ogni insieme chiuso esterno alla somma dei cerchi* $C(z_1, \alpha_1), C(z_2, \alpha_2), \cdots, C(z_n, \alpha_n)$.

A_2. *Se i singoli termini della serie* (2) *nei punti* $z_0, z_1, z_2, \cdots, z_n$ *formano una successione limitata, allora la serie* (2) *converge totalmente in ogni insieme chiuso esterno alla somma dei cerchi* $C(z_1, \alpha_1), C(z_2, \alpha_2), \cdots, C(z_n, \alpha_n)$ *ed interno al cerchio* $C(z_0, \alpha_0)$.

(3) Cfr. M. PICONE, op. cit., n. 81, teorema XII, n. 84, teorema V.

B_1. *Se la serie* (1) *converge nei punti* $z_1, z_2, \cdots, z_n$, *allora essa converge uniformemente nella intersezione delle lumache esterne* $L_e(z_1, \alpha_1, \omega_1)$,

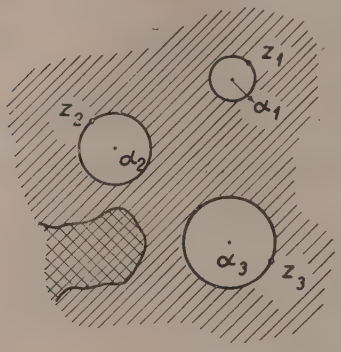


Fig. 3.

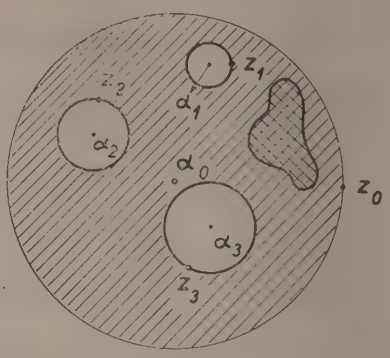


Fig. 4.

$L_e(z_2, \alpha_2, \omega_2), \cdots, L_e(z_n, \alpha_n, \omega_n)$, *comunque si siano prefissati i numeri reali* $\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n$ *non minori di uno.*

B_2. *Se la serie* (2) *converge nei punti* $z_0, z_1, z_2, \cdots, z_n$, *allora essa converge uniformemente nella intersezione delle lumache esterne* $L_e(z_1, \alpha_1, \omega_1)$,

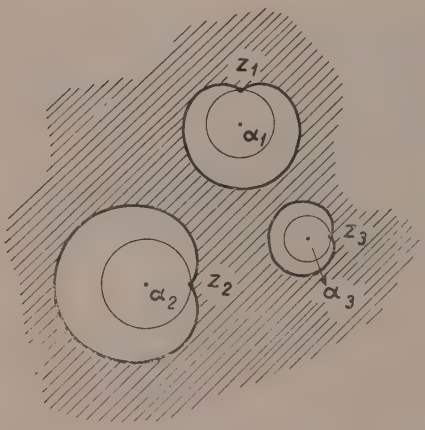


Fig. 5.

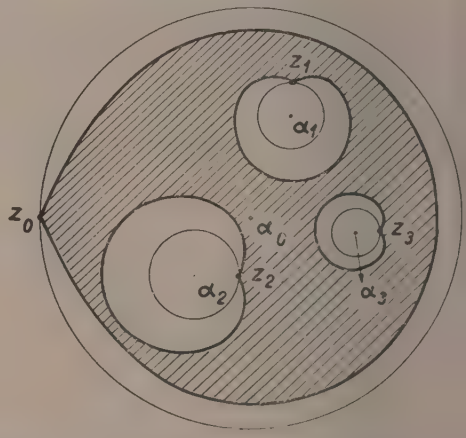


Fig. 6.

$L_e(z_2, \alpha_2, \omega_2), \cdots, L_e(z_n, \alpha_n, \omega_n)$ *e della lumaca interna* $L_i(z_0, \alpha_0, \omega_0)$, *comunque si siano prefissati i numeri reali* $\omega_0, \omega_1, \cdots, \omega_n$ *non minori di uno.*

Si osservi che, al diverger dei numeri $\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n$ [$\omega_0, \omega_1, \cdots, \omega_n$] l'insieme descritto al teorema B_1 [al teorema B_2] invade appunto l'insieme complementare della somma $\sum_{i=1}^{n} C(z_i, \alpha_i)$ [invade l'insieme complementare della somma $C'(z_0, \alpha_0) + \sum_{i=1}^{\infty} C(z_i, \alpha_i)$], menzionato al teorema A_1 [al teorema A_2].

Dimostro solo i teoremi A_2 e B_2, la dimostrazione degli altri due essendo analoga e formalmente più semplice.

Posto

$$\begin{cases} a_{0k}(z_j - \alpha_0)^k + \sum_{i=1}^{m} a_{ik}(z_j - \alpha_i)^{-k} = b_{jk} \quad (j = 0, 1, 2, \cdots, n;\ k = 1, 2, \cdots) \\ a_{0k}(z - \alpha_0)^k + \sum_{i=1}^{n} a_{ik}(z - \alpha_i)^{-k} = b_k \quad (k = 1, 2, \cdots), \end{cases}$$

per la compatibilità delle relazioni ora scritte avremo (per ciascun valore di k)

$$\begin{vmatrix} (z_0 - \alpha_0)^k & (z_0 - \alpha_1)^{-k} & (z_0 - \alpha_2)^{-k} \cdots (z_0 - \alpha_n)^{-k} & b_{0k} \\ (z_1 - \alpha_0)^k & (z_1 - \alpha_1)^{-k} & (z_1 - \alpha_2)^{-k} \cdots (z_1 - \alpha_n)^{-k} & b_{1k} \\ (z_2 - \alpha_0)^k & (z_2 - \alpha_1)^{-k} & (z_2 - \alpha_2)^{-k} \cdots (z_2 - \alpha_n)^{-k} & b_{2k} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots \\ (z_n - \alpha_0)^k & (z_n - \alpha_1)^{-k} & (z_n - \alpha_2)^{-k} \cdots (z_n - \alpha_n)^{-k} & b_{nk} \\ (z - \alpha_0)^k & (z - \alpha_1)^{-k} & (z - \alpha_2)^{-k} \cdots (z - \alpha_n)^{-k} & b_k \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & \left(\frac{z_1 - \alpha_1}{z_0 - \alpha_1}\right)^k & \left(\frac{z_2 - \alpha_2}{z_0 - \alpha_2}\right)^k & \left(\frac{z_3 - \alpha_3}{z_0 - \alpha_3}\right)^k \cdots \left(\frac{z_n - \alpha_n}{z_0 - \alpha_n}\right)^k & b_{0k} \\ \left(\frac{z_1 - \alpha_0}{z_0 - \alpha_0}\right)^k & 1 & \left(\frac{z_2 - \alpha_2}{z_1 - \alpha_2}\right)^k & \left(\frac{z_3 - \alpha_3}{z_1 - \alpha_3}\right)^k \cdots \left(\frac{z_n - \alpha_n}{z_1 - \alpha_n}\right)^k & b_{1k} \\ \left(\frac{z_2 - \alpha_0}{z_0 - \alpha_0}\right)^k & \left(\frac{z_1 - \alpha_1}{z_2 - \alpha_1}\right)^k & 1 & \left(\frac{z_3 - \alpha_3}{z_2 - \alpha_3}\right)^k \cdots \left(\frac{z_n - \alpha_n}{z_2 - \alpha_n}\right)^k & b_{2k} \\ \left(\frac{z_3 - \alpha_0}{z_0 - \alpha_0}\right)^k & \left(\frac{z_1 - \alpha_1}{z_3 - \alpha_1}\right)^k & \left(\frac{z_2 - \alpha_2}{z_3 - \alpha_2}\right)^k & 1 \cdots \left(\frac{z_n - \alpha_n}{z_3 - \alpha_n}\right)^k & b_{3k} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots \\ \left(\frac{z_n - \alpha_0}{z_0 - \alpha_0}\right)^k & \left(\frac{z_1 - \alpha_1}{z_n - \alpha_1}\right)^k & \left(\frac{z_2 - \alpha_2}{z_n - \alpha_2}\right)^k & \left(\frac{z_3 - \alpha_3}{z_n - \alpha_3}\right)^k \cdots & 1 & b_{nk} \\ \left(\frac{z - \alpha_0}{z_0 - \alpha_0}\right)^k & \left(\frac{z_1 - \alpha_1}{z - \alpha_1}\right)^k & \left(\frac{z_2 - \alpha_2}{z - \alpha_2}\right)^k & \left(\frac{z_3 - \alpha_3}{z - \alpha_3}\right)^k \cdots & \left(\frac{z_n - \alpha_n}{z - \alpha_n}\right)^k & b_k \end{vmatrix} = 0.$$

Chiamando c_k il complemento algebrico di b_k nell'ultimo determinante scritto, e $c_k^{(ij)}$ l'aggiunto in c_k dell'elemento che si trova all'intersezione della colonna $(j+1)$-esima con la riga $(i+1)$-esima, per il teorema di Hesse avremo

$$(4) \qquad b_k = \sum_{i=0}^{n} b_{ik} \frac{c_k^{(i0)}}{c_k} \left(\frac{z - \alpha_i}{z_0 - \alpha_i}\right)^k + \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=1}^{n} b_{ik} \frac{c_k^{(ij)}}{c_k} \left(\frac{z_j - \alpha_j}{z - \alpha_j}\right)^k,$$

almeno per k sufficientemente grande, in quanto è $\lim_{k \to \infty} c_k = 1$.

Ora, tutte le successioni $\left\{ \frac{c_k^{(ij)}}{c_k} \right\}_k$ $(i, j = 0, 1, \cdots, n)$ sono a variazione finita in quanto ottenute mediante somme, prodotti o quozienti termine a termine tra successioni a variazione finita (si sviluppino i determinanti

c_k, $c_k^{(ij)}$, e si tenga conto delle (3)), la successione che serve da denominatore essendo convergente ad un valore non nullo. Nelle ipotesi del teorema A_2 le successioni $\{b_{ik}\}_k$ $(i = 0, 1, \cdots, n)$ sono limitate, quindi in virtù del lemma I la serie

$$(5) \qquad \sum_{k=1}^{\infty} b_{ik} \frac{c_k^{(ij)}}{c_k} \left(\frac{z_j - \alpha_j}{z - \alpha_j}\right)^k \qquad \left[\sum_{k=1}^{\infty} b_{ik} \frac{c_k^{(io)}}{c_k} \left(\frac{z - \alpha_o}{z_o - \alpha_o}\right)^k\right] \qquad \begin{matrix} (j = 1, 2, \cdots, n) \\ (i = 0, 1, \cdots, n) \end{matrix}$$

converge totalmente in ogni insieme chiuso esterno al cerchio $C(z_j, \alpha_j)$ [in ogni insieme chiuso interno al cerchio $C(z_o, \alpha_o)$], ciò che dimostra appunto la tesi del teorema A_2. Nelle ipotesi del teorema B_2 le serie $\sum_{k=1}^{\infty} b_{ik}$ $(i = 0, 1, \cdots, n)$ sono convergenti, quindi in virtù del lemma II la serie (5) converge uniformemente nella lumaca esterna $L_e(z_j, \alpha_j, \omega_j)$ [nella lumaca interna $L_i(z_o, \alpha_o, \omega_o)$] comunque si sia fissato il numero reale ω_j [ω_o] maggiore od eguale ad uno: ciò dimostra appunto la tesi del teorema B_2.

Analisi matematica. – *Sul passaggio al limite sotto il segno d'integrale di Stieltjes–Lebesgue negli spazi astratti, con masse variabili con gli integrandi.* Nota di FEDERICO CAFIERO, presentata (*) dal Corrisp. R. CACCIOPPOLI.

Il passaggio al limite sotto il segno d'integrale, inteso nel senso di Lebesgue, risolto dallo stesso Lebesgue (1) nel caso d'integrandi equi–limitati e da Vitali (2) nel caso generale, in base al concetto di equi–assoluta continuità, è ancor oggi oggetto di studio quando l'integrale è inteso nel senso di Stieltjes–Lebesgue e insieme agli integrandi varino anche le masse o funzioni peso.

Sull'argomento i più importanti lavori sono dovuti ad R. Caccioppoli (3) ed a V. M. Dubrovskiĭ (4).

Nella Nota citata, R. Caccioppoli, data una definizione generale d'integrale di Stieltjes, rispetto ad una funzione determinante, introduce il concetto

(*) Nella seduta dell'11 aprile 1953.

(1) H. LEBESGUE, *Leçons sur l'intégration.* (Coll. Borel) I ed. 1904 (a p. 144).

(2) G. VITALI, *Sull'integrazione per serie.* « Rend. Circ. Mat. Palermo », *23*, 137–155 (1907).

(3) R. CACCIOPPOLI, *Integrali impropri di Stieltjies. Estensione del teorema di Vitali.* « Rend. Acc. Sc. Fis. Mat. Napoli », (4), *35* (1929).

(4) V. M. DUBROVSKIĬ, *Su alcune proprietà delle funzioni completamente additive d'insieme e sul passaggio al limite sotto il segno d'integrale.* « Bull. Acad. Sci. URSS », Ser. Math. [Izvestia Akad. Nauk SSSR], *9*, 311–320 (1945) (in Russo); *Osservazioni sulla mia Nota « Su alcune proprietà delle funzioni completamente additive d'insieme e sul passaggio al limite sotto il segno d'integrale »*, Ibidem, *11*, 101–104 (1947) (in Russo). Non avendo potuto consultare direttamente i lavori originali, mi riferisco per il contenuto alle recensioni apparse in « Mathematical Review ».

di uniforme additività [5] per le funzioni completamente additive di una famiglia (concetto essenziale, come vedremo, in questo genere di ricerche) ed enuncia, omettendone la dimostrazione, una condizione sufficiente per il passaggio al limite sotto il segno d'integrale nel caso di successioni d'integrali di Stieltjes con funzioni determinanti variabili insieme agli integrandi; condizione notevole, la validità della quale è confermata dalla presente ricerca per successioni d'integrali di Stieltjes–Lebesgue negli spazi astratti, risultando inoltre non solo sufficiente, ma anche necessaria.

Le recenti ricerche di Dubrovskiĭ sono in un certo senso più generali di quelle di Caccioppoli, in quanto inerenti a successioni d'integrali di Stieltjes-Lebesgue negli spazi astratti, ma meno generali circa i problemi affrontati, in quanto Dubrovskiĭ si occupa del problema dell'integrazione per serie solo nel caso particolare d'integrandi equi–limitati, essendo inoltre le masse supposte additive in senso completo in campi di Borel, ciò che, ad esempio, con riferimento a successioni d'integrali di Lebesgue negli spazi euclidei, implica la limitazione ad insiemi d'integrazione di misura finita.

Riprendendo gli studi sull'argomento, nello stesso ordine d'idee di Caccioppoli, sono pervenuto a risultati che appaiono definitivi, la cui esposizione dettagliata sarà oggetto di una Memoria nei Rendiconti del Seminario Matematico dell'Università di Padova. In questa Nota preventiva, analizzato brevemente il concetto di uniforme additività di Caccioppoli nei confronti di quello di equi–assoluta continuità di Vitali, passo ad enunciare i principali risultati cui sono pervenuto.

1. Sia S uno spazio astratto ed $\mathfrak{F}$ una famiglia d'insiemi di punti di S, completamente additiva rispetto ad S.

Dato un insieme I di $\mathfrak{F}$, indicheremo con $\mathfrak{F}\cdot I$ la famiglia completamente additiva, rispetto al sotto–spazio I, degli insiemi di $\mathfrak{F}$ contenuti in I.

Ciò posto, sia $\mu(I)$ una funzione d'insieme non negativa ed additiva in senso completo in ognuna delle famiglie della successione $\{\mathfrak{F}\cdot S_r\}$, dove $\{S_r\}$ è una successione crescente d'insiemi di $\mathfrak{F}$ convergente verso S. Una tale funzione può ovviamente prolungarsi su ogni insieme I di $\mathfrak{F}$ ponendo:

$$\mu(I) = \lim_{r\to\infty} \mu(IS_r).$$

(5) Tale concetto è stato recentemente ritrovato, sebbene in forma alquanto diversa, da V. M. DUBROVSKIĬ. Cfr. *Su alcune proprietà delle funzioni completamente additive d'insieme e loro applicazione alla generalizzazione di un teorema di Lebesgue.* « Rec. Math. » [Math. Sbornik], N. S. (62), *20*, 317–329 (1947) (in Russo).

Circa l'equivalenza delle definizioni di Caccioppoli e di Dubrovskiĭ, cfr. F. CAFIERO, *Sulle famiglie di funzioni additive d'insieme, uniformemente continue.* « Rend. Acc. Lincei » (8), *12*, 155-162 (1952). In tale Nota, al posto della locuzione « *uniforme additività* » introdotta da Dubrovskiĭ, viene usata quella di « *equi-continuità* ». Con riferimento a funzioni di punto, la locuzione usata da Caccioppoli è quella di « *funzioni a variazione uniformemente limitata* ».

Orbene, la funzione $\mu(I)$ così prolungata prende il nome di *misura* per gli insiemi di $\mathfrak{F}$ e lo spazio S, essendovi definita una famiglia completamente additiva d'insiemi, nella quale è stata introdotta una misura, sarà da noi detto *mensurale* (6).

In uno spazio mensurale, una funzione d'insieme additiva in senso completo in $\mathfrak{F}$, dicesi *assolutamente continua* quando è nulla sugli insiemi di misura nulla.

Si dimostra facilmente che:

Condizione necessaria e sufficiente affinché una funzione d'insieme $\varphi(I)$ *additiva in senso completo in* $\mathfrak{F}$, *sia assolutamente continua nello spazio mensurale* S, *è che, fissato un numero* $\varepsilon > 0$, *si possa in corrispondenza determinare un insieme* S_ϱ *della successione* $\{S_r\}$ *ed un numero* $\eta > 0$; *in modo tale che risulti* $|\varphi(I)| < \varepsilon$ *per ogni insieme* I *di* $\mathfrak{F}$ *tale che* $\mu(IS_\varrho) < \eta$.

Infinite funzioni d'insieme assolutamente continue nello spazio mensurale S, si diranno quindi *equi–assolutamente continue* nello spazio mensurale S, quando, *fissato un numero* $\varepsilon > 0$, *è possibile in corrispondenza determinare un insieme* S_ϱ *della successione* $\{S_r\}$ *ed un numero* $\eta > 0$, *in modo tale che per ogni funzione* φ *delle infinite considerate risulti* $|\varphi(I)| < \varepsilon$ *ogni qualvolta* I *è un insieme di* $\mathfrak{F}$ *per cui* $\mu(IS_\varrho) < \eta$ (7).

Negli spazi euclidei, l'equi–assoluta continuità degli integrali (intesi nel senso di Lebesgue) di una successione, i cui integrandi siano puntualmente convergenti, è, com'è noto, condizione necessaria e sufficiente per il passaggio al limite sotto il segno d'integrale quando questo si voglia assicurare su ogni sotto–insieme misurabile di un prefissato insieme di misura finita o infinita (8). Ma tale condizione di equi–assoluta continuità, senz'altro opportuna nel caso d'integrali di Lebesgue la cui definizione è essenzialmente legata a quella di misura, perde di significato nel caso generale di famiglie o successioni di funzioni d'insieme additive in senso completo, in particolare, per successioni d'integrali di Stieltjes–Lebesgue con masse eventualmente variabili, siano questi considerati negli spazi euclidei o in spazi astratti.

Il concetto di uniforme additività di Caccioppoli, introdotto appunto allo scopo di approfondire lo studio del problema del passaggio al limite sotto il segno di integrale, è invece indipendente dalla nozione di misura e però applicabile alla classe più naturale delle funzioni d'insieme additive in senso completo.

(6) Tale denominazione mi è stata suggerita da R. Caccioppoli.

(7) Per una tale generalizzazione del concetto di equi–assoluta continuità di Vitali, cfr. R. Caccioppoli, *Sull'integrazione delle funzioni discontinue*. « Red. Circ. Mat. Palermo », *52*, 1–29 (1928) (a p. 28).

(8) Per insiemi d'integrazione di misura finita, il teorema è di Vitali [loc. cit. in nota (2)]: circa la sufficienza della condizione nel caso d'insiemi d'integrazione di misura infinita cfr. R. Caccioppoli [loc. cit. in nota (7)] ed M. Picone, *Teoria dell'integrazione Lebesguiana*. Lezioni del corso di Analisi superiore raccolte dal prof. A. Ghizzetti. D.U.S.A. Roma 1941) (a p. 131): l'estensione relativa alla necessità della condizione è dovuta a G. Fichera, *Intorno al passaggio al limite sotto il segno di integrale*. « Portugaliae Mathematica », 4 (1943).

La completa additività in $\mathcal{F}$ di una funzione d'insieme $\varphi(I)$ è caratterizzata dalla semplice additività in $\mathcal{F}$ di $\varphi(I)$ e dalla condizione:

$$\lim_{n\to\infty} \varphi(I_n) = 0 \tag{1}$$

per ogni successione $\{I_n\}$ d'insiemi di $\mathcal{F}$ avente limite vuoto. È quindi naturale chiamare *uniformemente additive* in $\mathcal{F}$, infinite funzioni d'insieme additive in senso completo in $\mathcal{F}$, quando, *assegnata comunque una successione* $\{I_n\}$ *d'insiemi di* $\mathcal{F}$, *avente limite vuoto, la relazione di limite* (1) *sia verificata uniformemente dalle infinite funzioni considerate.*

In altri termini, infinite funzioni d'insieme additive in senso completo in $\mathcal{F}$, si diranno uniformemente additive in $\mathcal{F}$, quando, *assegnata comunque una successione* $\{I_n\}$ *d'insiemi di* $\mathcal{F}$ *avente limite vuoto, in corrispondenza ad ogni* $\varepsilon > 0$ *si lascia determinare un indice* ν (*dipendente dalla successione* $\{I_n\}$ *oltre che da* ε), *in modo tale che per ogni funzione* φ *delle infinite considerate risulti* $|\varphi(I_n)| < \varepsilon$ *per* $n > \nu$.

Tale concetto di uniforme additività assorbe quello di equi-assoluta continuità.

È evidente infatti che infinite funzioni d'insieme equi-assolutamente continue in un arbitrario spazio mensurale, sono anche uniformemente additive e d'altro canto, come lo stesso Caccioppoli ha dimostrato [9], infinite funzioni d'insieme uniformemente additive ed assolutamente continue in uno spazio mensurale, sono ivi anche equi-assolutamente continue.

Infine un teorema di Dubrovskiĭ [10], assicura la possibilità, per ogni famiglia di funzioni d'insieme uniformemente additive, di rendere mensurale lo spazio S in modo tale che in esso le considerate funzioni siano equi-assolutamente continue.

2. Riprendiamo i simboli e le notazioni introdotte nel numero precedente, pertanto S denota uno spazio astratto, $\mathcal{F}$ una famiglia completamente additiva rispetto ad S, $\{S_r\}$ una successione d'insiemi di $\mathcal{F}$ convergente verso S.

Gli insiemi di $\mathcal{F}$ saranno detti *misurabili* e una funzione $\varphi(I)$ additiva in senso completo in ognuna delle famiglie della successione $\{\mathcal{F}\cdot S_r\}$, sarà detta *funzione peso* o *massa*.

Infine distingueremo gli insiemi appartenenti ad una delle famiglie della successione $\{\mathcal{F}\cdot S_r\}$, da quelli misurabili, chiamandoli *di massa finita*.

Ciò posto, passiamo ad enunciare i fondamentali risultati conseguiti relativamente al problema generale del passaggio al limite sotto il segno di integrale.

(9) Loc. cit. in nota [3].

(10) V. M. DUBROVSKII, *Sulla base di una famiglia di funzioni completamente additive d'insieme e sulle proprietà di additività uniforme e di equi continuità*. « Doklady Akad. Nauk SSSR » (N. S.), *58*, 737-740 (1947) (in Russo).

Una prima proposizione, alla quale facilmente si perviene in base alla definizione d'integrale ed a due notevoli teoremi di O. Nikodym [11], è la seguente:

I. – *Se f è misurabile e limitata in un insieme* H *di massa finita e la successione* $\{\varphi_n\}$ *di funzioni peso converge su ogni insieme* I *di* $\mathfrak{F}\cdot$H, *posto:*

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_n(\mathrm{I}) = \varphi(\mathrm{I})$$

per ogni sotto–insieme I *misurabile di* H, *la funzione* φ (I) *è additiva in senso completo in* $\mathfrak{F}\cdot$H *e risulta:*

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathrm{I}} f\,d\varphi_n = \int_{\mathrm{I}} f\,d\varphi$$

per ogni insieme I *di* $\mathfrak{F}\cdot$H.

Una seconda proposizione essenziale, come del resto la prima, per la risoluzione definitiva del problema in esame, è la seguente:

II. – *Sia f_n sommabile in* H *rispetto a φ_n ($n = 1, 2, \cdots$) e si supponga che la successione $\{f_n\}$ converga verso zero in ogni punto di* H *e che la successione $\{\varphi_n\}$ di funzioni peso sia limitata su ogni sotto–insieme di* H *di massa finita.*

Allora, l'uniforme additività in $\mathfrak{F}\cdot$H *delle funzioni integrali delle f_n rispetto alle φ_n, è condizione necessaria e sufficiente affinché si abbia:*

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathrm{I}} f_n\,d\varphi_n = 0$$

per ogni insieme I *di* $\mathfrak{F}\cdot$H.

Dai teoremi ora enunciati ed in virtù di una nota condizione necessaria e sufficiente per l'uniforme additività delle funzioni d'insieme di una successione [12], discende il seguente che precisa e generalizza un notevole teorema di Lebesgue [13] anche nella forma più generale dovuta a T. Viola [14].

III. – *Sia f_n sommabile in* H *rispetto a φ_n ($n = 1, 2, \cdots$) e si supponga che la successione $\{\varphi_n\}$, di funzioni peso non negative, converga verso φ su ogni sotto–insieme di* H *di massa finita e che la successione $\{f_n\}$, puntualmente limitata in* H, *sia dotata di minimo e massimo limite sommabili in* H *rispetto a* φ.

(11) O. Nikodym, *Sur les suites convergentes des fonctions parfaitement additives d'ensemble abstrait.* «Monatshefte für Mathematik und Physik», *40*, 427–432 (1933).

(12) F. Cafiero, loc. cit. in nota (5).

(13) H. Lebesgue, *Sur l'intégration des fonctions discontinues.* «Ann. Ecol. Norm.», (3), *27*, 361–450 (1910).

(14) M. Picone e T. Viola, *Lezioni sulla teoria moderna dell'integrazione.* Ed. Scientifiche Einaudi 1952 (a p. 199).

Allora l'uniforme additività in $\mathfrak{F}\cdot H$ *delle funzioni integrali delle* f_n *rispetto alle* φ_n, *è condizione necessaria e sufficiente affinché risulti:*

$$\int_I \lim'_{n\to\infty} f_n\, d\varphi \leq \lim'_{n\to\infty} \int_I f_n\, d\varphi_n \leq \lim''_{n\to\infty} \int_I f_n\, d\varphi_n \leq \int_I \lim''_{n\to\infty} f_n\, d\varphi$$

per ogni sotto-insieme I *misurabile di* H.

3. Il teorema III risolve in sostanza il problema del passaggio al limite sotto il segno d'integrale per successioni d'integrali di Stieltjes-Lebesgue i cui integrandi siano puntualmente convergenti e le cui masse, supposte non negative, convergano su ogni sotto-insieme di massa finita di un prefissato insieme misurabile, risultando in tal caso la condizione di uniforme additività delle funzioni integrali della successione, necessaria e sufficiente per il passaggio al limite sotto il segno d'integrale, sempreché questo si voglia assicurare su ogni sotto insieme misurabile di quello prefissato ed il limite degli integrandi sia supposto sommabile rispetto alla funzione peso limite. Ma tale condizione restrittiva, insieme a quella sul segno delle masse, previo un'ulteriore e più approfondita analisi del problema, si palesa inessenziale. Sussistono infatti i seguenti teoremi, i quali assicurano per le successioni di funzioni integrali uniformemente additive, i cui integrandi e masse convergano, la sommabilità del limite degli integrandi rispetto al limite delle masse.

IV. – *Sia* f_n *sommabile in* H *rispetto a* φ_n $(n = 1, 2, \cdots)$ *e si supponga che la successione di masse* $\{\varphi_n\}$ *converga verso* φ *su ogni sotto-insieme di* H *di massa finita e che la successione* $\{f_n\}$ *converga puntualmente in* H *verso* f.

Allora se la successione delle funzioni integrali delle f_n *rispetto alle* φ_n *è limitata su ogni insieme di* $\mathfrak{F}\cdot H$, *la funzione* f *è sommabile in* H *rispetto a* φ.

V. – *Le funzioni integrali della successione*:

$$\left\{ \int_I f_n\, d\varphi_n \right\}$$

definite nella famiglia dei sotto-insiemi misurabili di H, *i cui integrandi convergano in ogni punto di* H *e le cui funzioni peso siano equi-limitate su ogni sotto-insieme di* H *di massa finita, sono uniformemente limitate in* $\mathfrak{F}\cdot H$, *se ivi sono uniformemente additive.*

Infine, in base a tali proposizioni ed alle prime due enunciate nel numero precedente, si perviene al seguente notevole teorema che contiene e generalizza quelli finora noti sul passaggio al limite sotto il segno d'integrale:

VI. – *Sia* $\{f_n\}$ *sommabile in* H *rispetto a* φ_n $(n = 1, 2, \cdots)$ *e si supponga che la successione* $\{f_n\}$ *converga verso* f *in ogni punto di* H *e la successione* $\{\varphi_n\}$ *converga verso* φ *su ogni sotto-insieme di* H *di massa finita.*

Allora condizione necessaria e sufficiente affinché per ogni sotto-insieme misurabile di H *si abbia:*

$$\lim_{n\to\infty} \int_I f_n\, d\varphi_n = \int_I f d\varphi\,,$$

è che le funzioni integrali della f_n rispetto a φ_n siano uniformemente additive nella famiglia dei sotto–insiemi misurabili di H.

4. Nell'ormai classico teorema di Vitali sul passaggio al limite sotto il segno d'integrale, gli integrandi possono supporsi convergenti quasi–ovunque o, per un'osservazione sostanzialmente dovuta a Lebesgue [15], in misura.

Orbene una tale maggiore generalità d'enunciati si può ottenere anche nel caso più generale da noi preso in esame.

All'uopo, indicata con V_n la variazione totale di φ_n $(n = 1, 2, \cdots)$ e posto:

$$\mu_r(I) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{V_n(I)}{2^n [V_n(S_r - S_{r-1} + 1)]} \qquad (S_0 = 0, r = 1, 2, \cdots)$$

per ogni sotto–insieme I misurabile di $(S_r - S_{r-1})$, nonché:

$$\mu(I) = \sum_{r=1}^{\infty} \mu_r [I(S_r - S_{r-1})] \tag{2}$$

per ogni insieme I di $\mathfrak{F}$, rendiamo mensurale lo spazio S introducendo in $\mathfrak{F}$ la misura $\mu(I)$.

Si dimostra allora agevolmente che i teoremi enunciati nei numeri precedenti continuano a sussistere quando gli integrandi sono supposti convergenti quasi–ovunque od in misura rispetto a $\mu(I)$.

Si noti che essendo le funzioni integrali delle f_n rispetto alle φ_n assolutamente continue nello spazio S così reso mensurale, in virtù di un teorema di Caccioppoli [16], la condizione di uniforme additività delle suddette funzioni integrali implica quella di equi–assoluta continuità delle stesse nel considerato spazio mensurale.

Pertanto, senza ledere la generalità, il problema del passaggio al limite sotto il segno d'integrale, anche nel caso generale d'integrali di Stieltjes Lebesgue con masse variabili con l'integrando, si potrebbe affrontare in base al concetto di equi–assoluta continuità, la misura essendo, per ogni successione di masse, fornita dalla (2). Ma la trattazione ne sarebbe notevolmente appesantita e gli enunciati, qualora non fosse acquisito il concetto di uniforme additività, apparirebbero poco significativi.

(15) H. LEBESGUE, *Sur les intégrales singulières.* « Ann. Fac. Sc. Univ. Toulouse », (3), *1*, 25–117 (1909). Cfr. anche G. FICHERA [loc. cit. in nota (8)] ed M. PICONE e T. VIOLA [loc. cit. in nota (14), a p. 192].

(16) Loc. cit. in nota (3).

Meccanica. — *Sul potenziale elettromagnetico nella teoria unitaria di Einstein.* Nota di BARTOLOMEO TODESCHINI, presentata (*) dal Corrisp. B. FINZI.

La teoria della relatività generale istituita da Einstein nel 1917 (la quale è, propriamente, una teoria della gravitazione) descrive i fenomeni per mezzo di tensori e di equazioni tensoriali in uno spazio–tempo riemanniano.

Nel vuoto il campo elettromagnetico è rappresentato da un tensore doppio emisimmetrico dello spazio–tempo, il tensore elettromagnetico. Il tensore elettromagnetico è ovunque irrotazionale. In una regione spazio–temporale dove si annulli la distribuzione elettrica, (campo neutro), esso risulta anche solenoidale: in una così fatta regione lo diremo quindi armonico, attribuendosi tale appellativo ad ogni campo tensoriale che sia irrotazionale e solenoidale insieme (1).

La irrotazionalità del tensore elettromagnetico risulta identicamente verificata esprimendo opportunamente il detto tensore mediante le derivate delle componenti di un vettore, che viene chiamato potenziale spazio–temporale del campo elettromagnetico, o, brevemente, potenziale elettromagnetico. Imponendo al tensore elettromagnetico, così espresso, l'ulteriore condizione di essere solenoidale, come avviene in campo neutro, si trova l'equazione cui deve soddisfare il potenziale perché il campo elettromagnetico sia armonico. Nelle regioni dove è nullo il tensore di Riemann contratto (regioni vuote di materia e di energia), e se si sceglie il potenziale con una particolare restrizione, sempre lecita, della sua arbitrarietà, tale equazione dice semplicemente che è nulla la divergenza del gradiente del potenziale stesso. Poiché la metrica dello spazio–tempo è indefinita, l'equazione presenta varietà caratteristiche reali ed ammette quindi un'effettiva propagazione ondosa, la propagazione delle onde elettromagnetiche: la diremo equazione di D'Alembert, estendendo al caso di una generica metrica indefinita la denominazione in uso quando la metrica è pseudopitagorica e di conseguenza l'operatore *div. grad.* che figura al primo membro si riduce all'operatore di D'Alembert $\Box$ (2).

Nella recente teoria unitaria di Einstein (3) lo spazio–tempo non è più, in generale, riemanniano: è uno spazio a torsione. Ancora può introdursi,

(*) Nella seduta dell'11 aprile 1953.

(1) Cfr. A. M. PRATELLI, *Sopra i tensori spazio–temporali di Hertz e di Riesz per il campo elettromagnetico neutro.* « Rend. Ist. Lombardo », vol. LXXXV, 1952.

(2) Se la *stessa* equazione fosse riferita ad una metrica definita, le varietà caratteristiche non sarebbero reali e non sarebbe possibile una propagazione ondosa: l'equazione si direbbe di Laplace, in analogia al caso in cui la metrica è pitagorica.

(3) A. EINSTEIN, *The Meaning of Relativity*, third edition, Princeton, 1950, Appendix II.

come nel caso di uno spazio–tempo riemanniano, un potenziale elettromagnetico; ancora il tensore elettromagnetico è armonico in campo neutro. Tale armonicità non è però espressa da un'equazione di D'Alembert, ma da un'equazione più complicata, cui deve soddisfare il potenziale, la quale contiene anche il tensore di torsione; le varietà caratteristiche di questa equazione, sotto opportune condizioni qualitative, sono tuttavia reali, come per l'equazione di D'Alembert, ed è quindi ancora possibile una propagazione ondosa. La presente Nota ha lo scopo di mettere in chiaro questi fatti e di precisare altresì l'equazione in parola. Incidentalmente viene inoltre data l'espressione della parte emisimmetrica del tensore fondamentale per mezzo del potenziale elettromagnetico.

1. Nello spazio–tempo riemanniano della relatività generale il campo elettrico ed il campo magnetico nel vuoto sono riassunti nel tensore elettromagnetico F_{mn}, emisimmetrico. La distribuzione elettrica è data da un vettore J_m, conglobante la densità di carica e la densità di corrente elettrica di convezione [4].

Indicando con ε^{hkmn} il tensore di Ricci dello spazio–tempo considerato, con la virgola la derivazione parziale ordinaria, con la sbarretta la derivazione tensoriale, le equazioni che traducono le leggi del campo elettromagnetico si scrivono così [4]:

$$\varepsilon^{hk\,mn}\, F_{mn|k} \equiv \varepsilon^{hk\,mn}\, F_{mn\,,\,k} = 0 \tag{1}$$

$$F_{mn}{}^{|n} = J_m . \tag{2}$$

La (1) dice che è nullo il rotore (completo) del tensore elettromagnetico. La (2) eguaglia la divergenza di questo tensore al vettore distribuzione elettrica e può interpretarsi come un'opportuna definizione della distribuzione elettrica stessa.

Si soddisfa identicamente alla (1) mediante un vettore φ_n, il potenziale elettromagnetico, ponendo [4]:

$$F_{mn} = \varphi_{n|m} - \varphi_{m|n} \equiv \varphi_{n\,,\,m} - \varphi_{m\,,\,n} . \tag{3}$$

Il vettore φ_n, (che riassume in sé il potenziale scalare e il potenziale vettore dello spazio tridimensionale), è definito a meno del gradiente di uno scalare, che si può sempre scegliere in modo che sia, ad esempio (condizione di Lorentz):

$$\varphi_n{}^{|n} = 0 . \tag{4}$$

Sostituendo l'espressione (3) di F_{mn} nella (2), utilizzando le formule di commutazione per le componenti del tensore derivato secondo di un vettore, e tenendo conto della (4), si trova [5]

$$\varphi_{m|n}{}^{n} + \varphi^{i}\, R_{im} = - J_m \tag{5}$$

dove R_{im} è il tensore di Riemann contratto ($R_{im} = R_{i\cdot jm}^{\cdot\,j}$).

(4) B. Finzi-M. Pastori, *Calcolo tensoriale e applicazioni*, Bologna, 1949, Cap. IX.
(5) M. von Laue, *La théorie de la relativité*, Paris, 1926, Tome II, Ch. V, p. 158.

In una regione spazio-temporale dove sia $J_m = 0$, (campo neutro), il tensore elettromagnetico risulta armonico, essendo solenoidale per la (2), oltre che irrotazionale come vuole la (1). Se ci si riferisce al potenziale elettromagnetico φ_m, scelto con la restrizione (4), essendo la irrotazionalità del tensore elettromagnetico implicita nella posizione (3), la sua armonicità è tradotta semplicemente dalla (5), nella quale va posto $J_m = 0$. Nelle regioni dove il tensore di Riemann contratto è nullo (regioni vuote di materia e di energia), ovunque se lo spazio-tempo è pseudoeuclideo, la sopra citata equazione si riduce alla

$$\varphi_{m\,n}{}^{n} = 0 \qquad (\text{div grad } \varphi = 0), \tag{6}$$

che, per essere indefinita la metrica dello spazio-tempo considerato, si può dire equazione di D'Alembert [6], ed ha, com'è noto, varietà caratteristiche reali, che coincidono con quelle dell'equazione

$$\varphi_{m\,,nl}\, g^{nl} = 0\,. \tag{6'}$$

2. Si consideri ora lo spazio-tempo della teoria unitaria di Einstein, che chiamerò, brevemente, spazio-tempo di Einstein [3].

Il tensore fondamentale non è più, in generale, simmetrico; neppure lo sono rispetto agli indici inferiori i coefficienti di connessione Γ^{t}_{il}, i quali sono scomponibili in una parte simmetrica, $\Gamma^{t}_{(il)}$, che individua una connessione affine, ed in una emisimmetrica $\Gamma^{t}_{\underset{\vee}{[il]}}$, che è un tensore, il tensore di torsione.

Il tensore fondamentale g_{ik} ed i coefficienti di connessione, nelle regioni vuote di materia e di energia, sono individuati dal sistema:

$$\underset{+-}{g_{ik\,;l}} \equiv g_{ik\,,l} - g_{tk}\,\Gamma^{t}_{il} - g_{it}\,\Gamma^{t}_{lk} = 0 \qquad \Gamma^{t}_{\underset{\vee}{[is]}} = 0 \qquad R_{li} = 0 \tag{7}$$

(essendo $R_{l}{}^{t}{}_{ji} = \Gamma^{t}_{lj\,,i} - \Gamma^{t}_{li\,,j} - \Gamma^{s}_{sj}\,\Gamma^{t}_{li} + \Gamma^{t}_{si}\,\Gamma^{s}_{lj}$). Si tratta, complessivamente, di 84 equazioni in 80 funzioni incognite delle coordinate, le 16 componenti del tensore fondamentale ed i 64 coefficienti di connessione. Tra queste 84 equazioni sussistono peraltro 4 identità differenziali, che riducono il numero delle equazioni indipendenti ad essere pari a quello delle incognite [7,8].

Le equazioni del campo elettromagnetico si scrivono così:

$$\varepsilon^{hkln}\,\underset{+}{F_{ln\,;k}} \equiv \varepsilon^{hkln}\,F_{ln\,,k} = 0 \tag{8}$$

$$F^{\overset{\circ}{r}\,\overset{\circ}{s}}{}_{;s} = J^{r}. \tag{9}$$

(6) Se lo spazio-tempo è pseudoeuclideo, con riferimento alla metrica pseudopitagorica $ds^2 = c^2\,dt^2 - (dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2)$ la (6) diviene:

$$\Box\,\varphi_m \equiv \frac{1}{c^2}\,\frac{\partial^2 \varphi_m}{\partial t^2} - \left(\frac{\partial^2 \varphi_m}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \varphi_m}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \varphi_m}{\partial x_3^2}\right) = 0\,.$$

(7) Cfr. P. UDESCHINI, *Le equazioni di prima approssimazione nella nuova teoria relativistica unitaria di Einstein*. « Rend. Acc. Naz. dei Lincei », ser. VIII, vol. IX, fasc. 5, 1950.

(8) A. EINSTEIN, *The Bianchi identities in the generalized theory of gravitation*. « Canadian Journal of Mathematics », vol. II, No. 1, 1950.

Il punto-e-virgola sta a indicare la derivazione tensoriale, e le polarizzazioni (+ , —) si riferiscono all'uso, nella detta derivazione, dei coefficienti di connessione o dei loro trasposti, mentre la polarizzazione (o) indica la derivazione neutra, cioè fatta con le sole parti simmetriche dei coefficienti stessi [3].

A proposito della (9), si noti che in uno spazio-tempo di Einstein non è la medesima cosa calcolare la divergenza neutra di un tensore doppio partendo dalla forma covariante o dalla forma controvariante del tensore: operando nei due modi, si ottengono due vettori differenti, come mostra un facile calcolo. Ora, nella (9), la divergenza neutra del tensore elettromagnetico si è fatta a partire dalla forma controvariante, perché così il vettore distribuzione elettrica che la eguaglia viene ad avere divergenza nulla, come si può facilmente verificare, e ciò esprime la conservazione dell'elettricità [9].

I puntini che precedono gl'indici di controvarianza al primo membro, (sempre della (9)), ricordano che gl'indici della forma covariante F_{mn} del tensore elettromagnetico sono stati portati in alto spostandoli entrambi verso destra, cioè componendo F_{mn} con $g^{mr} g^{ns}$, così da conservare l'emisimmetria del tensore medesimo (lo stesso sarebbe stato, se si fossero spostati *entrambi* gl'indici verso sinistra).

Com'è noto, assumendo come tensore elettromagnetico il coniugato della parte emisimmetrica del tensore fondamentale, $^*g_{ln} = \frac{1}{2} \varepsilon_{lnpq} g^{pq}$, la (8) è identicamente soddisfatta (in virtù delle equazioni (7)); la (9) serve poi a definire la distribuzione elettrica: sicchè lo spazio di Einstein viene a costituire un modello puramente geometrico del campo totale (non solo del campo gravitazionale, cioè, ma anche di quello elettromagnetico).

Prescindendo da ciò, l'integrale generale della (8) si esprime mediante un vettore potenziale φ_n, in analogia al caso di uno spazio-tempo riemanniano, pur di scegliere polarizzazioni convenienti nelle derivazioni. Basta porre:

$$(10) \qquad F_{ln} = \varphi_{n\,;l}^{+} - \varphi_{l\,;n}^{-} \equiv \varphi_{n,l} - \varphi_{l,n} .$$

Si osservi che, identificando il tensore elettromagnetico con $^*g_{ln}$, la parte emisimmetrica del tensore fondamentale si esprime mediante il potenziale nel seguente modo:

$$(11) \qquad g^{rs}_{\vee} = \frac{1}{2} \varepsilon^{lnsr} (\varphi_{n\,;l}^{+} - \varphi_{l\,;n}^{-}) \qquad (\text{supposto } \|g_{ik}\| < 0).$$

Lo si trova componendo ambo i membri della (10) con ε^{lnsr} e tenendo conto delle relazioni tra il tensore di Ricci e il tensore fondamentale. La (11) mostra che la parte emisimmetrica del tensore fondamentale non può essere *a priori* arbitraria, se deve servire ad individuare il campo elettromagnetico ed equivale alle condizioni che vengono imposte al tensore fondamentale dalla seconda delle (7), in virtù della prima [9].

(9) M. PASTORI, *Sulle equazioni del campo elettromagnetico nell'ultima teoria di Einstein*. « Rend. Acc. Naz. dei Lincei », ser. VIII, vol. XII, 1952.

Si può sfruttare l'incompleta determinazione che anche qui sussiste, come già nel caso di uno spazio–tempo riemanniano, nel vettore φ_n, per imporre che sia, ad esempio:

$$\varphi_{n\,;\,\overset{+}{}}^{\;\;n\cdot} = 0 . \tag{12}$$

Fatte queste premesse, si sostituisca l'espressione (10) di F_{ln} nella equazione (9); si osservi che per la derivazione occorre polarizzare egualmente gl'indici che si saturano, e si scelga, ad esempio, la polarizzazione +; si tenga presente che è:

$$g^{\overset{l\,r}{+\,\circ}}{}_{;\,s} = g^{\overset{l\,r}{+\,-}}{}_{;\,s} + g^{lt}\,\underset{\vee}{\Gamma}{}^{r}_{ts} = g^{lt}\,\underset{\vee}{\Gamma}{}^{r}_{ts}\ (3) \qquad g^{\overset{n\,s}{+\,\circ}}{}_{;\,s} = g^{nt}\,\underset{\vee}{\Gamma}{}^{s}_{ts} = 0 \ \text{(v. (7))}.$$

Si trova:

$$J^r = \left(F_{ln}\, g^{\overset{l\,r}{\circ}}\, g^{\overset{n\,s}{\circ}}\right)_{;\,s} = F_{\underset{+\,+}{l\,n\,;\,s}}\, g^{lr}\, g^{ns} + F_{ln}\, g^{lt}\, g^{ns}\, \underset{\vee}{\Gamma}{}^{r}_{ts} = \tag{13}$$

$$= \varphi_{\underset{+\,+}{n\,;\,ls}}\, g^{lr}\, g^{ns} - \varphi_{\underset{-\,+\,+}{l\,;\,ns}}\, g^{lr}\, g^{ns} + (\varphi_{\underset{+}{n\,;\,l}} - \varphi_{\underset{-}{l\,;\,n}})\, g^{lt}\, g^{ns}\, \underset{\vee}{\Gamma}{}^{r}_{ts} .$$

Il primo addendo dell'ultimo membro può essere trasformato così:

$$\varphi_{\underset{+\,+}{n\,;\,ls}}\, g^{lr}\, g^{ns} = g^{lr}\,(\varphi_{n\,;\,\overset{+}{}}^{\;\;n\cdot}{}_{l} + \varphi_t\, R_{li}\, g^{ts}).$$

Per vederlo basta applicare la formula di commutazione

$$\varphi_{\underset{+\,+}{n\,;\,ls}} = \varphi_{\underset{+\,-}{n\,;\,sl}} + \varphi_t\, R_{n\cdot sl}^{\;\;\;t}$$

(che è tra le più semplici, in quanto manca di un termine generalmente presente, che contiene il tensore di torsione), ed osservare che risulta

$$\varphi_{\underset{+}{n\,;\,sl}}\, g^{ns} = \left(\varphi_{\underset{+}{n\,;\,s}}\, g^{\overset{n\,s}{+\,-}}\right)_{;\,l} = \varphi_{n\,;\,\overset{+}{}}^{\;\;n\cdot}{}_{l}$$

e inoltre, in virtù della seconda delle equazioni (7), come scende da quanto mostra Einstein in una sua Nota apparsa sul «Canadian Journal of Mathematics» (8),

$$R_{n\cdot sl}^{\;\;\;t}\, g^{ns} = R_{n\cdot isl}\, g^{ti}\, g^{ns} = R_{li}\, g^{ti}.$$

Se poi si tengono presenti la condizione (12) imposta al vettore φ_n e l'ultima delle (7) si vede che il sopra citato primo addendo è nullo. Si ha quindi:

$$J^r = -\,\varphi_{\underset{-}{l\,;\,n}}{}^{n\cdot}\, g^{lr} + (\varphi_{\underset{+}{n\,;\,l}} - \varphi_{\underset{-}{l\,;\,n}})\, g^{lt}\, g^{ns}\, \underset{\vee}{\Gamma}{}^{r}_{ts} . \tag{14}$$

La (14) può essere scritta in forma covariante, componendo ambo i membri con g_{mr}. Se si suppone che sia $J^r = 0$ (campo neutro), si trova:

$$\varphi_{\underset{+\,+}{m\,;\,n}}{}^{n\cdot} + (\varphi_{\underset{+}{n\,;\,l}} - \varphi_{\underset{-}{l\,;\,n}})\, \underset{\smile}{\Gamma}{}^{n\cdot l\cdot}_{m\cdot} = 0 . \tag{15}$$

Questa equazione, con la condizione restrittiva (12) per la scelta degli elementi arbitrari di φ_n, traduce, nella teoria di Einstein, l'armonicità del tensore elettromagnetico in campo neutro affermata dalle (8) (9) per $J_m = 0$; essa tiene il luogo dell'equazione di D'Alembert (6), che vale nelle regioni vuote di uno spazio-tempo riemanniano [10].

Le varietà caratteristiche della (15) coincidono con quelle dell'equazione $\varphi_{m,nl}\, g^{nl} = 0$, la quale è formalmente identica alla (6'). Se le g^{nl} dello spazio-tempo einsteiniano soddisfano alle medesime condizioni qualitative a cui sono sottoposte le g^{nl} dello spazio-tempo riemanniano a metrica indefinita, le varietà caratteristiche sono reali, come quelle della (6), ed è quindi possibile un'effettiva propagazione ondosa.

Astronomia. — *Sulla variazione del profilo di alcune righe spettrali dal centro al lembo del Sole.* Nota IV di Massimo Cimino, presentata [*] dal Socio G. Armellini.

Si fa seguito ad alcune Note dallo stesso titolo apparse in questi « Rendiconti » [1].

8. Disegni dei profili e confronto con altre determinazioni. – Nella tabella III del n. 7 furono date le intensità in alcuni punti selezionati del profilo delle righe spettrali solari del tripletto infrarosso del calcio ionizzato. Detti punti furono scelti in zone che non apparivano perturbate da altre righe più deboli (*blends*); inoltre, per la zona centrale delle righe, fu fatta la media delle intensità misurate in punti simmetrici corrispondenti dell'ala viola (v) e di quella rossa (r), là dove la differenza non eccedeva il 3 % del fondo continuo.

Nella presente Nota darò invece una riproduzione (fig. 2, 3 e 4), la più fedele possibile, dei profili (intensità) delle righe del tripletto studiato, allo scopo di porre in evidenza le sensibili variazioni che hanno luogo allorchè si passa dal centro al lembo del Sole. Ricordo che il fondo continuo fu scelto empiricamente, registrando al microfotometro alcuni tratti della lastra sufficientemente lontani dai centri delle righe e corrispondenti a punti del citato *Photometric Atlas* ecc. del Minnaert, nei quali il fondo continuo

(10) Naturalmente la (15) non è la sola forma tensoriale sotto la quale si può scrivere l'equazione relativa al potenziale elettromagnetico: altre, ad essa sostanzialmente equivalenti, si ottengono scegliendo la polarizzazione degli indici che si saturano in modo diverso da come si è fatto nella (13), od usando degli elementi arbitrari di φ_n per imporre una condizione diversa dalla (12), ad esempio la condizione $\varphi_{n\,;}{}^{n} = 0$. Di tali forme, però, tutte quelle che ho saggiato appaiono meno semplici della (15).

(*) Nella seduta del 14 febbraio 1953.

(1) Serie VIII, vol. IX, fasc. 3-4, pp. 177-181; vol. XIII, fasc. 3-4, pp. 120-126; vol. XIV, fasc. 2, pp. 243-250 (1953).

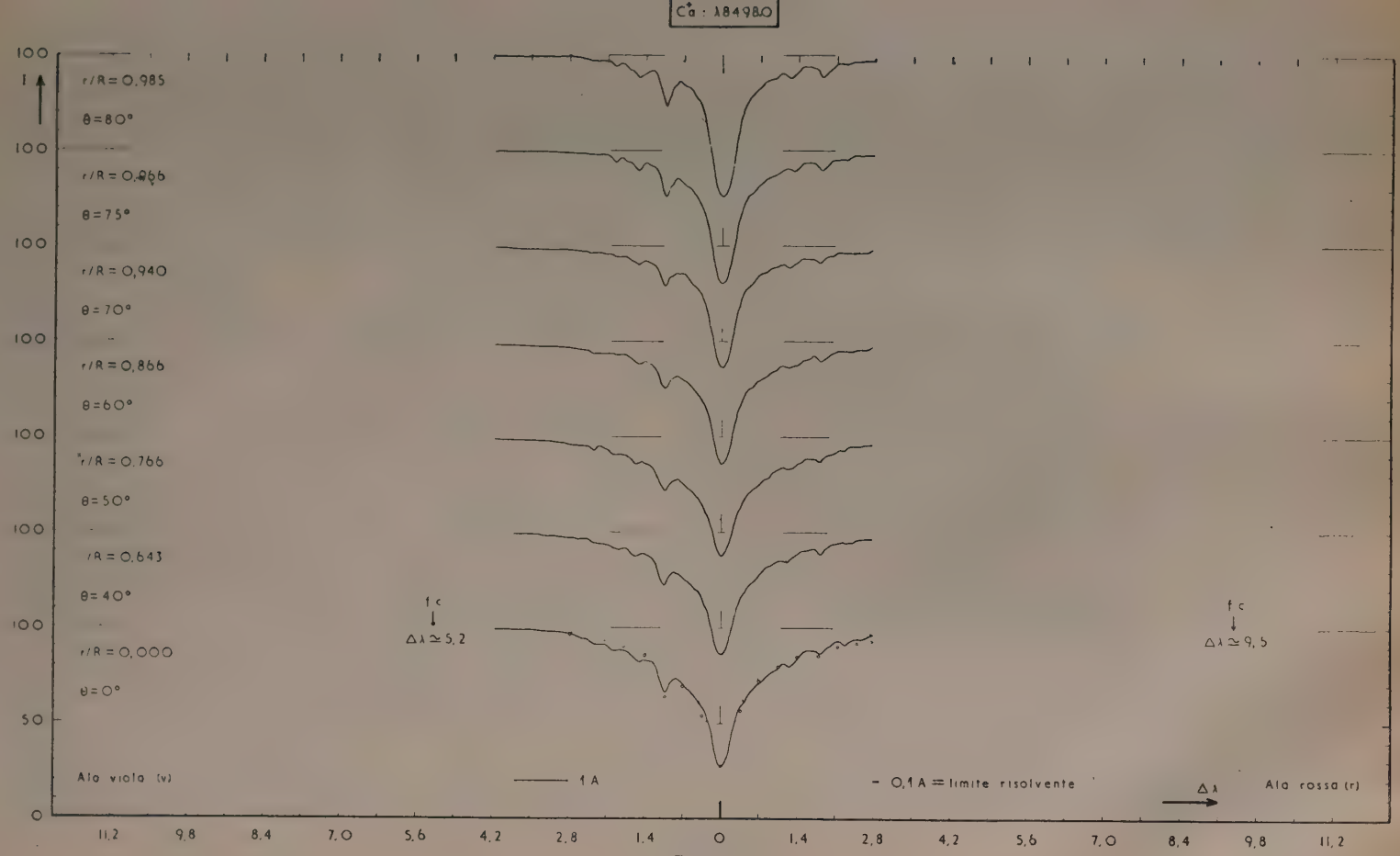

Ca : λ 84980
100
I
r/R = 0,985
θ = 80°
100
r/R = 0,866
θ = 75°
100
r/R = 0,940
θ = 70°
100
r/R = 0,866
θ = 60°
100
r/R = 0,766
θ = 50°
100
r/R = 0,643
θ = 40°
100
r/R = 0,000
θ = 0°
50
0
f c
Δλ ≃ 5,2
f c
Δλ ≃ 9,5
Ala viola (v)
1 A
- 0,1 A = limite risolvente
Δλ
Ala rossa (r)
11,2
9,8
8,4
7,0
5,6
4,2
2,8
1,4
0
1,4
2,8
4,2
5,6
7,0
8,4
9,8
11,2

Fig. 2.

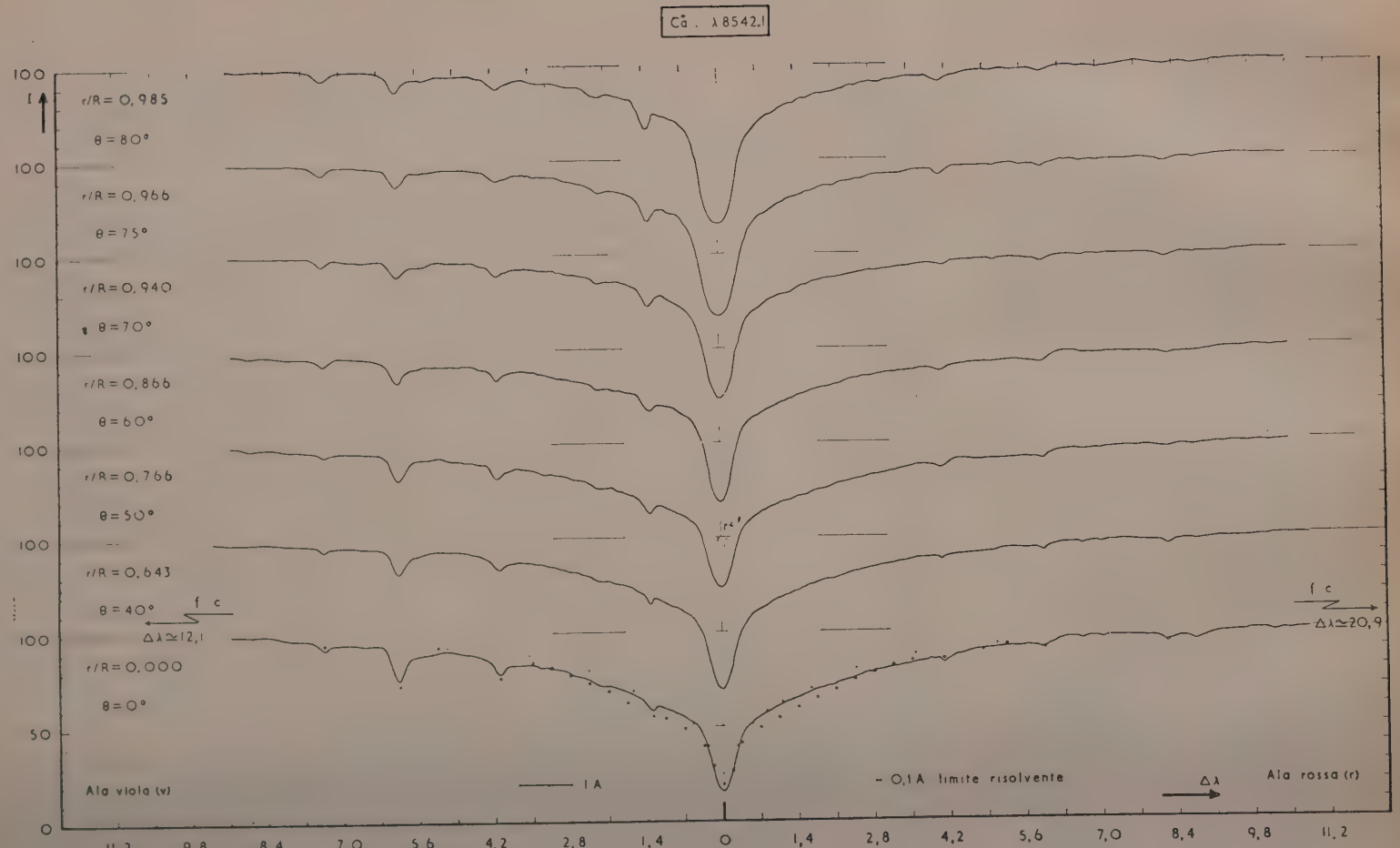

Ca . λ 8542.1
I
r/R = 0,985
θ = 80°
r/R = 0,966
θ = 75°
r/R = 0,940
θ = 70°
r/R = 0,866
θ = 60°
r/R = 0,766
θ = 50°
r/R = 0,643
θ = 40°
f c
Δλ≃12,1
r/R = 0,000
θ = 0°
f c
Δλ≃20,9
100
50
0
Ala viola (v)
1 A
0,1 A limite risolvente
Δλ
Ala rossa (r)
11,2
9,8
8,4
7,0
5,6
4,2
2,8
1,4
0
1,4
2,8
4,2
5,6
7,0
8,4
9,8
11,2

Fig. 3.

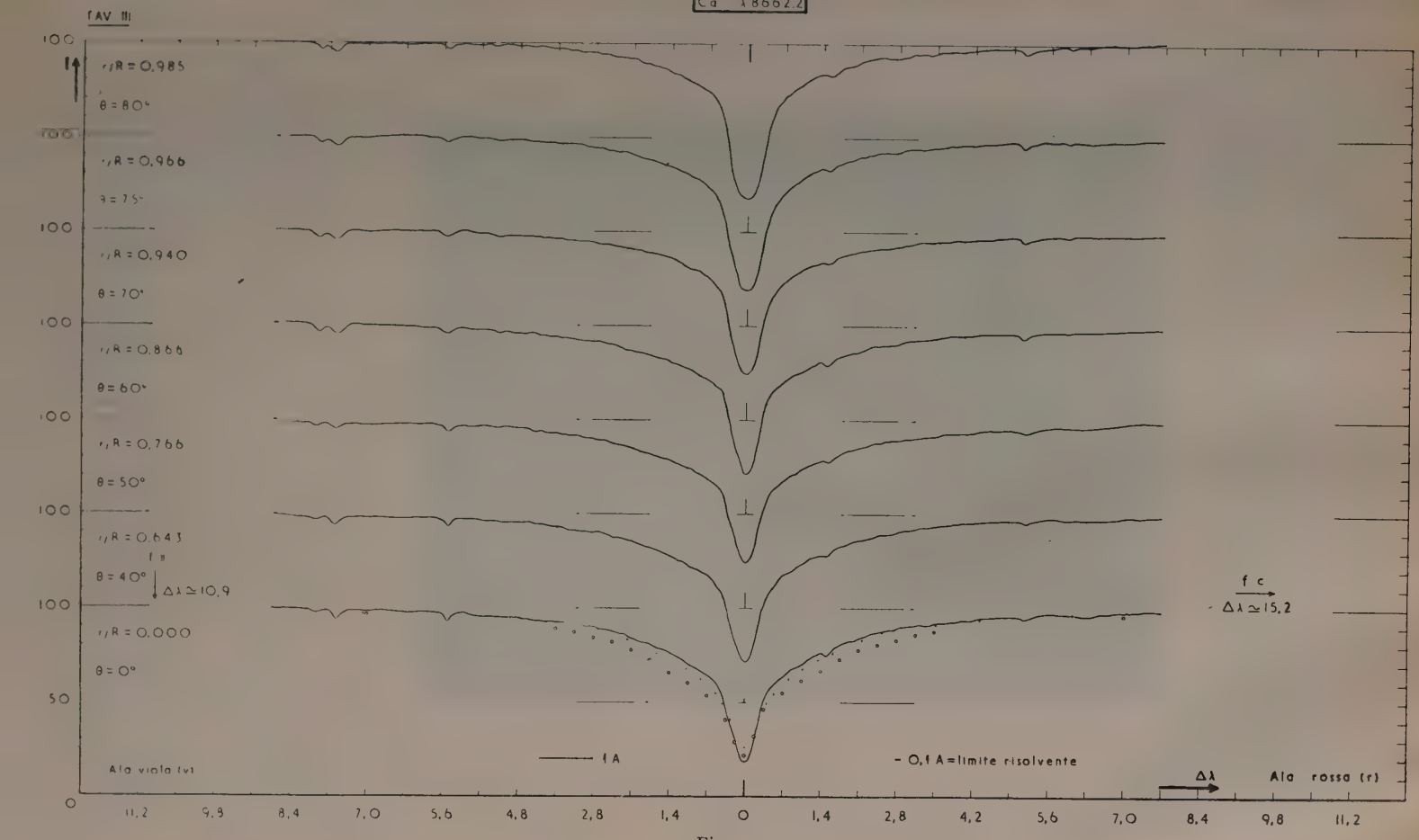

Ca λ 8662.2
r/R = 0.985
θ = 80°
r/R = 0.966
θ = 75°
r/R = 0.940
θ = 70°
r/R = 0.866
θ = 60°
r/R = 0.766
θ = 50°
r/R = 0.643
θ = 40°
Δλ ≃ 10,9
r/R = 0.000
θ = 0°
f c
Δλ ≃ 15,2
1 A
0,1 A = limite risolvente
Ala viola (v)
Δλ
Ala rossa (r)
11,2 9,8 8,4 7,0 5,6 4,8 2,8 1,4 0 1,4 2,8 4,2 5,6 7,0 8,4 9,8 11,2

Fig. 4.

appare sicuramente raggiunto. Questi punti sono stati indicati nel disegno con delle freccie sormontate dalla sigla *f. c.*, ed è indicata la loro distanza (in Angstrom) dal centro della riga.

Una discussione delle conseguenze teoretiche sullo stato fisico dell'atmosfera solare quale è possibile trarre dall'analisi dei nostri risultati sarà

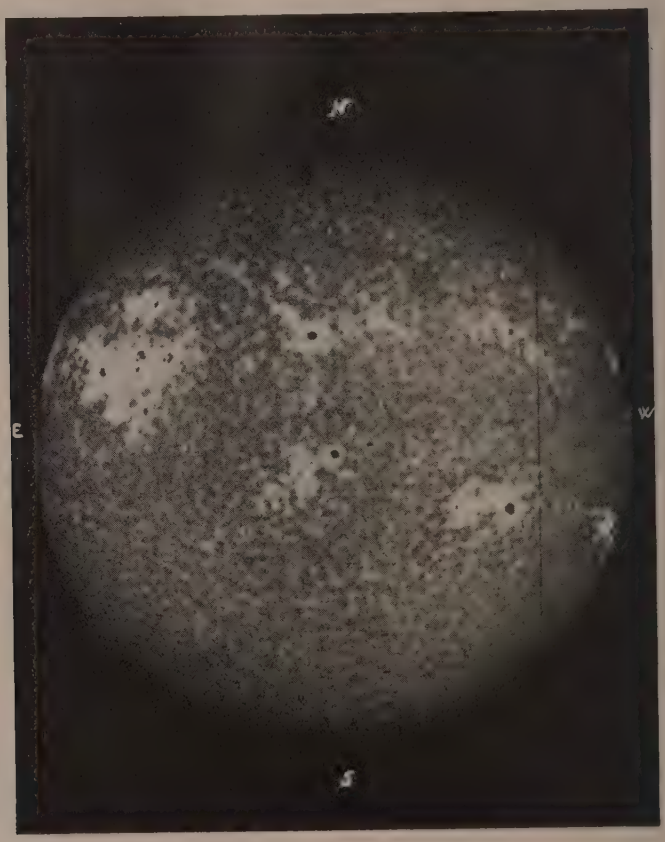


Fig. 5.

svolta in una prossima ed ultima Nota sull'argomento. Per il momento ci limitiamo a far notare il diverso e caratteristico comportamento delle ali delle righe e del loro centro (*Doppler core*), rilevabile a prima vista. Si osserverà che mentre le ali delle righe vanno perdendo importanza nel passaggio dagli spettrogrammi del centro a quelli del lembo, la zona centrale della riga tende invece ad allargarsi, mentre l'intensità centrale, che in un primo tempo diminuisce, riacquista poi il lembo valori comparabili con quelli del centro. Questo allargamento centrale della riga al lembo è ben visibile anche ad occhio sugli spettrogrammi.

Termineremo questo paragrafo con un confronto dei nostri risultati con quelli ottenuti dal Minnaert [2] e dall'Houtgast [3]. Come già fu detto al n. 1 (Nota I) il reticolo e lo spettrografo da me usati sono gli stessi di quelli impiegati per il *Photometric Atlas*... Con riferimento allo spettrogramma del centro del Sole, nel confronto dei miei risultati con quelli del Minnaert [i valori tratti dall'*Atlas* sono indicati con cerchietti nel disegno], si può osservare la buona coincidenza di valori *centrali*; subito dopo però, i valori dell'*Atlas* appaiono sistematicamente un poco inferiori ai miei per diventare poi superiori alle estremità dell'ala. In ogni caso però i divari non superano l'ordine di grandezza del 5 % del *f.c.*, rimanendo nell'ordine della precisione che può attendersi da misure del genere eseguite sopra una sola lastra [gruppo 26_a–26_b].

L'accordo coi valori dell'Houtgast [indicati nel disegno con delle crocette] appare ancora migliore, salvo che pei valori centrali, che egli dà sistematicamente superiori ai miei a quelli del Minnaert. Anche questo confronto riguarda soltanto gli spettrogrammi del centro del Sole, poichè per gli altri la posizione rispetto al lembo della fenditura dello spettrografo non è stata la stessa nelle due determinazioni. Un esame più completo dei risultati di questo autore sarà perciò fatta in sede di discussione teoretica.

Per comodità riproduco nella fig. 5 un fotoeliogramma nella riga K del calcio ionizzato eseguita a Monte Wilson il giorno successivo (16 febbraio 1950) a quello in cui furono presi gli spettrogrammi che sono serviti per il presente lavoro. I trattini in nero dal centro verso il polo solare Sud stanno ad indicare, approssimativamente, le posizioni della fenditura dello spettrografo; come si vede esse furono scelte per quanto possibile lontane dalle grandi zone di perturbazione.

Chimica fisica. — *Sulla cinetica della reazione tra nitrocloroderivati aromatici e idrato potassico in soluzione in miscele acqua–diossano* (*). Nota di MASSIMO SIMONETTA e GIORGIO FAVINI, presentata (**) dal Socio L. CAMBI.

Nel corso della nostra indagine sull'influenza della presenza di un nitrogruppo sul legame C–Cl in molecole organiche di vario tipo, abbiamo preso in esame il comportamento in soluzioni alcaline diluite dei seguenti composti: 1–nitro, 2-cloronaftalina; 1–cloro, 4–nitronaftalina e 1–cloro, 2–nitronaftalina. La reattività del cloro in questi composti è stata determinata effettuando la cinetica delle reazioni tra idrato potassico e derivato alogenato in soluzione, usando come solvente una opportuna miscela acqua–

(2) M. MINNAERT, ...*Photometric Atlas*..., Amsterdam, 1940, più volte citato.

(3) J. HOUTGAST, *The variations in the profiles etc.*, Utrecht, 1942, pp. 74–78.

(*) Lavoro eseguito presso l'Istituto di Chimica Industriale dell'Università e presso l'Istituto di Chimica Generale del Politecnico di Milano.

(**) Nella seduta del 14 marzo 1953.

diossano in modo da ottenere un'unica fase nelle condizioni delle nostre esperienze.

Parte sperimentale.

a) Preparazione dei composti: le tre cloronitronaftaline sono state ottenute dalle corrispondenti nitronaftilammine secondo il metodo di Hodgson e Walker [1]. I prodotti di reazione venivano purificati per distillazione nel vuoto e successiva cristallizzazione da alcool sino a punto di fusione costante. I prodotti finali avevano le seguenti caratteristiche fisiche:

	p. f. (°C.)	$d_{25°}$	$\mu_{25°}$ in D.
1–nitro, 2–cloronaftalina	99	1,4856	4,1
1–cloro, 4–nitronaftalina	86–87	1,5048	2,8
1–cloro, 2–nitronaftalina	80	1,5549	4,3

I valori riportati per i momenti elettrici sono stati ottenuti mediante un apparecchio Kipp & Zonen secondo il metodo Cohen–Henriquez [2].

b) Preparazione delle soluzioni: i solventi usati erano acqua distillata e diossano purificato secondo il metodo di Laitinen e Wawzonek [3]. Le miscele di reazione venivano preparate mescolando quantità opportune di acqua distillata e di soluzioni a titolo noto di cloronitrocomposto in diossano e di idrato potassico in acqua distillata.

c) Isolamento e riconoscimento dei prodotti di reazione: in un pallone munito di ricadere si sono sciolti 5,2 gr. di 1–cloro–2–nitronaftalina in 100 cc. di diossano con aggiunta di 25 cc. di acqua e 50 cc. di KOH acquosa 0,5 N e lo si è mantenuto in termostato a 85 °C per 18 ore. Alla fine la soluzione, fortemente colorata in rosso, è stata diluita con 500 cc. di acqua leggermente alcalina e si è avuto un precipitato giallo di 1–cloro, 2–nitronaftalina non idrolizzata, della quale si è controllato il punto di fusione di 81 °C. Dal filtrato per acidificazione con acido cloridrico diluito è precipitato il 2–nitro, 1–naftolo, di colore giallo canarino, il cui punto di fusione è risultato di 126 °C. Questo precipitato si discioglie in potassa e riprecipita acidificando. Si sono ottenuti gr. 1,8 di 1–cloro, 2–nitronaftalina inalterata e gr. 2,2 di 2–nitro, 1–naftolo. Lo stesso procedimento applicato alla 1–cloro, 4–nitronaftalina ha dato gr. 3,6 di 1 cloro, 4–nitronaftalina inalterata e gr. 1,2 di 4–nitro, 1–naftolo con p.f. 165 °C; applicato alla 1–nitro, 2–cloronaftalina ha dato gr. 3,8 di 1–nitro, 2 cloronaftalina inalterata e gr. 0,6 di 1–nitro, 2–naftolo con p. f. 103 °C.

d) Reazioni inverse: prove eseguite nelle stesse condizioni delle nostre cinetiche, hanno permesso di escludere – com'era facilmente prevedibile – la possibilità di una influenza della reazione inversa.

(1) H. Hodgson, J. Walker, « J. Chem. Soc. », 1620 (1933).
(2) Cohen–Henriquez, « Physica », *1*, 41 (1934); « Rec. Trav. Chim. », *3*, 327 (1935).
(3) H. A. Laitinen–S. Wawzonek, « J. Am. Chem. Soc. », *64*, 1765 (1942).

e) Modalità e risultati delle cinetiche: le reazioni sono state eseguite in un ultratermostato nel quale la temperatura era controllata a ± 0,05 °C. Ciascuna determinazione è stata eseguita secondo le modalità seguenti: 20 cc. di soluzione 0,125 N in diossano del cloronitrocomposto e una miscela di 10 cc. di KOH 0,5 N acquosa e 2,5 cc. di acqua distillata venivano introdotti separatamente nel termostato. Raggiunto l'equilibrio termico, la reazione veniva iniziata mescolando le due soluzioni. Dopo il tempo voluto la reazione si arrestava versando in 50 cc. di acido nitrico diluito (0,3 N circa). Veniva quindi determinata la quantità di cloroioni presenti aggiungendo $AgNO_3$ e titolandone l'eccesso secondo Vohlard, dopo filtrazione del precipitato. I risultati per le varie sostanze e alle varie temperature sono raccolti nelle tabelle seguenti (% di Cl^- formato):

1–cloro, 2–nitronaftalina

t (in ore)	65 °C.	70 °C.	75 °C.	80 °C.	85 °C.
1,5	—	—	6,51	11,92	15,36
3	5,64	9,72	12,08	21,08	25,90
4,5	—	—	19,56	29,44	35,80
6	12,60	16,68	23,52	37,28	42,16
9	16,48	21,60	—	—	—
14	19,16	30,20	—	—	—

1–cloro, 4–nitronaftalina				1–nitro, 2–cloronaftalina			
t (ore)	75 °C.	80 °C.	85 °C.	t (ore)	75 °C.	80 °C.	85 °C.
3	3,37	5,19	5,50	3	—	—	1,66
6	5,41	8,77	9,00	6	1,45	2,32	3,02
9	7,02	11,79	15,04	9	2,09	3,43	3,94
12	8,78	14,65	—	12	2,97	4,09	—
12,5	—	—	19,44	12,5	—	—	5,26

DISCUSSIONE DEI RISULTATI.

L'equazione delle nostre reazioni può essere formulata in uno dei due modi seguenti:

(1) $$R\text{–}Cl + OH^- \longrightarrow R\text{–}OH + Cl^-$$

(2) $$R\text{–}Cl + 2\,OH^- \longrightarrow R\text{–}O^- + Cl^- + H_2O$$

Tali reazioni sono facilitate dal carattere polare negativo (fortemente — I, — E, nel senso di Dewar [4]) del nitrogruppo e rappresentano un tipico caso di sostituzione nucleofila in composti aromatici. Poiché, quasi senza eccezioni, tutte le sostituzioni nucleofile aromatiche di cui è stato determinato l'ordine della reazione sono risultate del secondo ordine [5], era prevedibile per il nostro caso un meccanismo bimolecolare, vale a dire, secondo la classificazione di Ingold e Hughes [6], un meccanismo S_{N_2}. Con le opportune equazioni cinetiche sono state calcolate le costanti di velocità k_1 e k_2 rispettivamente per le reazioni (1) e (2). La situazione reale sarà intermedia tra quelle corrispondenti alle reazioni indicate e sarà determinata dall'equilibrio naftolo/naftolato in soluzione:

$$(3) \qquad R\text{-}Cl + OH^- \longrightarrow R\text{-}OH + Cl^- \underset{\longleftarrow}{\overset{OH^-}{\longrightarrow}} R\text{-}O^- + Cl^- + H_2O\,.$$

Comunque il meccanismo della reazione è lo stesso nei due casi e la velocità misurabile è quella del primo stadio di (3). L'influenza della formazione di naftolato sul calcolo della costante k è solamente indiretta, in quanto è dovuta alla scomparsa di una seconda mole di ioni OH per ciascuna mole di Cl formatosi. Nella tabella I sono riportati i valori di k_1 e k_2 (in litri moli^{-1} ore^{-1}), calcolati come media dei valori corrispondenti ai vari tempi.

TABELLA I.

t °C	1–cloro, 2–nitronaftalina		1–cloro, 4–nitronaftalina		1–nitro, 2–cloronaftalina	
	k_1	k_2	k_1	k_2	k_1	k_2
65	0,136	0,142	—	—	—	—
70	0,201	0,211	—	—	—	—
75	0,307	0,320	0,0596	0,0608	0,0158	0,0159
80	0,556	0,602	0,0991	0,1016	0,0246	0,0252
85	0,709	0,785	0,1170	0,1230	0,0301	0,0322

Il procedimento di calcolo esposto è risultato poco soddisfacente perché è praticamente impossibile ricavare da queste costanti l'energia di attivazione apparente di Arrhenius. Tale anomalia potrebbe derivare in gran parte dall'aver usato come « massa attiva » degli ioni OH il valore della concentrazione bruta dell'idrato potassico. Senza pretendere di arrivare ad una determinazione esatta dell'attività di tali ioni, valori più vicino al vero

(4) M. J. S. DEWAR, *The electronic theory of Organic Chemistry*. Oxford (1949).
(5) J. MILLER, « Rev. Pure Appl. Chem. », *1*, 171 (1951); « J. Chem. Soc. », 3550 (1952).
(6) E. D. HUGHES, Trans. Far. Soc. », *37*, 603 (1941).

si possono ottenere eseguendo misure di conducibilità in soluzioni diluite di KOH in un solvente di composizione identica a quello usato nelle prove cinetiche. Sono state eseguite esperienze a 50 e 75 °C. Dopo aver tentato alcune delle funzioni più comunemente usate, abbiamo riscontrato che, riportando in un diagramma i valori di $1/\Lambda$ in funzione di $C\Lambda$ (Λ conducibilità equivalente e C concentrazione bruta della potassa) si ottengono delle rette l'intercette con l'asse delle ordinate e le inclinazioni delle quali permettono di ricavare almeno formalmente, un valore approssimato di K_B. È risultato a 50° $K_B = 0{,}179$ moli/litro: a 75° $K_B = 0{,}138$ moli/litro. Per le altre temperature i valori di K_B sono stati ricavati applicando l'equazione di Van't Hoff. Le nuove equazioni cinetiche sono risultate del seguente tipo:

$$\frac{dx}{(0{,}077 - x)\left[\sqrt{1 + \frac{4}{K_B}(0{,}154 - 2x)} - 1\right]} = k_2 \frac{K_B}{2} dt$$

(e analogamente per k_1) e sono state integrate graficamente. I risultati ottenuti sono esposti nella tabella II.

TABELLA II.

1-cloro, 2-nitronaftalina

t (ore)	65°	70°	75°		80°		85°	
	k_2	k_2	k_1	k_2	k_1	k_2	k_1	k_2
1,5	—	—	0,514	0,566	0,955	0,976	1,275	1,310
3	0,208	0,377	0,476	0,522	0,900	0,945	1,170	1,240
4,5	—	—	0,540	0,590	0,901	0,966	1,182	1,295
6	0,248	0,343	0,504	0,554	0,918	1,010	1,110	1,245
9	0,226	0,314	—	—	—	—	—	—
14	—	0,306	—	—	—	—	—	—

1-cloro, 4-nitronaftalina

t (ore)	75°		80°		85°	
	k_1	k_2	k_1	k_2	k_1	k_2
3	0,1245	0,1250	0,1970	0,1985	0,2118	0,2145
6	0,1015	0,1195	0,1610	0,1640	0,1775	0,1820
9	0,0884	0,1015	0,1563	0,1603	0,2070	0,2140
12	0,0846	0,0905	0,1493	0,1535	—	—
12,5	—	—	—	—	0,2000	0,2080

Segue: TABELLA II.

1–nitro, 2–cloronaftalina

t (ore)	75°		80°		85°	
	k_1	k_2	k_1	k_2	k_1	k_2
3	—	—	—	—	0,0622	0,0625
6	0,0264	0,0266	0,0432	0,0434	0,0572	0,0575
9	0,0254	0,0258	0,0428	0,0433	0,0500	0,0505
12	0,0273	0,0276	0,0385	0,0386	—	—
12.5	—	—	—	—	0,0487	0,0492

Lo scostamento dei valori per i vari tempi è risultato nei limiti ammissibili a causa degli errori sperimentali e delle varie approssimazioni introdotte (equazione di Van't Hoff integrata, uso di valori grossolanamente approssimati delle attività, ipotesi di un totale spostamento a sinistra o a

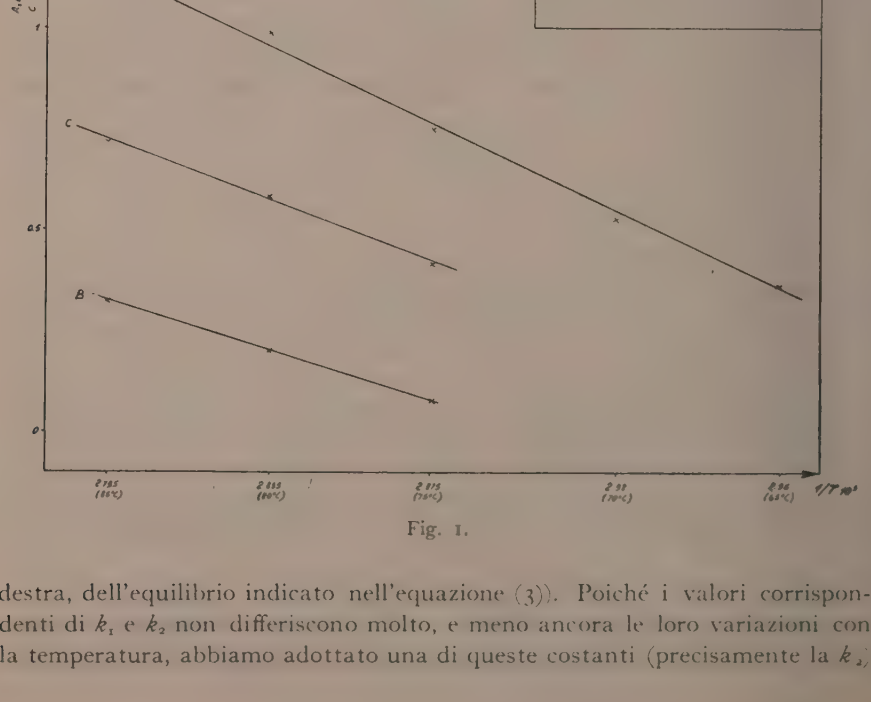


Fig. 1.

destra, dell'equilibrio indicato nell'equazione (3)). Poiché i valori corrispondenti di k_1 e k_2 non differiscono molto, e meno ancora le loro variazioni con la temperatura, abbiamo adottato una di queste costanti (precisamente la k_2)

per il calcolo grafico delle energie di attivazione. I risultati sono rappresentati in figura 1.

Malgrado non siano state determinate le costanti vere di velocità, ma piuttosto i limiti entro i quali queste possono variare (k_1 e k_2), sono stabiliti con sicurezza il meccanismo S_{N_2} per la reazione presa in esame e l'ordine di reattività delle molecole studiate:

1–cloro, 2–nitronaft. > 1–cloro, 4–nitronaft. > 1–nitro, 2–cloronaft.

Una discussione di questi risultati su basi quantomeccaniche sarà presto pubblicata.

Chimica fisica. — *Comportamento polarografico del p–NO_2–acetofenone e di alcuni suoi prodotti di riduzione*(*). Nota di GIOVANNI GIACOMETTI e ANITA DEL MARCO, presentata(**) dal Corrisp. G. SEMERANO.

INTRODUZIONE. – La riduzione al catodo a goccia di mercurio di composti organici contenenti nella molecola i due gruppi riducibili $—NO_2$ e $>CO$ contemporaneamente, è stata studiata solamente da Korshunov e Sazanova (1) per il caso delle nitrobenzaldeidi. Gli Autori russi non sono però riusciti nel loro studio ad attribuire tutte le onde presenti nei polarogrammi a specifici processi di riduzione, data la complessità del sistema.

Abbiamo perciò ritenuto opportuno estendere lo studio anche al caso del p–NO_2–acetofenone che si comporta in modo sostanzialmente identico alla p–nitrobenzaldeide ed esaminare anche, allo scopo di una più esauriente interpretazione dei polarogrammi, il comportamento di due degli eventuali prodotti della riduzione del p–NO_2–A.: il p–NHOH–A. e il p–NH_2–A.

La necessità di attribuire ogni gradino a un determinato processo è infatti essenziale quando si voglia analizzare l'influenza della struttura, o dei sostituenti presenti nella molecola, sulla riduzione di un determinato gruppo.

PARTE SPERIMENTALE.

Apparecchiatura. – Il polarografo usato era un Nejedly mod. VII con galvanometro della sensibilità massima di $4 \cdot 10^{-9}$ A/mm/m.

Le celle erano normali celle polarografiche tipo Heyrovsky munite di ponte salino ad agar per il collegamento con l'elettrodo a calomelano saturo,

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica fisica dell'Università e Centro di Polarografia del C. N. R.

(**) Nella seduta dell'11 aprile 1953.

(1) I. A. KORSHUNOV e L. N. SAZANOVA, «Zhur. Fiz. Chim.», *23*, 1299 (1949).

usato come anodo. Le caratteristiche del capillare verranno riportate insieme ai risultati delle varie misure.

L'eliminazione dell'ossigeno veniva fatta mediante passaggio di idrogeno elettrolitico. La temperatura veniva mantenuta costante a 25° C ± 0,1.

Soluzione base. – Sono stati usati i tamponi di Britton–Robinson 0,08 M o soluzioni 0,4 M di HCl o $HClO_4$ a seconda dei casi. Tali soluzioni venivano diluite a metà con la soluzione $2 \cdot 10^{-3}$ M del composto in esame in alcool al 95 %.

I pH venivano misurati con un elettrodo di vetro e un potenziometro Metrohm tipo EA 150.

I potenziali di semigradino misurati venivano corretti per la caduta *i*R attraverso la cella e si ritengono esatti entro ± 0,02 V.

Composti. – Il p–NO_2–A. fu fornito dall'Istituto di Chimica Organica dell'Università di Padova. Ci è grato ringraziare perciò il prof. S. Bezzi e il dott. A. Iliceto.

Il composto fu ricristallizzato due volte da alcool; p.f. 79° C.

Il p–NH_2–A. era un prodotto Eastman–Kodak puro.

Il p–NHOH–A. non risultava essere mai stato preparato. I tentativi di prepararlo con i metodi usati per composti analoghi [2] risultarono infruttuosi data la instabilità del composto in presenza di ossigeno e le difficoltà di cristallizzazione. Lo si preparò perciò in soluzione per via elettrolitica secondo la tecnica coulombometrica di Lingane [3]. Una soluzione di p–NO_2–A. $\cdot 10^{-2}$ M in alcool al 95 % in presenza di $HClO_4$ 0,2 M veniva elettrolizzata in atmosfera di idrogeno su un largo catodo di mercurio contro un anodo di calomelano saturo, sotto continua agitazione, a un potenziale catodico di ca. — 0,5 V, corrispondente al centro della zona di diffusione della prima onda del nitrogruppo in tale ambiente. Il potenziale catodico veniva controllato continuamente misurandolo contro un altro elettrodo a calomelano saturo non lavorante, e mantenuto costante manualmente. (I ponti ad agar per i collegamenti erano a perclorato di litio). La cella di elettrolisi era munita di un dispositivo che permetteva l'introduzione di volumi noti del liquido nella cella polarografica, già contenente l'opportuna soluzione base, sempre in atmosfera di idrogeno. L'elettrolisi veniva interrotta dopo ca. 8 ore quando la corrente era discesa praticamente a zero. I polarogrammi dopo l'elettrolisi non presentavano più traccia del primo gradino del p–NO_2 A. e mostravano invece una onda anodica (ben visibile date le precauzioni prese per evitare la presenza di ioni alogenici nella soluzione), dovuta verosimilmente all'ossidazione del gruppo NHOH a gruppo nitroso. La molarità del composto idrossilamminico nella soluzione dopo elettrolisi si poteva ritenere eguale a quella del p NO_2 A. di partenza.

(2) F. J. Alway e M. D. Welsh, « J. Am. Chem. Soc. », *24*, 1052 (1902). F. J. Alway, « Ber. », *36*, 2303 (1903).

(3) J. J. Lingane e C. Gardner, « J. Am. Chem. Soc. », *65*, 1348 (1943).

RISULTATI SPERIMENTALI.

p–NO_2–*acetofenone*. – I polarogrammi si presentano con tre gradini ben visibili sia a pH acidi che alcalini, contrariamente a quanto è stato notato per la p–NO_2–benzaldeide [1] che mostra la separazione dei due secondi gradini solo nel campo alcalino. A pH intorno al 7 si ha però anche in questo caso la sovrapposizione delle due ultime onde (fig. 1).

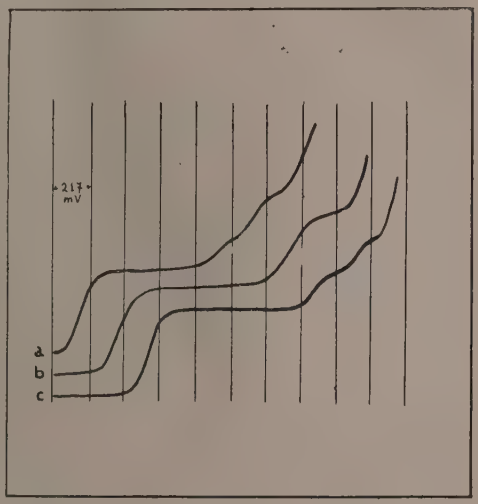


Fig. 1. – Polarogrammi di p–NO_2–acetofenone in ambiente idroalcolico 47,5 % – *a*: pH 2,65; *b*: pH 7; *c*: pH 9.

La corrente di diffusione della prima onda risulta ca. uguale alla somma delle altre due e si mantiene costante per tutto l'intervallo di pH, presentando un normale andamento lineare con la concentrazione. La costante i_d/c vale 7,7 μA/mM, con un capillare avente le seguenti caratteristiche: $m = 2{,}50$ mg/s, $t = 3{,}7$ s.

Le altezze della seconda e della terza onda non variano proporzionalmente alla concentrazione per tutti i pH e tende a variare pure il rapporto delle loro altezze al variare del pH stesso: si ha un aumento della terza onda e una diminuzione della seconda al diminuire del pH, mentre l'altezza della

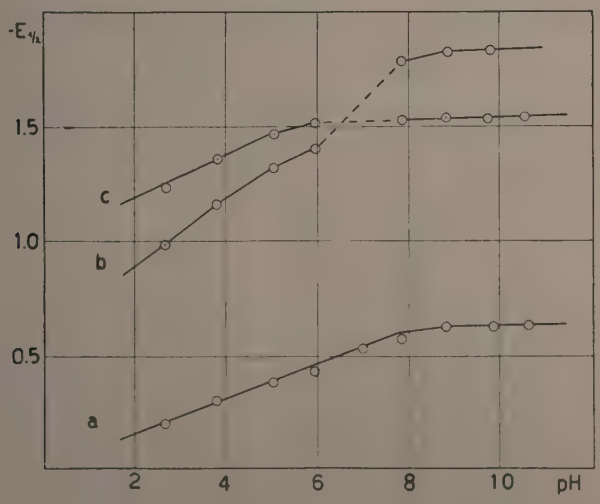


Fig. 2.

somma delle due resta sempre costante e pari a un po' meno dell'altezza della prima onda, come abbiamo già detto. Si è trovato: $\frac{i_{d\,II} + i_{d\,III}}{c} = 6{,}3\ \mu A/mM$. con le già date caratteristiche del capillare.

TABELLA I.

p–NO_2–*acetofenone* 10^{-3} M *in tamponi Britton–Robinson (ambiente idroalcolico 47,5 %)*.

pH	$E_{1/2}$ vs. E. C. S.		
	I onda	II onda	III onda
2,6	— 0,21	— 0,98	— 1,23
3,7	— 0,30	— 1,16	— 1,36
5,0	— 0,38	— 1,32	— 1,47
5,9	— 0,41	— 1,39	— 1,52
6,95	— 0,52	—	—
7,8	— 0,56	— 1,53	— 1,79
8,8	— 0,63	— 1,53	— 1,83
9,8	— 0,63	— 1,53	— 1,83
10,65	— 0,63	— 1,54	— 1,88

TABELLA II.

p–NHOH–*acetofenone* 10^{-3} *in tamponi di Britton–Robinson (ambiente idroalcolico 47,5 %)*.

pH	$E_{1/2}$ vs. E. C. S.		
	onda anodica	I onda catodica	II onda catodica
2,65	+ 0,22	— 1,03	— 1,16
4,10	+ 0,12	— 1,17	— 1,28
5,4	+ 0,05	—	—
6,4	— 0,01	—	—
7,5	— 0,09	— 1,47	— 1,64
8,5	— 0,13	— 1,57	— 1,82
9,45	— 0,17	— 1,57	— 1,84

L'andamento dei potenziali di semigradino col pH è mostrato dalla tabella I e dalla fig. 2.

p-NHOH-*acetofenone*. – I polarogrammi sono essenzialmente analoghi a quelli del p-NO_2-A. se si esclude la presenza della prima onda e si aggiunge l'onda anodica di ossidazione (fig. 3).

L'andamento delle i_d delle onde catodiche è sostanzialmente simile a quello delle due seconde onde del composto precedente.

In questo caso: $\frac{i_{d\,I} + i_{d\,II}}{c} = 5{,}7$ μA/*m*M.

con capillare avente: $m = 2{,}21$ mg/s , $t = 4{,}2$ s.

La tabella II e la fig. 4 mostrano l'andamento dei potenziali di semigradino col pH.

p-NH_2-*acetofenone*. – Le misure sono state fatte solamente in ambiente acido (fino a pH 6). In questo campo la corrente di diffusione dell'unica onda presente è sensibilmente costante a tutti i pH e varia linearmente colla concentrazione · $\frac{i_d}{c} = 3{,}1$ μA/mM.

capillare: $m = 2{,}55$ mg/s , $t = 3{,}7$ s.

L'andamento di $E_{1/2}$ col pH è illustrato dalla tabella III.

TABELLA III.

p-NH_2-*acetofenone* 10^{-3} M *in tamponi di Britton-Robinson (ambiente idroalcolico 47,5 %)*.

pH	$E_{1/2}$ vs. E. C. S.
2,15	— 1,13
4,00	— 1,29
5,25	— 1,38
6,25	— 1,44

Sul p-NO_2 e sul p-NHOH-A. sono state fatte anche esperienze di variazione delle i_d con l'altezza della riserva di mercurio, in vari ambienti. I risultati di tali esperienze sono illustrati dalle tabelle IV e V.

Sono state fatte anche delle misure microcoulombometriche secondo la tecnica Lanza-Corbellini [4] per confermare la valenza della prima onda del p-NO_2-A. I risultati di tre esperienze sono: $n = 3{,}85$; 4,1; 3,9.

(4) P. LANZA e A. CORBELLINI, « Rend. Accad. Lincei », VIII, *13*, 406 (1952).

TABELLA IV.

Variazione della i_d con l'altezza della riserva di Hg (h) *per il p* NO_2 *acetofenone.*

Tampone Britton pH 1,65			Tampone Britton pH 8,8			HCl 0,2 N		
h cm	i_d II onda A 10^{-7}	$\frac{i_d \text{ II}}{\sqrt{h}}$	h cm	i_d III onda A 10^{-7}	$\frac{i_d \text{ III}}{\sqrt{h}}$	h cm	i_d II onda A 10^{-7}	$\frac{i_d \text{ II}}{\sqrt{h}}$
8,3	40,5	4,8	4,8	51,5	6,15	5,9	40,5	6,82
7,5	40,5	5,9	7,25	44,2	6,12	7,3	49,6	6,84
6,2	40,5	6,5	6,00	36,8	6,12	8,2	57	6,90

TABELLA V.

Variazione della i_d con l'altezza della riserva di Hg *per il p* NHOH-*acetofenone.*

Tampone Britton pH 7,5			$HClO_4$ 0,2 N		
h cm	i_d II onda A 10^{-7}	$\frac{i_d}{\sqrt{h}}$	h cm	i_d I onda A 10^{-7}	$\frac{i_d}{\sqrt{h}}$
4,95	20,0	4,02	4,95	7,36	1,49
6,00	22,2	3,7	6,2	7,36	1,19
7,3	25,8	3,5	7,4	7,36	1,01

DISCUSSIONE E CONCLUSIONI. – Dall'insieme del quadro sperimentale ottenuto si possono trarre alcune conclusioni che potranno avere un certo interesse nell'interpretazione di polarogrammi di composti contenenti più gruppi riducibili nella molecola.

Per quanto riguarda intanto l'ordine di riduzione dei singoli gruppi, ammettiamo senz'altro che il primo gradino del p-NO_2-A. è dovuto al processo:

$$(1) \qquad -NO_2 + 4\,e + 4\,H^+ \longrightarrow -NHOH + H_2O$$

fatto d'altronde molto prevedibile data la notevole maggiore facilità di riduzione del nitrogruppo rispetto al gruppo chetonico e confermato:

a) dall'altezza del gradino circa doppia delle altre due, corrispondente a una valenza 4 come è del resto assicurato per via diretta dalle misure coulombometriche.

b) dall'andamento della curva $E_{1/2}$–pH (fig. 2) assolutamente analogo a quello della prima onda del nitrobenzene [5].

I valori assoluti dei potenziali di semigradino confrontati con quelli del nitrobenzene risultano spostati di ca. 90 mV. verso il campo positivo e ciò è da attribuirsi all'effetto —E del gruppo $>C=O$, senz'altro maggiore di tutti gli altri effetti induttivi necessariamente presenti [6]. (Il confronto è stato fatto coi dati della Stocesova facendo delle misure in ambiente acquoso a concentrazioni un po' minori, data la poca solubilità in acqua del composto, per avere eguaglianza di ambiente. Tale confronto è illustrato dalla fig. 5).

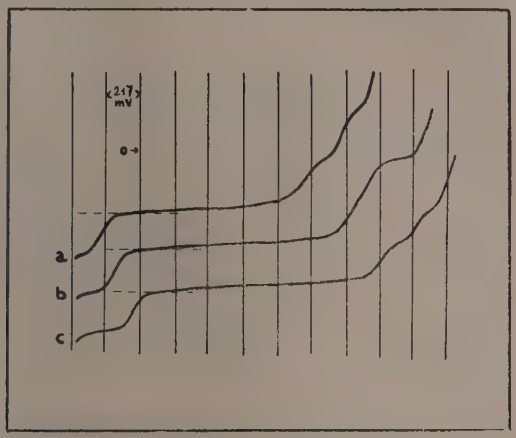


Fig. 3. – Polarogrammi di p–NHOH–acetofenone in ambiente idroalcolico 47,5 % – *a*: pH 2,7; *b*: pH 5,4; *c*: pH 8,4.
(le linee tratteggiate indicano lo zero galvanometrico)

Le altre due onde di riduzione sono da attribuirsi l'una al secondo stadio della riduzione del nitrogruppo:

(2) $$-NHOH + 2\,e + 2\,H^+ \longrightarrow -NH_2 + H_2O$$

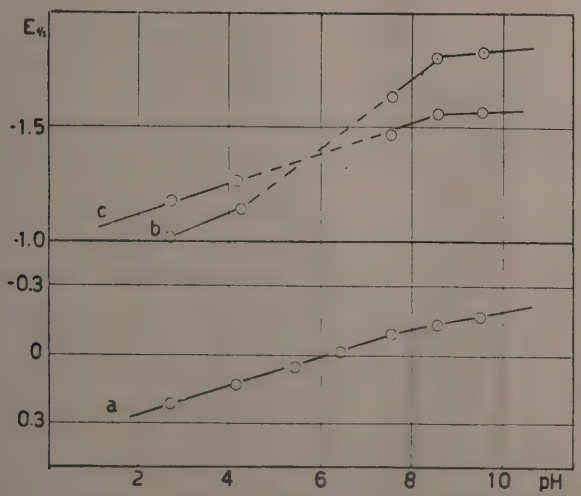


Fig. 4. – *a*: onda anodica; *b* e *c*: onde catodiche.

(5) D. STOCESOVA, «Coll. Czech. Chem. Comm.», *14*, 615 (1949).
(6) A. F. REMICK, *Electronic Interpretation of Organic Chemistry*. Cap. V.

e l'altra alla riduzione del gruppo chetonico secondo uno degli schemi più volte discussi [7].

Si ha evidentemente una inversione dell'ordine di questi due stadi passando da pH acidi a pH alcalini e ciò si nota molto bene sia nei polarogrammi del p–NO_2–A. che in quelli del p–NHOH–A.

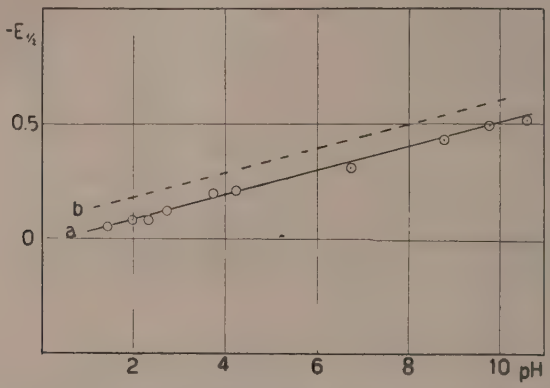


Fig. 5. – *a*: p–NO_2–acetofenone 10^{-3} · 0,5 M in ambiente acquoso; *b*: nitrobenzene secondo [5].

Per attribuire ciascuna delle due onde al processo corrispondente, giova il confronto con il comportamento del p–NH_2–A. che dovrebbe essere l'ultimo prodotto che si riduce al catodo nel caso che il processo (2) avvenga prima della riduzione del chetogruppo. La fig. 6 mostra l'andamento di $E_{1/2}$ col pH in campo acido per l'onda del p–NH_2–A. e per la terza del p–NO_2–A. L'evidente parallelismo dei due andamenti fa subito pensare alla riduzione dello stesso gruppo (> CO). La differenza di ca. 50 mV. (sicuramente maggiore degli errori sperimentali) tra i potenziali, può essere attribuita all'insufficiente tamponamento che nel caso della riduzione precedente di un nitrogruppo, processo che consuma ben 6 idrogenioni, non riesce ad impedire uno spostamento del pH interfasale verso il campo alcalino con conseguente slittamento del potenziale verso valori più negativi. L'effetto è infatti molto

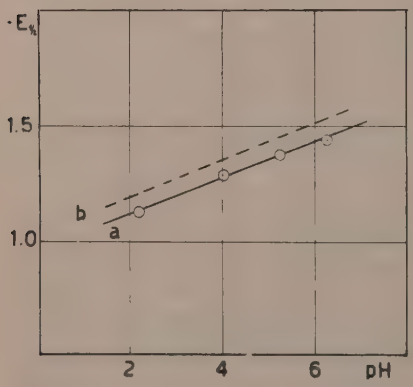


Fig. 6. – *a*: p–NH_2–acetofenone in ambiente idroalcolico 47,5 %; *b*: curva *c* fig. 2.

(7) M. Ashworth, «Coll. Czech. Chem. Comm.», *13*, 229 (1948). J. A. Korshunov e coll., «Zhur. Fiz. Chim.», *24*, 551 (1950).

meno notevole nel p–NHOH–A. in cui la riduzione precedente consuma solamente 2 H^+. La conferma di questa interpretazione si ha misurando i potenziali di semigradino dei tre composti in un ambiente sicuramente ben tamponato e con buona capacità tamponante polarografica (per una più approfondita discussione di questo concetto e della necessità di tener conto di tali effetti di mancato tamponamento nella interpretazione dei polarogrammi vedi [8]), come ad esempio una soluzione di HCl 0,2 N. o di $HClO_4$ della stessa concentrazione. I potenziali di semigradino in tali ambienti della terza onda del p–NO_2–A., della seconda del p–NHOH–A. e dell'onda del p–NH_2–A. sono infatti tutti tre coincidenti entro gli errori sperimentali e uguali a $-1{,}00 \pm 0{,}02$ V.

Resterebbe quindi confermata la riduzione del gruppo —NHOH prima di quello chetonico in ambiente acido e viceversa in ambiente alcalino.

Alcune interessanti considerazioni si possono fare anche analizzando i risultati dell'esame dell'andamento di alcune delle varie i_d coll'altezza della riserva del mercurio.

Il comportamento cinetico della seconda onda del p–NO_2–A., in ambiente acido normalmente tamponato (tabella V), è in accordo coll'osservazione della Stocesova [5] che trova lo stesso tipo di fenomeno per il nitrobenzene. L'ipotesi fatta dall'autrice di uno schema di reazioni concorrenti del tipo:

(1) $\quad -NHOH + e + H^+ \longrightarrow -\dot{N}H + H_2O$

(2 *a*) $\quad 2\,-\dot{N}H \longrightarrow -NH-NH-$

(2 *b*) $\quad -\dot{N}H + e + H^+ \longrightarrow -NH_2$

sembrerebbe ricevere una conferma ulteriore dal fatto che la seconda onda del p–NO_2–A. non è più cinetica in ambiente molto acido e ben tamponato, quando cioè la reazione (2 *b*) diventa molto rapida e predominante.

In ambiente alcalino l'onda del gruppo —NHOH (la terza ora) torna ad essere un'onda di diffusione normale.

Per il composto idrossilaminico, le misure di i_d a varie altezze di mercurio sono state fatte negli ambienti di $HClO_4$ 0,2 N e alcalino (tabella VI), nei quali era da aspettarsi l'andamento normale. Mentre ciò si verifica per l'ambiente alcalino, l'andamento è evidentemente cinetico nell'altro caso. Questo fatto si presenta insieme al valore eccezionalmente piccolo della altezza dell'onda del gruppo NHOH in tale ambiente.

Non siamo riusciti ancora a dare una soddisfacente spiegazione di questo fenomeno che potrebbe essere legato alla presenza di un equilibrio tra due forme tautomere del gruppo —NHOH. Si reputa perciò necessario un ulteriore approfondimento dello studio di tali sistemi, tenendo anche

(8) P. LANZA, «Suppl. a Ricerca sci.», *22*, 27 (1952).

presenti le irregolarità che si hanno nell'andamento delle altezze della seconda e della terza onda del p-nitro-acetofenone e delle onde catodiche del p-NHOH-A. col pH e colla concentrazione.

C'è ancora da osservare che le caratteristiche dell'onda anodica del p-NHOH-A. sono del tutto simili a quelle dell'analoga onda della fenilidrossilammina [9]. Ciò conferma ulteriormente il comportamento ideale del sistema ossido riduttivo $-NHOH \leftrightarrows NO$ anche nel caso polarografico. I valori assoluti dei potenziali sono spostati di ca. 60 mV. verso il campo positivo, rispetto a quelli della fenilidrossilammina (effetto del gruppo $> CO$).

Chimica. — *Studi di polarografia oscillografica. Sulla cinetica della reazione tra l'acido piruvico e l'ammoniaca.* – II. *Dispositivo sperimentale e risultati delle misure effettuate sul primo picco di corrente* [*]. Nota di PAOLO FAVERO, presentata [**] dal Corrisp. G. SEMERANO.

A causa del valore piuttosto elevato della costante specifica di velocità, per lo studio della cinetica della reazione tra acido piruvico e ammoniaca si è fatto ricorso alle tecniche della polarografia oscillografica.

Nella prima Nota di questa serie si è riferito sul comportamento delle sostanze da studiare nelle condizioni sperimentali adottate; in questa seconda Nota si descrive, con qualche dettaglio, l'apparecchiatura usata per i rilevamenti cinetici e si riportano i risultati delle misure eseguite.

La cinetica della reazione è stata studiata per l'ambiente acquoso; la soluzione conteneva solfato ammonico, un eccesso di ammoniaca ed era di forza ionica costante.

Ammettendo, come P. Zuman ha dapprima fatto [1], che la reazione proceda secondo lo schema semplice:

$$CH_3—CO—COO^- + NH_3 \rightleftarrows CH_3—(C=NH)—COO^- + H_2O$$

si può scrivere per l'andamento cinetico:

$$v = k' [P^-] [NH_3] - k'' [PN^-] [H_2O]$$

nella quale $[P^-]$ = concentrazione dell'anione piruvico
$[PN^-]$ = concentrazione dell'anione della chetimmide corrispondente.

Poiché si opera con un eccesso di ammoniaca ($[NH_3]/[P^-] = 100 \div 600$) e in ambiente acquoso ($[H_2O]/[PN^-] \doteq 1 \cdot 10^4$), si può anche scrivere:

$$v = k_1 [P^-] - k_2 [PN^-]$$

dove $k_1 = k' [NH_3]$ e $k_2 = k'' [H_2O]$.

(9) J. W. SMITH e J. G. WALLER, «Trans. Faraday Soc.», *46*, 290 (1950).

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica Fisica dell'Università e Centro di Polarografia del C.N.R.

(**) Nella seduta dell'11 aprile 1953.

(1) P. ZUMAN, «Chem. Listy», *45*, 65 (1951).

L'integrazione di questa equazione porta, com'è noto, all'espressione seguente:

$$k_1 + k_2 = k = \frac{1}{t} \ln \frac{x_e}{x_e - x_t}$$

in cui con x_e e x_t si indicano rispettivamente la concentrazione della chetimmide all'equilibrio e quella al tempo t. Per i valori di x_e e x_t si possono far figurare le corrispondenti altezze dei picchi di corrente h_∞ e h_t della chetimmide, stante la relazione lineare che esiste fra concentrazione e altezza dei picchi [2].

La precedente espressione di k, che è quella delle reazioni reversibili del primo ordine, si è trovata ben verificata dai risultati sperimentali ottenuti nelle predette condizioni.

Poiché esperienze preliminari avevano mostrato che la costante di velocità k dipende, oltre che dalla concentrazione dell'ammoniaca, anche da quella degli ioni ammonici e dal pH, si è fatta tutta una serie di determinazioni a diversi valori di pH e in funzione della concentrazione di ammoniaca a pH costante ($[NH_4^+]/[NH_3] = R$ = costante). L'intervallo di pH esplorato è stato tra 9,7 e 10,7 alla temperatura di 8° C.

DISPOSITIVO SPERIMENTALE. – L'apparecchiatura oscillografica è stata descritta [3] ed era a sparpagliamento multiplo. Un inconveniente proprio di questo metodo è costituito dalla dipendenza del periodo di gocciolamento del capillare dalle condizioni di lavoro [4]. Tale inconveniente, facilmente eliminabile in condizioni statiche, si è rivelato dannosissimo nelle esperienze di cinetica rapida. Ciò è facilmente comprensibile dato che il rilevamento degli oscillogrammi viene effettuato, con questa tecnica, al momento in cui la goccia di mercurio assume la sua massima superficie; quest'ultima dipende dal periodo di gocciolamento e da esso dipende anche l'altezza del picco di corrente rilevato. Poiché è stato riscontrato [4] che il periodo di gocciolamento può variare, in certe condizioni, anche del 15 % circa, è ovvio che l'errore che ne consegue nelle misure dei picchi di corrente può assumere valori rilevanti. Questo errore si traduce poi in una irregolarità più o meno marcata delle rette $\log f(h_t)/t$ che rende incerta la determinazione grafica delle relative pendenze e dubbi i valori di k ottenuti con il metodo di calcolo dei minimi quadrati.

Dato che le fluttuazioni del periodo di gocciolamento sono dovute a fluttuazioni dei parametri elettrici dell'apparecchiatura oscillografica, e queste non sono compensabili durante il breve tempo del rilevamento cinetico, è stato necessario apportare un perfezionamento. Esso consiste [5] nell'uso di un opportuno relé elettronico a ritardo che permette il rilevamento

(2) P. FAVERO, « Rend. Accad. Nazion. Lincei », Nota in corso di stampa.
(3) P. FAVERO, « Suppl. alla Ricerca sci. », p. 61 (1952).
(4) P. DELAHAY e G. L. STIEHL, « J. Phys. e Colloid Chem. », 55, 570 (1951).
(5) P. FAVERO e E. VECCHI, Lavoro in corso di compilazione.

fotografico degli oscillogrammi a un determinato e costante tempo di vita della goccia. Questo perfezionamento si è dimostrato indispensabile per ottenere risultati soddisfacenti.

Per la determinazione del tempo al quale viene rilevato ogni oscillogramma, si è fatto uso di un registratore per marconigrafia (surplus

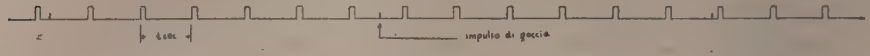


Fig. 1.

BC 1016) in collegamento con un pendolo a contatti elettrici. Sulla corrispondente zona di carta venivano registrati a intervalli di 1 *s* gli impulsi provenienti dal pendolo e quelli, provenienti dal relé elettronico, che corrispondevano all'istante in cui veniva rilevata la fotografia dell'oscillogramma.

In complesso la zona di carta si presentava come in fig. 1: mediante un opportuno comparatore era facile interpolare il valore dei tempi; poiché l'intervallo tra due tacche di riferimento era dell'ordine di 30 mm., e nella misura era possibile apprezzare 0,5 mm, la sensibilità di tale dispositivo era dell'ordine di 1/50 s; la precisione del pendolo era dell'ordine dello 0,5 %. Queste condizioni si sono dimostrate più che soddisfacenti per gli scopi della ricerca in corso.

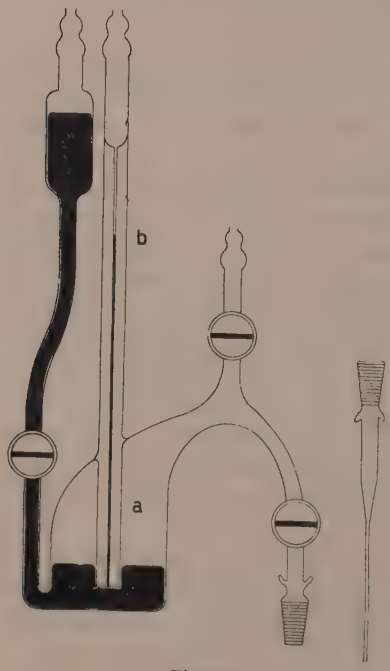


Fig. 2.

La cella usata per le misure era una normale cella polarografica a forma cilindrica; essa era immersa in un opportuno termostato capace di mantenere costante la temperatura entro ±0,05° C, nell'intervallo fra 0° C e 20° C, fino ad una differenza di 20° C con l'esterno. Per la disareazione delle soluzioni veniva usato idrogeno prodotto elettroliticamente.

Data la necessità di ridurre al minimo il tempo di aggiunta del reattivo e della successiva agitazione, per l'introduzione in cella della soluzione di acido piruvico è stata usata un'apposita microburetta (fig. 2).

In essa lo spazio *a* era completamente occupato dalla soluzione; la colonna di mercurio in *b* fissava il volume che veniva aggiunto in cella.

Con tale buretta si sono effettuate aggiunte dell'ordine di 0,1 cm³ con una precisione di ca. 0,5 %, in un tempo brevissimo. L'errore relativo all'aumento del livello del mercurio in *a* era trascurabile fino a 6 ÷ 7 aggiunte successive dopo di che era necessario riportare il livello al valore originario di taratura.

RISULTATI SPERIMENTALI. – Per la preparazione delle soluzioni veniva usato solfato ammonico della Kahlbaum puro per analisi; il valore 4,5 di forza ionica veniva mantenuto costante in tutte le soluzioni mediante

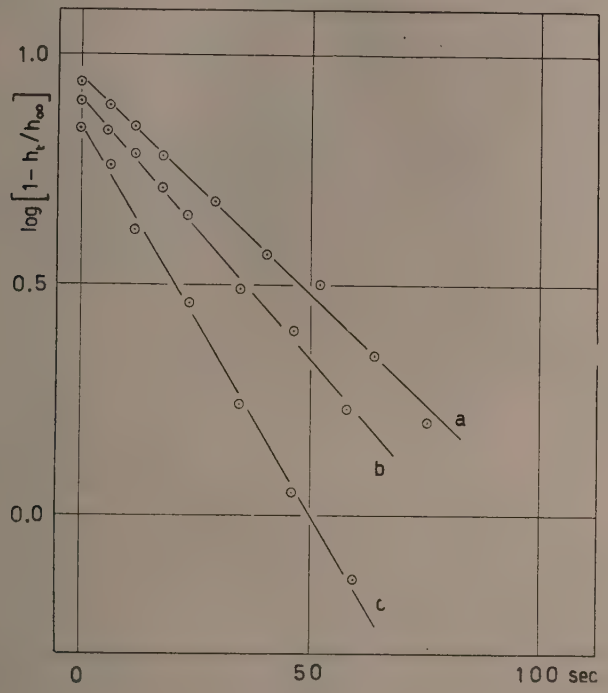


Fig. 3.

opportuna aggiunta di solfato sodico della Merck puro per analisi.

L'acido piruvico usato era stato ripetutamente rettificato sotto vuoto (1 mm Hg; p. e. 38° C) e successivamente purificato per cristallizzazione (p. f. 13°,6 C).

Nella cella di misura venivano introdotti 20 cm³ della soluzione base contenente ammoniaca, solfato ammonico e solfato sodico in rapporto di concentrazione prestabiliti, e li si disareava con idrogeno. Quando la soluzione aveva raggiunto la temperatura del termostato (8° C) e dopo che l'apparecchiatura elettronica era da ritenersi a regime, sotto forte borbottamento di idrogeno, mediante la microburetta, veniva aggiunto un volume di soluzione di acido piruvico tale che la concentrazione finale di questo fosse dell'ordine di $5 \cdot 10^{-3}$ mole/litro. L'agitazione della soluzione veniva protratta

per ca. 20 s e quindi sospesa per dare inizio al rilevamento degli oscillogrammi. In media, per ogni cinetica, venivano rilevati ca. 10 punti. A circa 10 minuti dall'inizio delle misure venivano rilevati gli oscillogrammi corrispondenti alla concentrazione di equilibrio.

L'espressione usata per il calcolo di k era la seguente

$$k = -\frac{1}{0.4343t}\log\left(1 - \frac{h_t}{h_\infty}\right).$$

In fig. 3 sono riportate, come esempio, le curve $\log(1 - h_t/h_\infty)/t$ di tre cinetiche eseguite in condizioni diverse:

$$\text{pH} = 10{,}20 \qquad R = 0{,}75$$

$$[NH_3]_a = 1{,}51\ m \qquad [NH_3]_b = 2{,}42\ m \qquad [NH_3]_c = 3{,}22\ m.$$

La pendenza delle rette, cioè il valore di R, veniva calcolato per ogni cinetica col metodo dei minimi quadrati. Ogni esperienza veniva ripetuta almeno tre volte e come valore di k veniva assunto quello medio.

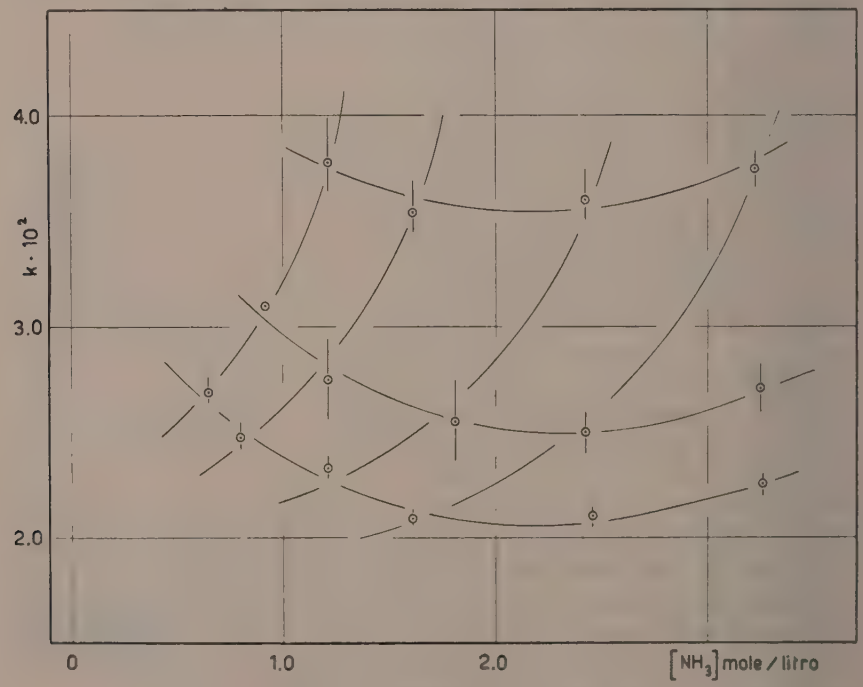


Fig. 4.

Le misure del pH venivano eseguite mediante il pHmetro a elettrodo di vetro tipo E 150 della Metrohm AG alla temperatura di esperienza (8° C).

Nella tabella seguente vengono riportati i valori medi della k con gli errori medi relativi nelle condizioni indicate. In fig. 4 è riportato il diagramma corrispondente.

TABELLA

$[NH_3]$ mole/litro	R	pH	k sec^{-1}	± errore %
0,605	2	9,7	0,0269	2,6
0,916	2		0,0310	0
0,121	2		0,0378	4,5
0,80	1,5	9,8	0,0248	3
1,21	1,5		0,0275	7
1,61	1,5		0,0354	4,5
1,21	1	10,1	0,0233	3
1,81	1		0,0255	8
2,42	1		0,0360	3
1,61	0,75	10,2	0,0209	0
2,42	0,75		0,0250	4,5
3,22	0,75		0,0375	2,5
3,25	0,56	10,3	0,0271	4
2,46	0,49	10,25	0,0210	2,4
3,26	0,37	10,65	0,0226	2,2

Nella determinazione della corrente di picco l'errore massimo è dell'ordine del 2 %; ciò comporta un errore medio sul valore di k dell'ordine del 3-4 %. In effetti come risulta dalla tabella, questo è l'errore più probabile che si commette nelle misure. Valori di k con errore maggiore o minore di tale valore sono poco numerosi.

L'esposizione dettagliata dei dati sperimentali ottenuti e l'interpretazione di essi saranno oggetto di una prossima Nota. Si riporteranno allora anche i dati relativi alla misura del secondo picco di corrente, dovuto all'anione piruvico di partenza, che fin'ora non erano stati ricavati per non ridurre, con un unico rilevamento, la precisione della misura del primo picco.

Questa determinazione doppia è stata possibile nel campo delle alte concentrazioni di ammoniaca; ciò nonostante, lo studio accurato della dipendenza tra le altezze relative dei due picchi ha suggerito possibilità di interpretazione più esaurienti del meccanismo di reazione, che comportano una revisione delle conclusioni apparentemente soddisfacenti tratte in base al semplice schema proposto da Zuman e ricordato all'inizio di questa Nota.

Chimica nucleare. — *Studi sui nuclidi del terbio in difetto di neutroni* (*). Nota di MARIO ALBERTO ROLLIER e JOHN OSCAR RASMUSSEN Jr., presentata (**) dal Corrisp. A. QUILICO.

I. INTRODUZIONE. – In pubblicazioni precedenti vennero riportati e classificati i seguenti isotopi instabili del terbio:

Massa	Radiazione	Periodo	Reazione nucl.	Energia delle alfa in Mev	Bibl.
Tb^{156}	K, β^+	5.00 h	$Eu^{153}(\alpha, n)$	da 19 a 38	(1)
Tb^{155}	K, e^-, γ	188 d	$Eu^{153}(\alpha, 2n)$	tutte 19 a 38	(1)
Tb^{154}	K, e^-, β^+, γ	17.2 h	$Eu^{151}(\alpha, n)$	19 a 38	(1)
			$Eu^{153}(\alpha, 3n)$	tutte 19 a 38	(1)
Tb^{153}	K, e^-, γ	5.1 d	$Eu^{151}(\alpha, 2n)$	19 a 38	(1)
Tb^{151},	α	19 h	$Eu^{151}(\alpha, 4n)$	60, 90, 120	(2)
o Tb^{150}	(3.95 Mev)				
Tb^{149}	α	4 h	$Eu^{151}(\alpha, 6n)$	60, 90, 120	(2)
	(3.44 Mev)		$Eu^{153}(\alpha, 8n)$	60, 90, 120	

II. RICERCA DI NUOVE ATTIVITÀ DEL TERBIO IN DIFETTO DI NEUTRONI. – Uno degli scopi di questo lavoro era la ricerca di isotopi radioattivi del terbio aventi numeri di massa compresi fra 149 e 153. Si sono eseguiti i bombardamenti di ossido di europio con particelle alfa di 38, 45, 55, 65 e 75 Mev e successive misure del decadimento alfa e di quello letto ai contatori di Geiger e Mueller. Non è stato trovato nessun isotopo attivo, il quadro dei nuclidi del terbio in difetto di neutroni rimanendo quindi quello sopra descritto. Tb^{152} e Tb^{150} sono a vita molto breve, molto lunga, oppure hanno periodi di semitrasformazione vicini a quelli di altre attività del terbio. Il periodo dell'attività alfa di vita più lunga è stato determinato in 17,2 ore anziché nel valore di 19 ore previamente assegnato (2).

(*) Lavoro eseguito sotto gli auspici della Atomic Energy Commission degli S.U.A. nel Radiation Laboratory dell'Università di California, durante la permanenza a Berkeley di uno degli Autori (del Politecnico di Milano) beneficiario di una Borsa di studio 1950 del C.N.R. e della Borsa di Viaggio Fulbright del Governo degli S.U.A. Un rapporto ciclostilato in lingua inglese del suo contenuto (University of California Radiation Laboratory Report N° 2079, Unclassified, Chemistry Distribution) è stato distribuito in data 9 gennaio 1953.

(**) Nella seduta dell'11 aprile 1953.

(1) G. WILKINSON e H. HICKS, «Phys. Rev.», *79*, 815 (1950) e «Phys. Rev.», *74*, 1733 (1948).

(2) RASMUSSEN, THOMPSON e GHIORSO, University of California Radiation Laboratory Reports, 1473 e 1875. « Phys. Rev. » (in corso di stampa).

III. ASSEGNAZIONE DI MASSA AL NUCLIDE DI TERBIO ALFA EMITTENTE DI 17 ORE. – Le energie di soglia alfa per la produzione degli alfa emittenti di terbio mediante bombardamento dell'europio sono state determinate nei seguenti valori:

Attività alfa	Soglia in Mev
4 ore Tb^{149}	$55 < E_{t_1} < 65$
Tb^{150} o Tb^{151} 17 ore	$38 < E_{t_2} < 45$.

Da questi limiti sperimentali delle soglie di produzione del terbio da diciassette ore mediante la reazione nucleare:

$$Eu^{151}(\alpha, xn)\ Tb^{155-x}$$

si può affermare, in merito alla differenza delle due energie di soglia, che essa è compresa entro i seguenti valori:

$$10\ \text{Mev} < E_{t_1} - E_{t_2} < 27\ \text{Mev}.$$

Da questi limiti sembrerebbe più probabile che il numero di massa del Tb alfa emittente da 17 ore sia maggiore di due o tre unità rispetto al numero di massa di 149 del Tb di quattro ore, e perciò che il terbio alfa emittente da diciassette ore abbia massa di 151 o 152. Tuttavia se il numero di massa fosse 152 l'attività sarebbe certamente stata molto notevole nel bombardamento con particelle alfa da 38 Mev, poiché la soglia per la reazione $(\alpha, 3n)$ dovrebbe, in questa regione, essere in vicinanza di 30 Mev. Perciò il numero di massa più probabile è 151. Due bombardamenti vennero eseguiti per tentare una assegnazione di massa di conferma all'alfa emittente di diciassette ore mediante spettrografo di massa. In questo tentativo si è usato il procedimento descritto da Rasmussen e da altri [3]. Entrambi i tentativi sono stati infruttuosi. Nel primo caso la responsabilità di ciò ricade sulla bassa resa del bombardamento nel ciclotrone di Eu_2O_3 con particelle alfa di 55 Mev. di energia. Malgrado l'uso di una gran quantità di ossido (180 mg) e di una buonissima separazione nella colonna scambiatrice di ioni eseguita dopo cinque riduzioni con amalgama di sodio, la soluzione nitrica degli isotopi attivi di terbio non era abbastanza attiva per dare un numero rivelabile di tracce di particelle alfa sulle lastre fotografiche di trasferimento dello spettrografo di massa. La ionizzazione efficace per il terbio caricato su un filamento termico è estremamente bassa, dell'ordine di grandezza di 10^{-5} circa.

Questo insuccesso suggerì di orientarsi verso una reazione nel ciclotrone che utilizzasse il fascio di protoni del ciclotrone da 184 pollici perché questo fascio è più intenso di quello delle particelle alfa; per questa ragione si eseguì un secondo bombardamento dirigendo protoni da 75 Mev su del Gd_2O_3, ed usando 100 mg di ossido di gadolinio. Questo metodo di preparazione conduce ad una più ampia miscela di attività del terbio perché esistono i seguenti cinque nuclidi stabili di gadolinio abbastanza abbondanti:

Gd^{160} (21,8 %) ; Gd^{158} (24,8 %) ; Gd^{157} (15,7 %) ; Gd^{156} (20,6 %) ; e Gd^{155} (14,8 %).

(3) RASMUSSEN, REYNOLDS, THOMPSON e GHIORSO, « Phys. Rev. », *80*, 475 (1950).

Il materiale ottenuto aveva una attività alfa pari a circa $3 \cdot 10^5$ disintegrazioni alfa al minuto, ventiquattro ore dopo la fine del bombardamento, e gli isotopi di terbio erano mescolati a pochissima materia inattiva, costituita dal bersaglio di gadolinio, grazie ad una eccellente separazione in una grande colonna scambiatrice di ioni. La maggior parte di questa attività era dovuta al Tb^{149} di quattro ore e ben poca al terbio di diciassette ore. Le lastre sensibili alle particelle alfa ottenute mediante la tecnica del trasferimento da strisce di platino provenienti dallo spettrografo di massa non presentavano tracce di particelle alfa.

IV. Determinazione dei limiti inferiori dei rapporti di ramificazione α/K nel Tb^{149} e Tb^{151}. – Nel campione 75 ρ 1 alle ore 18 del 15 ottobre, vi erano, per il Tb^{149}, $6{,}4 \times 10^3$ impulsi alfa al minuto, ossia $(6{,}4 \times 10^3)/0{,}52 = 1{,}23 \times 10^4$ disintegrazioni alfa al minuto. Nel campione 75 ρ 2 non si poté osservare la presenza del componente di quattro ore nella curva di decadimento misurata con il contatore di Geiger. Entrambi questi campioni si ottennero bombardando Gd_2O_3 con protoni da 75 Mev e separando i nuclidi di terbio mediante colonna scambiatrice di ioni. Ciò equivale a dire che alle ore 18 del 15 ottobre, vi era meno di 1×10^4 impulsi al minuto misurati sul terzo scaffale dovuti all'attività di quattro ore. Il fattore geometrico del terzo scaffale è di circa 0.02, e la più scarsa efficienza concepibile del contatore per la cattura K si verificherebbe se soltanto raggi x K fossero emessi. Assumendo il valore 0.05 per l'efficenza del conteggio, si calcola che il tasso della disintegrazione dovuta a cattura K nel campione 75 ρ 2 alle ore 18 debba essere inferiore a

$$\text{cattura K} < \frac{1 \times 10^4}{0.02 \times 0.05} = 1 \times 10^7 \text{ d/m (disintegrazioni al minuto).}$$

Il rapporto delle attività dei campioni 75 ρ 1 e 75 ρ 2 è pari a 16 : 22, talché nel campione 75 ρ 1 alle ore 18 si ha:

$$\text{cattura K} < \frac{16}{22} \times 10^7 = 7.3 \times 10^6 \text{ d/m.}$$

Perciò per il Tb^{149} vale il rapporto:

$$\alpha/K > \frac{1.23 \times 10^4}{7.3 \times 10^6} = 2 \times 10^{-3} \text{ ca.}$$

Analogamente, per il Tb^{150} nel campione 55 A alle ore 12 del 19 ottobre vi erano 38 impulsi alfa al minuto e una componente di diciassette ore del decadimento misurato nel contatore di Geiger sullo scaffale tre di 2×10^4 impulsi al minuto. Si calcola dunque:

$$\alpha/K > \frac{38}{0.52} \cdot \frac{0.02 \times 0.05}{2 \times 10^4} = 4 \times 10^{-6} \text{ ca.}$$

Questi sono soltanto limiti inferiori e possono essere lontani dai veri rapporti di ramificazione perché la presenza nel campione di abbondanti

quantità di altri nuclidi che decadono per cattura K introducono questa incertezza.

V. STUDIO DEL Tb^{154} DI DICIASSETTE ORE CON LO SPETTROMETRO A RAGGI BETA. – Nella tabella che segue vengono riportati i risultati provvisori dello studio eseguito allo spettrografo a raggi beta a « doppio fuoco » della frazione dei nuclidi di terbio isolati chimicamente dopo un bombardamento di ossido di europio con particelle alfa da 38 Mev. Questo spettrometro beta è descritto dal O'Kelley [4]. Si impone un lavoro ulteriore prima di poter proporre qualsiasi schema di decadimento. Le energie di decadimento beta sono state determinate dalle curve di Fermi–Kurie adoprando le tavole dei fattori di Fermi (senza correzioni di schermatura) computate dal National Bureau of Standards [5].

Nuclide	Periodo	Radiazione	Energia (Mev)	Intensità relativa integrata
Tb^{154}	17 h	β_1^-	2.75	1
		β_2^-	1.66	1
		β	2.34	1.9
		e^-	0.54_9	
			0.51_7	
			0.37_4	
			0.32_2	
			0.28_1	
			0.23_3	
			0.18_8	
Altri nuclidi				
	> 17 h	β^+	3.1	
		e^-	0.20_5	
			0.15_3	
			0.12_6	
			0.08_2	
			0.07_6	

(4) G. D. O'KELLEY, *Tesi* per il titolo di Ph. D. University of California (Chemistry) 1948. Pubblicato come University of California Radiation Laboratory Report N° 1243, p. 22.

(5) *Tabelle della funzione di Fermi*. Computation Laboratory, The National Bureau of Standards (fatte circolare in via privata).

L'attività beta negativa da 2.34 Mev di energia non può essere assegnata con certezza al nuclide Tb^{154} perché è stato registrato un numero insufficiente di punti della curva di decadimento. Se l'attività beta negativa fosse sicuramente dovuta al Tb^{154} verrebbe con ciò affermata la stabilità beta del Dy^{154}, malgrado che questo nuclide non si trovi in natura. La sua assenza in natura potrebbe essere dovuta ad una disintegrazione alfa di periodo di semitrasformazione relativamente corto rispetto all'età degli elementi chimici.

Botanica. — *Il significato del tessuto nucellare e la sua funzione organizzatrice durante lo sviluppo del seme delle Querci* (*). Nota di Roberto Corti, presentata (**) dal Socio A. Chiarugi.

La ghianda delle Querci è un frutto indeiscente che contiene a maturità un solo seme, ma al momento della fecondazione si trovano nell'ovario più ovuli, generalmente in numero di sei, che hanno raggiunto su per giù tutti lo stesso grado di sviluppo. La monospermia è quindi secondaria e si raggiunge durante lo sviluppo del seme, come avviene in molti altri casi, ad esempio nell'Olivo. Io mi sono occupato di un simile fenomeno in *Genista monosperma*, ed ho creduto di riconoscere in tale specie la via per raggiungere la monospermia da parte di un ovario inizialmente pluriovulare, in una sorta di inibizione esercitata dal primo embrione, che raggiunge un determinato stadio di sviluppo, sugli altri embrioni che ancora non hanno raggiunto tale stadio (Corti, 1946) (1).

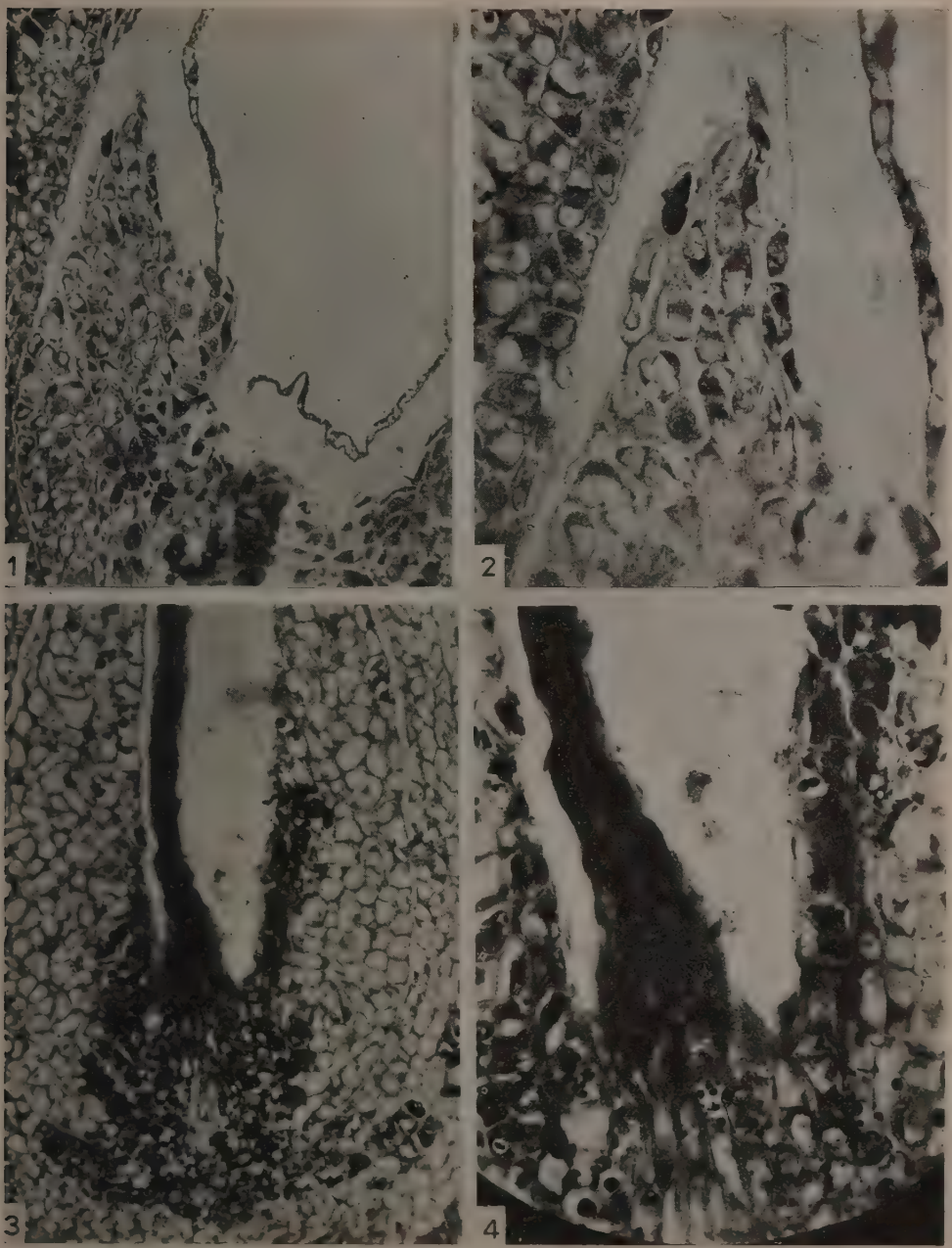
Nelle Querci invece il meccanismo è del tutto diverso; descriverò il fenomeno in *Quercus coccifera* L., che ho preso in particolare considerazione a questo riguardo.

Questa specie di Querce, detta «Querce spinosa», è molto abbondante nelle Puglie, anche con abito arboreo. Il materiale che ha servito a questo studio l'ho raccolto nelle Murgie della provincia di Bari, presso Mottola. La fioritura e l'impollinazione avvengono alla fine di aprile, quando la parte preminente del pistillo è rappresentata dagli stimmi. Lo sviluppo degli ovuli avviene nella primavera seguente, e la fecondazione verso la fine di maggio, cioè circa 14 mesi dopo l'impollinazione. A giugno si comincia a notare una netta differenza tra l'ovulo destinato a dare il seme e gli ovuli abortiti dello stesso ovario. Nell'ovulo buono la cavità del gametofito è

(*) Dall'Istituto Botanico dell'Università di Firenze, diretto dal prof. Alberto Chiarugi. Le osservazioni contenute in questa Nota sono state compiute durante ricerche in corso sul ciclo riproduttivo di Querci della flora italiana, promosse e finanziate dalla Accademia Italiana di Scienze Forestali.

(**) Nella seduta del 14 marzo 1953.

(1) R. Corti, *Embriologia ed embriogenesi in «Genista monosperma»* L. «Nuovo Giorn. Bot. Ital.», n. s., vol. LIII, pp. 284–320 (1946).



Figg. 1 e 2. – *Quercus coccifera* L. Tessuto calazale in ovulo abbonito (× 248 e × 565).
Figg. 3 e 4. – *Quercus coccifera* L. Tessuto calazale degenerato in ovulo abortito (× 248 e × 565).

andata incontro ad un notevole ingrossamento ed è tappezzata tutt'intorno da uno strato di citoplasma con numerosi nuclei dell'albume; lo zigoto ha dato un piccolo proembrione; alla calaza si è sviluppato, dalle poche cellule nucellari esistenti all'epoca del gametofito maturo, un abbondante tessuto composto di cellule su per giù isodiametriche, ricche di citoplasma (tav. II, fig. 3). Questo tessuto non soltanto tappezza la cavità del sacco embrionale con l'albume nella parte calazale, ma si estende anche lateralmente fra il sacco embrionale ed il tegumento interno dal lato del funicolo (tav. I, figg. 1 e 2), ripetendo esattamente la posizione che avevano le cellule basali della sottile e allungata nucella, quando il gametofito, accrescendosi, è uscito fuori da essa dalla parte del micropilo, ma spostato lateralmente rispetto all'asse.

Negli ovuli che vanno incontro all'aborto, invece, la cavità del gametofito si è di poco accresciuta (tav. II, fig. 1). Nella parte micropilare si può ancora riconoscere in qualche caso la cellula uovo (tav. II, fig. 2) e tutto lascia supporre che sia avvenuta la fecondazione; l'ulteriore mancato sviluppo quindi non dovrebbe dipendere da mancata fecondazione, come del resto era presumibile. L'albume in qualche caso non è riconoscibile, ma in qualche altro, in cui la degenerazione non lo ha ancora distrutto, mostra un certo numero di nuclei; ne ho potuti contare fino a 20. Il tessuto calazale, anche nei casi in cui i nuclei dell'albume si mostrano in condizioni relativamente buone, presentava segni evidenti di una degenerazione elettiva rispetto alle altre cellule della parte sporofitica dell'ovulo (tegumento interno, tegumento esterno e funicolo) (tav. I, figg. 3 e 4). Le cellule degenerate non sembrano essere in numero maggiore di quello che erano al momento del gametofito maturo. Questo resto di nucella mostra una differenziazione fra le cellule dello strato più interno, molto allungate, senza spazi intercellulari. La degenerazione sembra colpire prima queste cellule interne, che mostrano ingrossamento e coalescenza delle loro pareti, per scomparsa del citoplasma.

Da quanto ho sopra descritto si può dedurre un certo rapporto fra potenzialità di riacquistare o comunque di conservare il potere meristematico da parte delle cellule calazali della nucella, fino a dare origine ad un tessuto abbondante, e passaggio dell'albume ad un ulteriore stadio di sviluppo, a sua volta evidentemente collegato con il principio dello sviluppo dell'embrione. Che questo tessuto debba avere una funzione importante, lo si deduce dal fatto che va incontro ad un suo particolare sviluppo nello ovulo buono dopo la fecondazione; tale funzione, peraltro, deve essere transitoria, in quanto esso stesso finisce poi per essere riassorbito. Negli ovuli abortivi, per una ragione che ci rimane del tutto sconosciuta, esso viene colpito da una degenerazione specifica, a differenza degli altri tessuti dell'ovulo, prima ancora di aver subìto l'accrescimento: quindi da una degenerazione precoce rispetto al normale. In altre parole gli ovuli degenerano presumibilmente perchè viene a mancare questo anello nella concatenazione delle fasi del loro sviluppo.

La degenerazione che colpisce precocemente questo tessuto nucellare nei semi abortivi sottolinea la sua importanza nello sviluppo normale del seme delle Querci, e conferma quanto già Nutman (1939) [2] ha messo in evidenza per i cereali. Cercando di coordinare, in rapporto agli studi sulla vernalizzazione, lo sviluppo dell'embrione, del sacco embrionale e dei tessuti del frutto, Nutman ha segnato, per questo tessuto nucellare («nucellar pillar»), un momento di massimo della funzione, con accrescimento dovuto a riassunzione del carattere meristematico, poco dopo la fecondazione, coincidente con una fase di estensione del sacco embrionale, mentre la sua degenerazione comincia quando compare lo strato di aleurone, dieci giorni dopo la fecondazione.

Il tipo di nucella prolungata a papilla in *Quercus* (ved. tav. II, fig. 4 per *Q. trojana* Webb) è stato messo in evidenza da quegli Autori che si sono occupati dello sviluppo e della costituzione degli ovuli in questo genere (cfr. L. M. Langdon per *Q. rubra*, 1939) [3]; Conrad (1900) [4] anzi dice che nella parte superiore di questa nucella, in *Quercus velutina* Lam., si può delineare un archisporio pluricellulare, da 20 a 60 cellule. Oltre che di *Quercus*, questo aspetto è caratteristico anche di generi affini, come *Fagus* e *Castanea*. In *Castanea* Benson (1894) [5] nota che nel complesso basale di elementi nucellari allungati può delinearsi qualche piccola tracheide; l'autore non comprende quale funzione essa possa avere, ma ne ritiene sicura l'omologia con le tracheidi presenti nella nucella in *Casuarina*, interpretate come di origine potenzialmente archisporiale: un simile tipo di nucella sarebbe quindi primitivo e potrebbe mettersi in rapporto con la posizione sistematica della famiglia delle *Cupuliferae* nel quadro di evoluzione delle *Angiospermae*.

Certamente cellule che dànno origine al tessuto nucellare basale e mediale rispetto all'endosperma, caratteristico degli ovuli che seguono il normale sviluppo in seme, e che degenerano senza ulteriore sviluppo quando l'endosperma è ancora allo stadio di pochi nuclei negli ovuli abortivi, hanno una posizione tale che si può sostenere la loro potenziale natura archisporiale. Quando si è allo stadio di cellule madri in sinapsi, le numerose cellule che accompagnano la cellula madre, a fianco e inferiormente, internamente alla epidermide nucellare, allungate nel senso dell'asse nucellare, possono considerarsi altrettante cellule madri mancate. Ora che

(2) P. S. Nutman, *Studies in Vernalisation of Cereals.* – VI. *The Anatomical and Cytological Evidence for the Formation of Growthpromoting Substances in the Developing Grain of Rye.* «Annals of Botany», N. S., vol. III, n. 11, pp. 731–757 (1939).

(3) L. M. Langdon, *Ontogenetic and Anatomical Studies of the Flower and Fruit of the Fagaceae and Juglandaceae.* «The Bot. Gazette», vol. 101, pp. 301–327 (1939).

(4) A. H. Conrad, *A contribution to the Life History of Quercus.* «The Bot. Gazette», vol. XXIX, pp. 408–418 (1900).

(5) M. Benson, *Contributions to the Embryology of the Amentiferae.* – *Part I.* «The Transactions of the Lin. Soc. of London», Second Series, vol. III, Botany, Part X, pagine 409–424.

cellule madri mancate del magarchisporio possano avere una funzione specifica ed importante per lo sviluppo della cellula fertile è presumibile, quando si rifletta a ciò che avviene nel microsporotecio, in cui le cellule del tappeto non sono in definitiva che lo strato periferico dell'archisporio, che ha assunto una funzione nutritizia e di strato limite. Occupandomi del meccanismo di sterilizzazione degli stami nel fiore femminile di *Idesia polycarpa* ho messo in evidenza (Corti, 1948 e 1949) [6, 7] come lo strato del tappeto venga specificamente colpito dalla degenerazione e come questa degenerazione delle cellule del tappeto segni il punto di partenza della trasformazione dello stame in staminodio. Lo stesso concetto potrebbe in un certo senso estendersi dal microarchisporio al megarchisporio: in esso delle cellule potenzialmente archisporiali una sola si sviluppa e le altre rimangono a fare da intermediarie fra la cellula fertile ed il restante sporofito, ma non soltanto con semplice valore di tessuto necessario di conduzione e di cellule nutritizie in quanto destinate ad essere riassorbite; la loro degenerazione elettiva, infatti, nei megasporoteci che abortiscono, proprio come la degenerazione elettiva nel tappeto dei microsporoteci sterili, sembra indicare una funzione più specifica ed importante nel corso del normale sviluppo di questi organi. Non sappiamo in cosa essa possa precisamente consistere: è una azione che può chiamarsi di « organizzazione », connessa forse con la elaborazione, o con la trasformazione di sostanze (ormoni?) che devono in definitiva arrivare alla parte fertile; sebbene non si possa, in via puramente ipotetica, neppure escludere un cammino del tutto inverso, rispetto a quello supposto, di tali sostanze attive o attivate.

Queste osservazioni consentono d'altronde di proporre una estensione del concetto classico di tappeto nel megasporotecio (ovulo) delle Angiosperme, usualmente ristretto alle eventuali cellule segregate dalle cellule pre-archisporiali verso la parte frontale (micropilare) della nucella (Schnarf, 1929) [8], e che sono quindi « sorelle » delle cellule madri delle megaspore. In angiosperme antiche come le *Cupuliferae*, in cui lo sviluppo è più lento e massiccio, è infatti possibile meglio constatare come caratteristiche tappeziali siano attribuibili anche alle cellule laterali e calazali del corpo della nucella, dalle quali deriva il « nucellar pillar » osservato da Nutman nelle graminacee e il tessuto nucellare di cui ho fatto menzione. D'altronde il fatto che il tessuto tappeziale possa circondare l'intero megarchisporio ben si armonizza con quanto si verifica nel microarchisporio. Questo « tappeto » ovulare è senza dubbio assai diverso nelle sue varie parti, per aspetto e destino, ciò che del resto è in accordo con la evidente polarità morfologica

(6) R. CORTI, *Sul dioicismo di « Idesia polycarpa » Maxim.* « Nuovo Giorn. Bot. Ital. », n. s., vol. LV, pp. 446–496 (1948).

(7) R. CORTI, *Il significato del tappeto delle antere al suo primo differenziarsi: Osservazioni in « Idesia polycarpa » Maxim.* « Rend. Accad. Naz. Lincei », Cl. di Sc. fis., mat. e nat., ser. 8ª, vol. VI, pp. 343–346 (1949).

(8) K. SCHNARF, *Embryologie der Angiospermen.* In K. LINSBAUER, *Handbuch der Pflanzenanatomie*, II. Abteilung, 2. Teil: Archegoniaten (Band X/2). Berlin (1929).

e fisiologica dell'ovulo, mentre più uniforme è notoriamente l'aspetto del tappeto delle antere. Peraltro anche quest'ultimo presenta spesso facies sensibilmente distinte nelle sue varie regioni, indice di una comprensibile polarità anche nell'ambito del sacco pollinico, e può come esempio espressivo ricordarsi quanto osserva la Avanzi (1950) [9] in *Solanum tuberosum*, dove tale autrice descrive un « tappeto esterno » (rivolto verso la parete) ed un « tappeto interno » (rivolto verso il connettivo dell'antera); il secondo è di gran lunga più sviluppato del primo, e se ne distingue patentemente anche per il comportamento citologico. Il tappeto esterno dell'antera potrebbe in qualche modo confrontarsi col tappeto ovulare « sensu stricto » situato nella zona terminale della nucella delle piante crassinucellate, mentre il « tappeto interno » ricorda quel tessuto nucellare del cui comportamento in *Quercus coccifera* mi sono occupato nella presente Nota.

Zoologia. – *Valutazione di alcune strutture ritenute nervose sensitive* [*]. Nota di GENNARO PALUMBI, presentata [**] dal Socio A. PENSA.

Ogni ricercatore che si sia occupato della innervazione periferica degli organi sa che vi sono casi nei quali è estremamente difficile formulare un giudizio preciso sulla natura da attribuire ad alcune immagini offerte dai metodi specifici per la rivelazione delle strutture nervose: metodo al bleu di metilene, al cloruro d'oro o all'argento. È frequente d'altra parte constatare, studiando la letteratura, che una stessa immagine da alcuni Autori interpretata come autentico apparato sensitivo, da altri viene ritenuta espressione di fenomeni rigenerativi o degenerativi e da altri infine come un semplice artefatto.

Ora, è possibile nel campo delle espansioni nervose sensitive stabilire dei criteri discriminativi fra strutture recettrici realmente esistenti e quelle create artificiosamente dai metodi tecnici?

È il tema che discuterò brevemente nella presente Nota riferendomi in modo particolare alla innervazione sensitiva della cornea.

Nella zona periferica di questo organo Dogiel (1891) per primo descrisse nell'uomo apparati nervosi e corpuscoli terminali analoghi a quelli che nella congiuntiva bulbare furono scoperti da Krause. Tanto nella zona marginale provvista di vasi quanto nella congiuntiva bulbare, detti corpuscoli si troverebbero immediatamente sotto all'epitelio. Più spesso essi sarebbero ordinati a gruppi e cioè da una fibra midollata deriverebbero di solito più corpuscoli. L'Autore riferisce che questi sono più numerosi nella zona

(9) M. G. AVANZI, *Endomitosi e mitosi a diplocromosomi nello sviluppo delle cellule del tappeto di « Solanum tuberosum »* L. « Caryologia », vol. II, pp. 205–222 (1950).

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Anatomia Umana normale e di Istologia della Università di Pavia diretto dall'A.

(**) Nella seduta del 13 dicembre 1952.

marginale provvista di vasi ove se ne possono contare, in un tratto di circa $^1/_2$ millimetro, oltre 20. Molto più scarsi invece sarebbero nella sostanza propria corneale e di nuovo più numerosi nella congiuntiva bulbare corrispondente alla regione marginale. Avrebbero alcuni l'aspetto di « gomitoli fitti », altri più piccoli, l'aspetto di « gomitoli lassi ».

Questo stesso Autore e successivamente Agababow (1904), Eleonskaya (1911), Attias (1912), Knüsel e Wonwiller (1923), Yokomatsu (1931), Egorow (1933–34) e numerosi altri, hanno descritto terminazioni nervose delle più varie forme: a placca, talora di notevoli dimensioni; ad ansa, ad uncinetto, a laminette ecc. disposte in minor numero nell'epitelio ed in maggior numero nel connettivo dell'orlo corneale.

Altri Autori, quali Nageotte e Guyon (1938), che nella cornea differenziano due plessi nervosi: uno « fondamentale » ed uno « interstiziale » descrivono anche loro filamenti nervosi estremamente sottili, ora corti ora lunghi terminanti liberamente nelle forme più varie ed interpretano queste immagini come espressione di fenomeni degenerativi e rigenerativi ai quali le fibre nervose interstiziali vanno incontro nel corso della vita.

D'altra parte numerosi altri Autori infine sostengono che tutte le formazioni terminali reperibili nella cornea non corrispondono a strutture realmente esistenti allo stato vitale ma sono da considerare immagini artificiali imputabili alla dissezione o alle manovre di compressione e distensione inavvertitamente esercitate sul pezzo nel momento del prelievo o anche ai metodi di colorazione e di impregnazione.

Del tutto recentemente Weddel e Zander [1] (1950) sono riusciti a riprodurre immagini di clave e di gomitoli e di terminazioni di altro tipo in cornee previamente sottoposte a traumi e poi impregnate o colorate con i metodi specifici per il tessuto nervoso. Essi riferiscono e dimostrano in alcune figure, che per effetto di modica compressione le fibre corneali possono divenire ondulate ed assumere un diametro irregolare; se la compressione è molto più forte, la parte fluida del cilindrasse viene espulsa dalle fibre e nei preparati all'argento possono comparire falsi bulbi terminali tipo Krause.

Aggiungono che se il pezzo è sottoposto ad eccessivo stiramento le fibre nervose possono perdere la loro affinità per il bleu di metilene e per l'argento; possono scomporsi in serie di granuli o di corti filamenti; possono comparire false immagini di clave terminali. Infine, in seguito a dissezione con ferri poco taglienti, le fibre nervose possono ritrarsi e, nei preparati microscopici, dare luogo alla formazione di intrecci più o meno complicati simulanti gomitoli terminali, talora con masserelle di sostanza axoplasmatica dislocate fra le maglie dell'intreccio. A tale riguardo gli Autori sostengono che alcuni dei gomitoli descritti e raffigurati da Dogiel, nel suo classico lavoro sulle terminazioni nervose della cornea e della congiuntiva bulbare, sono degli artefatti.

(1) G. WEDDEL and E. ZANDER, *A critical evaluation of methods used to demonstrade tissue neural elements... to the cornea.* « J. of Anat. », vol. 84, p. 168 (1950).

I fatti dimostrati da questi due Autori sono estremamente interessanti e costituiscono un chiaro avvertimento per tutti coloro che si interessano della distribuzione e del comportamento delle fibre nervose di senso alla periferia.

Che i metodi di colorazione e di impregnazione e le manovre di compressione e distensione possano dare origine ad artefatti, è senz'altro vero. Io stesso in un mio precedente lavoro sulla innervazione della cornea ho negato ogni valore alle laminette, alle placche, agli anelli terminali dei ricordati Autori.

Fig. 1. – Deturpazioni delle fibre nervose dovute a manovre tecniche. Regione sclero-corneale di vitello (met. Bielsch.–Palumbi ingr. 500 Rid. 1/4).

Oggi non mi sentirei di sottoscrivere il parere da me espresso alcuni anni fa [2] (1947) a riguardo di alcune formazioni argirofile, provviste di prolungamenti, annesse a grosse fibre nervose midollate di natura sicuramente recettrice, disposte nella regione del lembo sclero-corneale. Allora interpretai dette formazioni come probabili espansioni di fibre sensitive; oggi penso che si tratti piuttosto di artefatti determinati dalla fuoriuscita di materiale axoplasmatico da alcune fibre nervose a causa di stiramenti del pezzo in conseguenza delle manovre di tecnica.

In quegli stessi preparati ed altri successivamente allestiti ho potuto riscontrare immagini analoghe sia lungo il percorso di alcune fibre nervose midollate che alla estremità terminale di altre (fig. 1).

Eccessivamente demolitrice mi sembra però la critica del Weddel e Zander allorché questi negano la reale esistenza nella cornea, di quei gomitoli terminali illustrati dal Dogiel.

Dai miei preparati risulta che nella zona marginale della cornea di uomo, vitello, cavallo, coniglio, cavia e ratto albino esiste un ricco plesso nervoso marginale che si estende non solo negli strati più superficiali della

(2) G. PALUMBI, *Sulla innervazione della regione sclero corneale.* « Ric. di Morf. », vol. XXII (1947).

zona, ma anche nei suoi strati più profondi ove però diviene meno fitto. La parte più fine di tale plesso ha i tipici caratteri di una fine rete espansionale che assume intimi rapporti con gli elementi stromali della zona (fig. 2).

Ora in questo plesso marginale ho riscontrato, in discreto numero, grossi corpuscoli capsulati del tipo di quelli descritti da Dogiel.

Come ho già detto in altra Nota, l'apparato espansionale di questi corpuscoli è in alcuni casi rappresentato da un grosso cilindrasse varicoso di una fibra midollata nevrassiale, ripiegato più volte su se stesso; in altri casi è invece rappresentato dall'intreccio di fibrille che provengono in parte dalle varie ramificazioni e dalle anse formate dal cilindrasse ed in parte dallo sfioccamento di fascetti fibrillari che accompagnano la fibra princi-

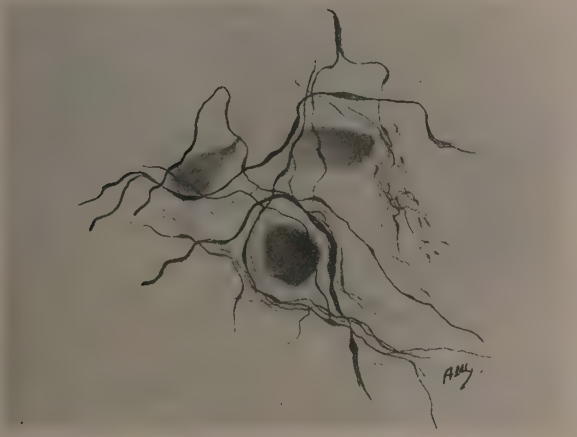


Fig. 2. – Frammento della fine rete espansionale presente nel lembo sclero-corneale del vitello (non alterato dalle manovre tecniche) (met. Bielsch.–Palumbi ingr. 1200 Rid. 1/4).

pale. Talora la fibra nevrassiale, nell'interno del corpuscolo, prima di ramificarsi, forma numerose volute e può presentare successivi allargamenti e restringimenti.

In vicinanza dell'orlo corneale ho potuto anche osservare che alcune grosse fibre midollate con cilindrasse molto grosso, durante il loro decorso anulare, improvvisamente emettono numerosi rami collaterali assai flessuosi, provvisti al loro estremo apparentemente terminale, di varicosità, di menischi e talora di espansioni reticolari di varia forma e grandezza a struttura finemente fibrillare; formano cioè arborizzazioni diffuse che si riconoscono con relativa facilità fra le numerose fibre del plesso. In loro corrispondenza si trova costantemente un gran numero di nuclei piccoli ovalari.

Infine in seno alla rete nervosa diffusa pericorneale, a livello della episclera e degli strati più superficiali della sclera, ho potuto riconoscere altre formazioni nervose, anche queste già da me descritte in una Nota prece-

dente. Quivi alcune grosse fibre nervose, con ogni probabilità di natura sensitiva nevrassiale, perduta la loro guaina mielinica, dànno origine ad un numero vario di rami i quali di solito descrivono numerose volute ed avvolgimenti fittamente aggrovigliati. Dalle ulteriori ramificazioni di questi e delle fibre sottili sopraindicate, si forma infine una delicata rete fibrillare.

Prendono così origine strutture che a volte assumono l'aspetto di gomitoli di estrema finezza e complessità; gomitoli il cui reticolo fibrillare si continua direttamente nel reticolo nervoso espansionale che si estende nel tessuto circostante (fig. 3).

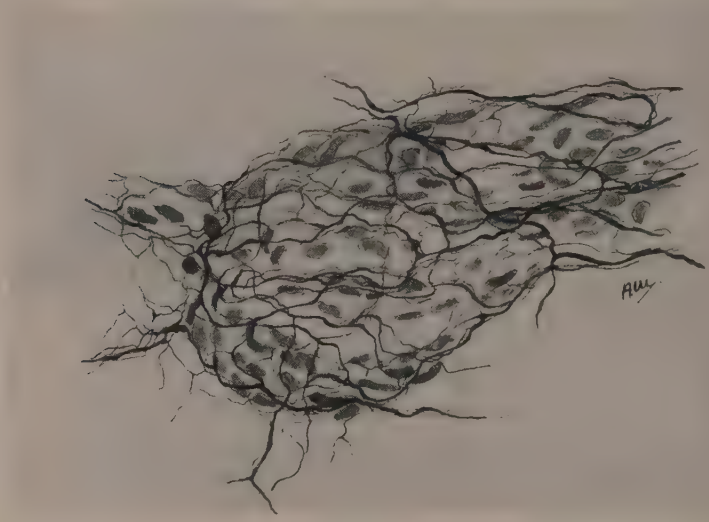


Fig. 3. – Apparato sensitivo in seno alla rete nervosa espansionale della regione sclero-corneale del vitello (non alterato dalle manovre tecniche) (met. Bielsch.–Palumbi. Ingr. 1200 Rid. 1/4).

Anche in seno ad essi si trovano di regola numerosi piccoli nuclei ovalari immersi in una sostanza fondamentale granulosa e credo si tratti di particolari elementi, riuniti in sincizio, in qualche modo legati alla trasmissione dell'eccitamento nervoso.

Questo ultimo reperto si accorda coi dati meno recenti dello Stefanelli, il quale ha dimostrato che alla costituzione della rete nervosa diffusa possono anche concorrere filamenti ultraespansionali che partono da corpuscoli capsulati di tipo paciniano; con i dati del Rossi il quale nella parete dei vasi peritoneali, ha descritto « espansioni nastriformi laminari più o meno voluminose ed estese, reticolari di tali fibre 'nervi perivasali con evidente significato di funzionalità recettrice... intimamente compenetrante con la rete fibrillare amielinica simpatica » avvalora le vedute del mio Maestro A. Pensa il quale da tempo sostiene l'esistenza di un'intima compenetrazione alla periferia fra rete espansionale simpatica e fibre sensitive.

Ora tutti questi fatti dimostrano chiaramente che le fibre sensitive possono in alcuni casi dar luogo a strutture in forma di gomitoli che a mio avviso non sono da considerare come artefatti dovuti a manualità tecniche, ma espressione della reale disposizione delle fibre nervose sensitive in seno al reticolo.

E a conclusione di quanto sopra esposto, credo si possa anche stabilire un criterio discriminativo fra gomitoli falsi e quelli veri. Questi ultimi sono sempre costituiti dall'intreccio dei rami di divisione di grosse fibre midollate che, in corrispondenza del gomitolo, dopo aver perduto la guaina mielinica dànno origine ad un gran numero di rami flessuosi e talora finemente varicosi.

Di regola in corrispondenza dei veri gomitoli nervosi si trovano anche numerosi piccoli nuclei ovalari attorno ai quali non sono riconoscibili limiti cellulari ma sembrano piuttosto immersi in una sostanza fondamentalmente granulosa, che nei preparati virati all'oro assume una colorazione violacea. La presenza di tali elementi satelliti ai quali forse è da attribuire la secrezione di « sostanze mediatrici » dell'impulso nervoso, facilita e rende più sicuro il giudizio che si tratti di vere espansioni nervose sensitive.

Al contrario gomitoli costituiti esclusivamente dal ripiegamento o accavallamento di tutte o di parte delle fibre di un determinato fascio nervoso, senza traccia di ramificazioni né presenza di cellule satelliti, deve far sorgere il dubbio di essere in presenza di un artefatto.

Zoologia. — *Osservazioni sul ciclo evolutivo di un nuovo Echinostomide.* Nota di ETTORE BIOCCA [1] e P. L. LE ROUX [2], presentata [*] dal Corrisp. V. PUNTONI.

Durante ricerche sulla schistosomiasi animale, realizzate in Sardegna nell'ottobre 1951, abbiamo raccolto, nella costa orientale dell'Isola, presso Olbia (Località S. Teodoro) in alcune pozze di acqua, numerosi *Bulinus contortus*, *Limnaea stagnalis* e *Physa sp.* che ci hanno permesso di studiare il ciclo di vita di un Echinostomide e di ottenere sperimentalmente il parassita adulto. Trattandosi di specie nuova, descritta separatamente da R. Ph. Dollfus [3], riteniamo utile riferire i risultati delle nostre osservazioni.

L'immersione dei molluschi in acqua a circa 30° C ha reso possibile constatare che le *Limnaea stagnalis* e le *Physa sp.* non eliminavano cercarie,

(*) Nella seduta dell'11 aprile 1953.

(1) Ettore Biocca, Direttore inc. dell'Istituto di Parassitologia dell'Università di Roma.

(2) P. L. Le Roux, del Department of Parasitology della London School of Hygiene and Tropical Medicine.

(3) R. PH. DOLLFUS, *Sulla forma adulta di un Echinostomide [Trematoda Digenea] ottenuta sperimentalmente nel ratto bianco di laboratorio.* Comunicazione presentata all'Acc. Naz. dei Lincei nella seduta dell'11 aprile 1953.

mentre i *Bulinus contortus* emettevano furcocercarie di *Schistosoma bovis* e altre cercarie, tra cui quelle di un Echinostomide.

La dissezione dei molluschi rivelava sia nelle *Limnaea stagnalis*, *Physa sp.* e *Bulinus contortus*, la presenza di metacercarie incistate di un Echinostomide, tutte apparentemente con gli stessi caratteri morfologici. Queste metacercarie (a volte alcune diecine in un solo mollusco) parassitavano una elevata percentuale delle *Limnaea* e *Physa* esaminate, mentre erano eccezionali nei *Bulinus*.

Al fine di accertare sperimentalmente se queste metacercarie si originassero dalle cercarie che fuoriuscivano dai *Bulinus contortus* (infestati in percentuali di circa l'1 %), abbiamo immerso in acqua, in cui si trovavano oltre 100 cercarie appena uscite dal mollusco, 2 *Limnaea stagnalis*, 3 *Limnaea palustris* e 2 *Bulinus contortus*, provenienti da zone in cui non avevamo riscontrato infestazioni con Echinostomidi. Dopo alcuni giorni abbiamo sacrificato e sezionato i molluschi e abbiamo rinvenuto, solo in una giovanissima *Limnaea palustris*, il più piccolo esemplare esposto all'infestazione e proveniente dal lago di Colfiorito (Perugia), 48 metacercarie di un Echinostomide, indifferenziabili da quelle osservate nei molluschi sardi.

Dimostrato così che le metacercarie della *Limnaea stagnalis*, *Physa sp.* e *Bulinus contortus* della zona di S. Teodoro, derivavano dalle cercarie eliminate dai *Bulinus contortus*, abbiamo tentato di ottenere i trematodi adulti somministrando contemporaneamente a 3 anatre domestiche, 1 gatto e 4 ratti albini di allevamento, numerosi molluschi (*Limnaea stagnalis* e *Physa sp.*) contenenti le metacercarie dell'Echinostomide. Dopo 9 giorni abbiamo sacrificato il gatto e abbiamo trovato nell'intestino 3 esemplari immaturi dell'Echinostomide. Dopo 15 giorni abbiamo sacrificato gli altri animali. Le anatre sono risultate negative; al contrario i 4 ratti avevano nell'intestino alcuni esemplari adulti dello stesso Echinostomide, sia che fossero state alimentate con *Limnaea stagnalis* o *Physa sp.* (Un tentativo di infestare un'anatra domestica introducendo nelle vie digerenti acqua con cercarie dell'Echinostomide, appena uscite dal *Bulinus*, ha dato risultato negativo).

Descrizione.

La scarsezza del materiale ci ha impedito ricerche morfologiche più accurate, come sarebbe stato nostro desiderio, per cui ci limitiamo a riferire i dati incompleti a nostra disposizione.

Redie. Le redie provenienti da un *Bulinus contortus* che eliminava cercarie dell'Echinostomide, sono state studiate dopo aver ucciso il mollusco parassitato immergendolo in acqua bollente.

Esse erano molto numerose (oltre 50 nello stesso mollusco), di colorito giallo–castagno, avevano forma allungata e, sopratutto le giovani, assumevano l'aspetto di una calza; la parte posteriore del corpo infatti appariva incurvata ad angolo. Le dimensioni oscillavano da un minimo di 380 μ di

lunghezza per 65 μ di larghezza, ad un massimo di 2.430 μ di lunghezza per 370 μ di larghezza (su 12 esemplari integri misurati). I due processi ambulacrali, di modeste proporzioni, si trovavano nel terzo medio o nel terzo posteriore del corpo, in posizione ventrale, ma spostati verso i lati. Il faringe, quasi rotondeggiante, leggermente più grande nelle redie di dimensioni maggiori, non presentava però variazioni molto sensibili ed oscillava da 48 a 60 μ di lunghezza per 45–48 μ di larghezza. Ad esso faceva seguito un intestino sacciforme, di modeste dimensioni. In molte redie erano ben visibili il poro di parto, vicino all'estremità anteriore del corpo e, nell'interno, alcune cercarie morfologicamente simili alle cercarie libere dell'echinostomide, ma con spine cefaliche ancora pochissimo sviluppate o assenti, insieme ad un numero variabile di elementi embrionali. In nessuna redia abbiamo trovato redie figlie. Non ci è stato possibile, trattandosi di parassiti uccisi al calore, studiarne i movimenti.

(Accanto a queste redie, che rappresentavano la grande maggioranza, abbiamo osservato anche alcune poche redie (4 esemplari), di dimensioni oscillanti da 1.250 a 2.050 μ di lunghezza per 154-195 μ di larghezza, le quali si distinguevano chiaramente dalle altre per avere un faringe ben più voluminoso, leggermente più largo che lungo, di 100–105 μ di lunghezza per 115–128 μ di larghezza. Il corpo di queste redie aveva, al di sotto del faringe, un restringimento seguìto da una proiezione circolare a collare. Le appendici ambulacrali nella metà posteriore del corpo, erano anch'esse molto più grandi ed appariscenti. Nell'interno di queste redie erano visibili alcune cercarie ed elementi embrionari. Non ci è stato possibile uno studio accurato delle cercarie in esse contenute e non possiamo quindi trarre conclusioni sulla identificazione sistematica).

Cercarie. – Le cercarie dell'Echinostomide in esame avevano movimenti di due tipi: movimenti di natazione nel liquido, che si compivano con ampie e rapide oscillazioni, sopratutto della coda; movimenti di deambulazione (quando le cercarie erano appoggiate sulle pareti del recipiente o sul corpo del mollusco) che si compivano con successivi avvicinamenti della ventosa ventrale alla orale, in forma simile a sanguisughe o a larve di alcuni insetti. La coda, durante questi movimenti di deambulazione, restava immobile e distesa posteriormente.

Lo studio morfologico è stato eseguito su cercarie uccise al calore e conservate in formalina al 5 %. Il corpo si trovava fissato in posizione leggermente flessa anteriormente, con la coda quasi sempre ben distesa. La lunghezza totale delle cercarie così conservate oscillava da 700 a 815 μ, con una media, su 10 esemplari, di 740 μ. Il corpo, leggermente più corto della coda, di circa 350 μ di lunghezza, aveva forma approssimativamente rettangolare ed era largo circa 100 μ. La estremità anteriore, in forma di salienza sub-conica, era circondata da una corona di presumibilmente 43 spine, disposte in due file alternate. Le spine angolari erano più grandi delle altre. La ventosa orale, più piccola della ventrale, aveva forma quasi circolare e un diametro di 44–46 μ; il faringe, di 20–25 μ per 17–20 μ, era seguìto da un lungo esofago, che in corrispondenza della ventosa ventrale si divideva in due ciechi, i quali circondavano la ventosa ventrale stessa

e si estendevano quasi fino alla estremità del corpo. La ventosa ventrale, molto prominente, anch'essa quasi circolare, aveva 58–62 μ di diametro ed era situata nel terzo posteriore del corpo, debordando parzialmente nel terzo medio. La coda, lunga da 330 a 470 μ, in media 390 μ, aveva una larghezza massima di 38–46 μ e degradava lentamente a punta. (La scarsezza del materiale e la fissazione inadeguata ci ha impedito lo studio dello apparato escretore e di altri particolari morfologici importanti: non ci è stato infatti possibile osservare con chiarezza se esistessero sul corpo o sulle ventose della cercaria esilissime spine).

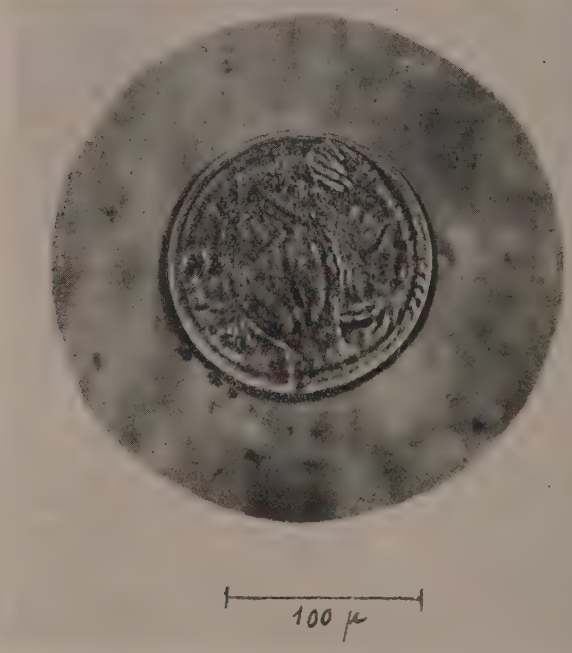


Fig. 1. – Metacercaria.

Metacercarie. – Le metacercarie (fig. 1), incistate nei tessuti dei diversi molluschi, erano sferiche, incolori e trasparenti, circondate da un alone di aspetto gelatinoso, anch'esso trasparente e dello spessore di pochi micron. Se il parassita era disposto in posizione favorevole, era possibile osservare le spine cefaliche in due file, essendo le angolari chiaramente più grandi delle altre. A volte erano ben visibili anche le ventose e alcune granulazioni, probabilmente dell'apparato escretore. Il diametro delle metacercarie, escluso l'alone circostante, era di 122–138 μ.

(Nel recipiente in cui erano riunite le redie, moltissime delle quali rotte, abbiamo trovato 5 metacercarie libere nel liquido. Non possiamo escludere quindi che, analogamente a ciò che è stato descritto per altri Echinostomidi, alcune cercarie si possano essere incistate

direttamente nell'interno delle redie, saltando la fase libera. Questa evenienza però, pur ammesso che esista, deve essere considerata eccezionale in questa specie, poiché non ci è stato possibile vedere metacercarie nell'interno delle redie ancora integre a nostra disposizione).

Trematode adulto. – Lo studio dell'Echinostomide adulto, da noi ottenuto sperimentalmente nel ratto, è stato eseguito da R. Ph. Dollfus e viene comunicato nella stessa seduta dell'Accademia dei Lincei.

Il ciclo evolutivo degli Echinostomidi è stato oggetto di importanti e dettagliate ricerche sperimentali, tra cui vanno ricordate sopratutto quelle di Johnson [4]. Beaver [5] distingue diversi « tipi » di cicli di vita di questi parassiti: la specie da noi studiata seguirebbe il « tipo » considerato il più comune e caratterizzato dal presentare cercarie che penetrano in un secondo mollusco dove si trasformano in metacercarie.

La nostra specie ha, quale primo ospite intermedio, il *Bulinus contortus*, mollusco di grande importanza per la patologia umana e veterinaria, nel quale provoca certamente un'infestazione gravissima, sicuramente più grave di quella prodotta nel secondo ospite intermedio per il quale non esiste specificità stretta.

(Durante ricerche successive sono stati esposti da uno di noi (Le Roux) all'infestazione con cercarie di questo Echinostomide i molluschi della collezione della London School of Hygiene and Tropical Medicine e precisamente *Limnaea stagnalis*, *L. peregra*, *L. truncatula* dell'Inghilterra, *Limnaea natalensis*, *Physopsis africana* e *Bulinus tropicus* dalla Rodesia del Sud, *Planorbis pfeifferi* dell'India, *Planorbis glabratus* del Brasile. Le cercarie hanno dimostrato la capacità di penetrare in tutte queste diverse specie trasformandosi in metacercarie).

Il Boscardi [6] aveva osservato nei *Bulinus contortus* e *Physopsis africana* nel Fezzan (Sahara libico), metacercarie che provvisoriamente aveva chiamato *Cercaria varieechinata*, simili a quelle del parassita in esame, da cui si distinguono per avere 35 spine cefaliche e per altri caratteri secondari. Non sappiamo se il primo ospite intermedio di questo Echinostomide sia anche il *Bulinus contortus* o altro mollusco.

La conoscenza di un nuovo trematode capace di provocare una grave parassitosi del *Bulinus contortus* può eventualmente assumere interesse pratico nella difficile lotta contro questo mollusco.

Concludendo, il ciclo di vita della specie di Echinostomide da noi trovato in Sardegna può essere ricostruito nella seguente maniera: le uova, emesse dall'ospite definitivo, lasciano uscire miracidi, i quali evolvono nel

(4) J. C. JOHNSON, *The life cycle of Echinostoma revolutum* (*Froelich*). « Zoology », *19*, 335 (1920) (Univ. of California Pubblic.).

(5) P. C. BEAVER, *The morphology and life history of Petasiger nitidus Linton* (*Trematoda: Echinostomidae*). « Jour. of Parasit. », *25*, 269 (1939).

(6) F. BOSCARDI, *Su di una metacercaria di Echinostoma riscontrata in Bulinus contortus* e in *Physopsis africana nel Fezzan* (*Sahara libico*). « Riv. di Parassit. », *8*, 105 (1947).

Bulinus contortus, primo ospite intermedio, provocando una grave infestazione. Le cercarie, che fuoriescono dai *Bulinus contortus*, penetrano in un secondo mollusco, che può appartenere al genere *Bulinus*, *Limnaea*, *Physa*, *Planorbis* ecc.), in cui si trasformano in metacercarie. Sembra evidente, dalle nostre prove, che le cercarie penetrino più facilmente in molluschi giovani. (Qualche cercaria può forse trasformarsi in metacercaria nello stesso *Bulinus contortus* senza. fuoriuscire. La ingestione dei molluschi parassitati da metacercarie determina l'infestazione e lo sviluppo del trematode adulto nello intestino dell'ospite definitivo, a noi ancora sconosciuto. Dalle osservazioni sperimentali risulterebbe l'anatra domestica resistente all'infestazione, mentre il ratto albino di laboratorio particolarmente suscettibile.

Zoologia. — *Un particolare modo di accoppiamento negli Insetti Embiotteri* (*). Nota di RENZO STEFANI, presentata (**) dal Socio G. COTRONEI.

Gli Embiotteri presentano (tranne il genere americano *Clothoda*) una spiccata asimmetria nell'estremità addominale del maschio che concordemente viene interpretata dagli Autori come particolare adattamento all'atto copulativo.

Sebbene tutti siano d'accordo su tale interpretazione, non è stato fino ad oggi descritto nei suoi particolari l'accoppiamento in questi animali, fatta eccezione per le descrizioni generali e superficiali del Melander (1) e del Friederichs (2), per cui rimane tuttora oscuro il significato funzionale dei vari elementi componenti l'apparecchio copulatore maschile, non solo, ma gli Autori che hanno studiato l'anatomia degli organi genitali, dànno reperti che sono in apparente contraddizione tra loro, soprattutto per quanto riguarda la presenza o meno di un organo fallico.

Le presenti ricerche sono state compiute su una forma prossima alla *Embia* (*Monotylota*) *Ramburi* R. di Cagliari (Sardegna) per cui si può soltanto ammettere come provvisoria ipotesi, in attesa di ricerche del genere anche sulle altre specie dell'ordine, che le modalità riscontrate sulla specie in parola, siano estensibili ad altri embiotteri presentanti le stesse caratteristiche morfologiche nell'apparato copulatore.

Per la comprensione di quanto andrò esponendo più avanti, dò qui appresso un cenno descrittivo dei vari elementi costituenti il complesso dell'apparato copulatore maschile e di quello femminile.

(*) Ricerche eseguite nell'Istituto di Zoologia dell'Università di Cagliari.

(**) Nella seduta dell'11 aprile 1953.

(1) A. MELANDER. *Notes on the Structure and Development of « Embia texana »*. Biol. Bull. », IV, pp. 99–118 (1903).

(2) K. FRIEDERICHS. *Das Gemeinschaftsleben der Embiiden und Näheres zur Kenntnis der Arten*. « Archiv für Näturg. N. Folg. », Bd. 3 (1934).

APPARATO COPULATORE MASCHILE (fig. 1). – Il decimo urotergo è diviso longitudinalmente in due emitergiti: destra e sinistra, molto sclerificate. *Emitergite destra*: a forma subtriangolare, si prolunga posteriormente in un processo che termina a punta ed è rivolto in basso. *Emitergite sinistra*: pure

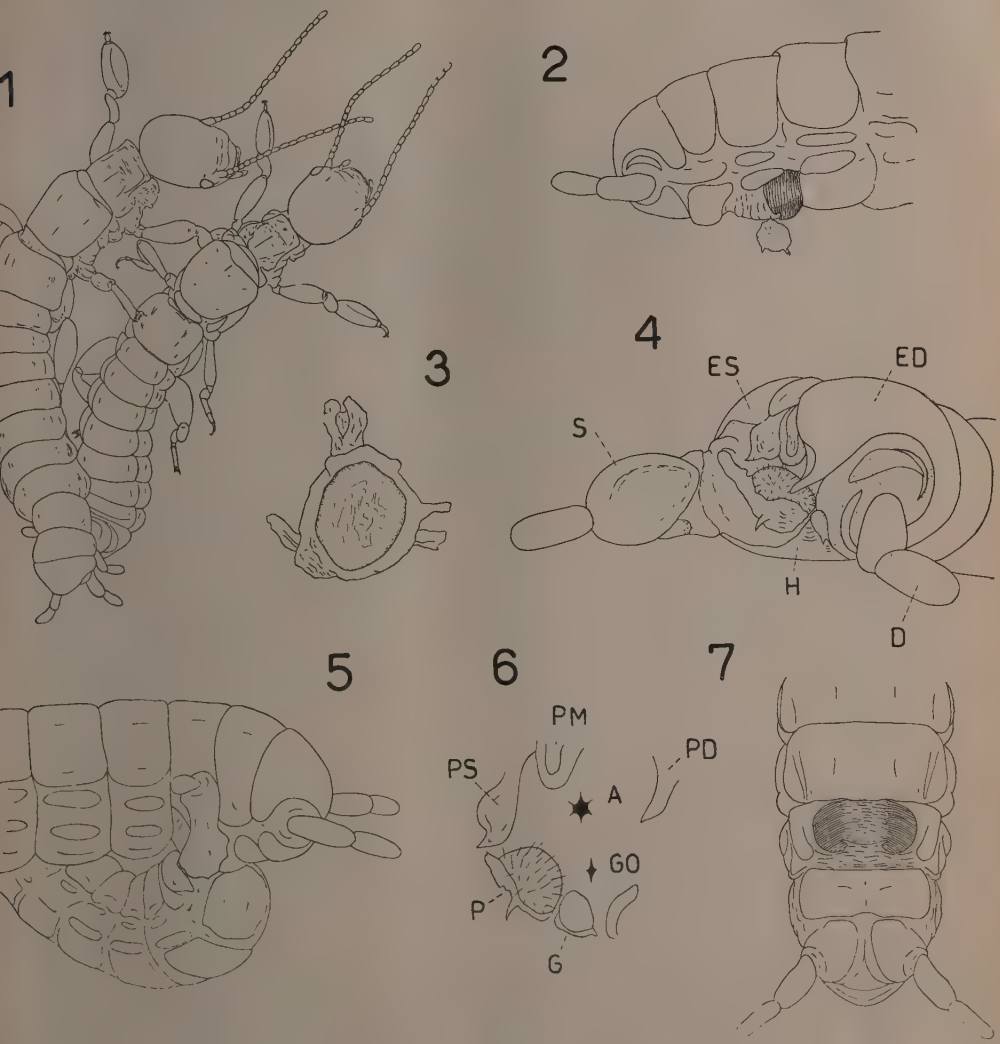


Fig. 1.

Accoppiamento della *Embia sp.* 2. Addome di femmina fecondata con spermatofragma. 3. Sezione longitudinale dello spermatofragma isolato. 4. Estremità addominale del maschio (parti membranose punteggiate, parti sclerificate in bianco): S, cerco sinistro; D, cerco destro; ES, emitergite sinistra; ED, emitergite destra; H, hypandrium. 5. Estremo addome del maschio e della femmina in accoppiamento. 6. Apertura anale e genitale con processi molto divaricati: PS, processo della emitergite sinistra; PM, processo mediano (lamina inferiore); PD, processo della emitergite destra; P, piastra ventrale con papilla paranale; G, papilla paragenitale; A, apertura anale; GO, gonotrema. 7. Addome della femmina visto dal ventre. (In tutti i disegni, non sono stati disegnati i peli sul corpo, per semplicità, tranne che sulla papilla paranale).

a forma subtriangolare, presenta un prolungamento longitudinale il quale pure è fornito di estremità appuntita ad uncino rivolto a sinistra. Tale emitergite presenta nel suo margine interno una incavatura basale. *Processo mediano (dell'Imms)*: è un processo dell'Emitergite destra che viene a trovarsi nella parte dorsale mediana, tra le due emitergiti. Fuso in parte alla emitergite destra, esso si prolunga a lamina anteriormente si ripiega al disotto tra emitergite ed emitergite, per uscire, sempre laminiforme, al disopra dell'apertura anale dove si inserisce sulla papilla sopranale. *Piastra ventrale*: con questo nome designo brevemente una piastra isolata, posta asimmetricamente tra l'apertura anale e il cerco sinistro, al disotto della emitergite sinistra. Essa, secondo gli studi recenti del Ross [3], deriverebbe dalla fusione del cercobasipodite sinistro col periprocto sinistro, e nella specie in esame, presenta nella sua parte basale un robusto uncino ricurvo e rivolto a sinistra e in basso. *Papilla paranale*: tale papilla membranosa, che non risulta finora descritta, è posta dorsalmente alla predetta piastra ventrale e va ad occludere, in istato di riposo, il vestibolo perigenitale. Essa appare ricoperta nella sua superficie da peli corti ed eretti. *Papilla parageni tale*: membranosa, tuttora non descritta, è situata più ventralmente rispetto alla precedente. È completamente priva di peli e si inserisce sul processo dell'Hypandrium. *Hypandrium*: viene indicato con questo nome dal Ross il nono urosterno che si prolunga posteriormente con un processo su cui si inserisce la papilla paragenitale. *Cerco sinistro*: assai differenziato. Il primo articolo è claviforme con una profonda ed ampia insenatura prossimale interna, un tubercolo echinato nel suo margine interno basale ed una successiva incavatura ovalare nella sua parte interna distale che in riposo, va ad appoggiarsi sulla sommità posteriore dell'emitergite destra occludendo e coprendo tutte le altre formazioni sottostanti. Il secondo articolo non presenta differenziazioni. *Cerco destro*: non presenta nessuna particolare differenziazione ed assomiglia completamente a quelli della femmina. *Vestibolo paragenitale*: indico con questo nome l'ostio racchiuso dalle formazioni già viste, nella cui parte centrale si apre il gonotrema maschile, mentre più dorsalmente trovasi l'apertura anale ricoperta dalla papilla sopranale e dal lembo inferiore del processo dorsale mediano. *Gonotrema maschile*: in forma di fessura semplice. Assenza assoluta di edeago, fallo o pene (cfr. Grassi) [4]. Risalendo le vie genitali, troviamo immediatamente un brevissimo «ductus ejaculatorius» che è meglio chiamare ampolla eiaculatrice, in cui si versano, a cominciare dalla sua parte prossimale: gli sbocchi dei due vasi seminali, dieci paia di ghiandole accessorie pari, più una impari, ed inoltre gli sbocchi di altre due ghiandole pari, disuguali, secernenti verosimilmente il mastice per lo spermatofragma.

(3) E. S. Ross, *A Revision of the Embioptera, or Web-Spinners, of the new world.* « Proc. U. S. Nat. Mus. », vol. 94, pp. 401–504 (1944).

(4) B. Grassi, A. Sandias, *Costituzione e sviluppo della società dei Termiditi.* App. II. *Contribuzione allo studio degli Embidine.* « Atti Acc. Gioen. » (4), III, pp. 59 (1894).

APPARATO GENITALE FEMMINILE. – La vagina si apre nell'ottavo urosterno e viene protetta da una *piastra subgenitale* (Subgenitalplatte di Krauss) [5] costituita dall'VIII urosterno modificato. Essa nel suo orlo posteriore, che costituisce il margine inferiore dell'apertura vulvare, presenta due incavature simmetriche, laterali, il cui orlo esterno si prolunga da ogni parte in un corto uncino ottuso, rivolto verso l'interno. Nella parte vaginale dorsale sbocca, in corrispondenza della parte media della piastra sottostante, la spermoteca che viene ad essere situata perciò dorsalmente alla vagina.

COPULA. – L'accoppiamento avviene in qualsiasi ora della giornata, purché la luce diretta non colpisca i due accoppianti e sempre in uno dei cunicoli costruiti con i noti fili di seta in cui le Embie abitano sia da neanidi che da adulti. Portati fuori del loro nido, i due partecipanti, sia maschio che femmina, si ricostruiscono prima alla buona un nido gettando filamenti di seta, fino a proteggersi tanto da iniziare l'accoppiamento più o meno rinchiusi.

Il maschio, non appena si trova a suo agio in presenza della femmina, va in preda ad un eccitamento sessuale che si manifesta con vibrazioni intense delle antenne e talvolta di tutto il corpo; quindi, ponendosi longitudinalmente di fronte alla femmina, esso tenta subito di ghermire il capo della compagna con le mandibole.

Noto che le mandibole del maschio sono assai più sviluppate di quelle della femmina, fatto che ha indotto molti autori a considerare il maschio carnivoro mentre invece non ho mai riscontrato traccia di resti animali nell'apparato digerente all'infuori della spoglia dell'ultima muta. Non ho neppure osservato che esso si nutra di piccoli insetti per quanto ne abbia messo a disposizione sia viventi che morti (piccoli ditteri, afidi, collemboli, ecc.) In tutti i casi osservati il maschio, dopo qualche giorno dell'accoppiamento, moriva, per cui sono indotto ad ammettere che esso in generale non si nutra da adulto.

Se la compagna non acconsente all'amplesso, si difende proiettando sul maschio della saliva brunastra. Nel caso essa acconsenta, il maschio, tenendo saldo il capo della femmina con le mandibole, incurva l'addome verso sinistra, che ancora permane, nei suoi terminalia, nella posizione di riposo, vale a dire con le appendici addotte, mentre tutto il corpo si sposta a sinistra costringendo la femmina prigioniera ad incurvarsi essa pure, ma nell'altro senso. Non appena le due estremità addominali arrivano a contatto, il maschio si porta immediatamente con la sua al disotto del ventre della femmina, inarca l'estremità addominale ripiegandola dorsalmente, divarica, appena ora il cerco sinistro e con l'appendice dell'emitergite destra appuntita entra nella fessura genitale femminile, uncinando a mo' di arpione la parete membranosa dorsale della vagina, estraendola e spostandola verso il lato sinistro. Contemporaneamente il processo mediano che viene ad essere così

(5) H. A. KRAUSS, *Monographie der Embien*, Stuttgart, Zoologica Heft 60 (1911).

necessariamente inarcato, va a divaricare la piastra subgenitale con la sua parte distale, scorre nella incavatura destra del suo bordo fino ad incastonare l'uncino destro di questa con l'incavatura che si trova alla propria base e che corrisponde all'incavo dell'emitergite sinistra. Il sollevamento del processo mediano contribuisce inoltre a mantenere sollevata la piastra femminile comprimendola nella sua parete interna. Il lembo inferiore del processo mediano viene pertanto a trovarsi sollevato pur esso, andando così automaticamente a chiudere con la sua papilla l'apertura anale. L'appendice della emitergite sinistra si abduce pure essa contemporaneamente fino a spostare le pieghe vaginali dorsali completamente a sinistra in corrispondenza del tubercolo echinato. Con tale movimento, l'uncino sinistro della piastra genitale femminile va a portarsi fino alla base esterna della emitergite sinistra che così viene ad essere compresa tra le due incavature descritte.

A questo punto avviene l'abbraccio dell'addome della femmina da parte del maschio che adduce il suo cerco sinistro chiudendolo a tenaglia in modo da rinserrare tutta la parte dorsale sinistra della vagina. Per il turgore delle parti genitali più interne, inoltre, la papilla paranale viene portata in fuori, il processo ventrale si sposta quindi a sinistra e conficca il suo uncino sulla parte postero–inferiore delle pieghe vaginali già rinserrate, consolidando ancor più la presa. In questa maniera il vestibolo perigenitale maschile espanso viene a trovarsi in contatto diretto con lo sbocco dorsale della spermoteca che prima era ricoperto dalla piastra subgenitale ma ora rimane completamente estratto. A questo punto si effettua l'emissione dei secreti ghiandolari che molto probabilmente ha inizio con le ghiandole che possiedono lo sbocco all'estremità dell'ampolla eiaculatrice e precisamente con le due parti disuguali. Esse secernono un liquido vischioso che si rapprende immediatamente (mastice) e va così a costituire un dotto vero e proprio (dotto intergenitale) tra i gonopori genitali dei due sessi attraverso cui passano i prodotti delle ghiandole accessorie e gli spermatozoi che vi si diluiscono.

Il maschio, nel frattempo, agganciata sicuramente la femmina, abbandona la presa alla testa e rimane in questa posizione fino al completamento dell'atto che dura dai cinque ai dieci minuti circa. Avvenuto il riempimento della spermoteca, il maschio si distacca e il vestibolo perigenitale maschile, rinchiudendosi, fa confluire le pareti del dotto intergenitale obliterandone l'apertura. Questa formazione rimane appesa al corpo della femmina e potrebbe venir scambiata, a prima vista, per una spermatofora mentre invece, sezionata ed esaminata al microscopio, esibisce il suo strato esterno di mastice consolidato fornito di appendici esterne irregolari che corrispondono alle anfrattuosità esistenti tra i vari organi, anfrattuosità che sono state appunto colmate, e una cavità interna contenente lo stesso liquido delle ghiandole accessorie insieme a pochi spermatozoi (una cinquantina circa). La spermoteca è invece notevolmente rigonfia e riempita di secreto delle ghiandole accessorie e di spermatozoi che vi si trovano in numero enorme.

Una tale formazione quindi non si può omologare alle tipiche spermatofore descritte per vari ortotteri e presentanti una struttura ed una funzione del tutto diversa della nostra (cfr. Berlese [6] e Grandi [7]). Seguendo la classificazione del Cholodkovsky [8] e tenuto conto della funzione unicamente protettiva di detta formazione la considero uno *Spermatofragma* (da φράγμα = tutto ciò che copre, circonda, assicura) corrispondente con ogni verosimiglianza allo sphragis dei Parnassidi oppure al mastice esterno della spermatofora nel *Ditiscus* (Kittsubstanz del Blunck) [9]. Nella femmina post-coitum tale spermatofragma appare come una pallottolina appesa per un peduncolo allo sbocco della spermoteca (fig. 1). Rientrando in sito la parete vaginale, tale sigillo verrà presto eliminato con i movimenti dell'animale.

Noto qui come formazioni morfologicamente simili siano state spesso descritte tra gli insetti col nome di spermatofore. Converrebbe rivedere molte descrizioni ed osservare l'accoppiamento in tutte le sue fasi con tecnica adatta.

Esaminando il maschio immediatamente prima del coito, non si nota nessuna formazione del genere né esternamente né internamente nei canali genitali. Il Friederichs (op. cit.) dice di aver visto un maschio curvarsi dopo il coito e divorare alcunché alla sua estremità addominale. Probabilmente si tratta di parti di mastice o di tutto lo spermatofragma che potrebbe rimanere aderente al corpo del maschio anzichè a quello della femmina. Interrompendo il coito all'inizio ho notato come il maschio si sia subito curvato a divorare qualcosa all'estremità addominale che al binoculare apparve appunto lembi della sostanza rimasta appiccicata alle appendici esterne addominali.

Non ho mai notato la femmina curvarsi e divorare lo spermatofragma ma questo si staccava, come ho già detto, dopo qualche tempo da solo, senza che la femmina se ne volesse sbarazzare.

La mancanza assoluta di un organo fallico denota in questa specie uno stadio alquanto primitivo e peraltro adattamenti secondari e particolari. Nei Collemboli è stata descritta una copula per accollamento dei gonopori ma non crediamo opportuno trarre delle conseguenze in base a questo carattere che potrebbe costituire soltanto un fenomeno di convergenza. Ci limitiamo a dire che ad esso si potrà attribuire il suo valore solo quando le ulteriori ricerche metteranno in luce altri fatti, ora ignoti, che potranno far riconoscere la vera posizione degli Embiotteri e il loro grado di parentela con gli altri gruppi di insetti.

(6) A. BERLESE, *Gli Insetti*. Vol. II, pp. 502–503 (1925).

(7) G. GRANDI, *Introduzione allo studio dell'entomologia*. Vol. I, p. 283 (1951).

(8) N. CHOLODKOVSKY, *Ueber die Spermatodosen der Locustiden*. «Zool. Anz.», Bd. XLI, n. 13, pp. 615–619 (1913).

(9) H. BLUNCK, *Das Geschlechtsleben des «Ditiscus marginalis» L.* «Zeitschr. Wiss. Zool.», Bd. 102, p. 169 (1912).

Biologia. — *I neuroni di Mauthner sono neuroni «larvali» anche nei Teleostei* (*). Nota di Alberto Stefanelli, presentata (**) dal Socio G. Cotronei.

Le mie ricerche sui neuroni di Mauthner, iniziate con l'identificazione della coppia omologa nei Petromizonti nel 1933, sono poi continuate dal 1942 ad oggi sul più vasto materiale e sotto i più diversi aspetti, comparativi, embriologici, morfologici e fisiologici, usando anche tali cellule come *testes* biologico per indagini sperimentali sui problemi della determinazione istogenetica e del differenziamento della cellula nervosa. Numerose pubblicazioni, sia mie, sia in collaborazione e di allievi, illustrano i risultati ottenuti e in una rivista sintetica (1) ho fatto il punto delle ricerche sino al 1950.

Credevo, avendo lasciati alcuni problemi collegati a miei allievi, di non dovermi più occupare personalmente di questi neuroni, ma una osservazione, a mio avviso fondamentale per la esatta interpretazione del valore morfologico e funzionale di questi elementi peculiari degli Ittiopsidi, mi ha indotto a tornare sull'argomento facendo osservazioni su numerosi Teleostei adulti, di mare e di acqua dolce.

Premetto alla esposizione e alla analisi dei nuovi dati desunti, come uno dei risultati morfo–ecologici più importanti a cui sono giunto con le precedenti ricerche è la documentazione della transitorietà dei neuroni di Mauthner negli Anfibi anuri che regrediscono in un tempo più o meno breve dopo la metamorfosi. In questi animali tale atrofia era facilmente messa in relazione con la condizione di passaggio alla vita terrestre e con l'atrofia della coda, organo della natazione. Comunque i neuroni di Mauthner degli Anuri assumevano il valore di tipici «neuroni larvali» (2).

Avevo potuto anche dimostrare con altre ricerche comparative e sperimentali come il neurone i Mauthner rappresentasse essenzialmente una connessione tra i centri della linea laterale (oltre che del vestibolare) e i centri motori della coda. Infatti, se nello sviluppo regrediscono o uno dei due sistemi da connettere o entrambi, cessa la funzione dell'apparato mauthneriano che va quindi in involuzione. Tale è la situazione degli Anfibi

(*) Lavoro eseguito nel Laboratorio di Istologia ed Embriologia della Facoltà di Scienze della Università di Roma, con l'aiuto di mezzi finanziari avuti dal Consiglio Nazionale delle Ricerche.

(**) Nella seduta dell'11 aprile 1953.

(1) Alberto Stefanelli, *The mauthnerian apparatus of Ichthyopsida*. «Quart. Rev. Biol.», *26*, p. 17 (1951). In questo lavoro è elencata tutta la letteratura sull'argomento sino al 1950.

(2) A. Stefanelli, *Ciclo vitale e citomorfosi delle cellule nervose dei Vertebrati*. «Rend. Acc. Naz. Lincei», X, p. 159 (1951).

anuri dopo la metamorrosi dove, nel più gran numero di specie regrediscono sia la coda che la linea laterale, ma dove, in alcune specie, come nello *Xenopus*, può regredire solo la coda. Così negli anfibi Urodeli, mentre i neuroni di Mauthner si osservano generalmente anche nell'adulto, non sono presenti in forme adattate alla vita terrestre come il *Geotriton* in cui, pur rimanendo la coda, non si sviluppa la linea laterale.

Sperimentalmente, con l'amputazione della coda, si può ottenere una regressione anche negli Urodeli che normalmente posseggono questi neuroni [3].

Le nuove osservazioni da me fatte nei Teleostei adulti mi hanno permesso di constatare un fenomeno paradossale e in apparente contraddizione con quanto si era sinora potuto desumere sul significato funzionale dei neuroni mauthneriani: i neuroni di Mauthner, mentre si conservano nei Teleostei adulti con attività natatoria modesta, si atrofizzano e possono regredire completamente nei Teleostei adulti forti nuotatori, quali sono quelli d'alto mare, quelli abissali o quelli predatori. Ma la contraddizione è apparente perché in queste ultime forme alle due fibre di Mauthner si sostituisce un imponente fascicolo longitudinale mediale che, evidentemente, sostituisce o vicaria tale coppia di fibre con molta maggiore efficacia. Così i neuroni di Mauthner, che sono presenti nelle forme larvali di quasi tutti i Teleostei (vedremo le eccezioni), dimostrano di essere anche nei Teleostei dei « neuroni larvali ».

Ricordo alcune osservazioni preliminari. Dopo aver constatato la precocissima differenziazione (24 ore dopo la fecondazione!) del neuroblasta mauthneriano (Stefanelli e Baffoni 1952) [4] di un piccolo e vivace Teleosteo di acqua dolce (*Brachydanio rerio*) riconoscibile, cosa di estremo interesse, per le dimensioni del suo nucleo prima ancora che si manifesti alcun segno particolare nel citoplasma, avevo fatto studiare (Baffoni e Serra 1952) [5] la successiva citomorfosi di questo neurone sino negli individui più vecchi da noi posseduti (di 4 anni; ma tale pesciolino può vivere in acquario sino a 6–7 anni). È risultato che la struttura del pirenoforo si va continuamente modificando sino all'età studiata: dalla forma quasi tondeggiante e in posizione piuttosto mediale nell'ambito dell'allungato, questa cellula si trasforma negli individui di 4 anni in un elemento assai allungato e spostato lateralmente, impegnato con il suo dendrite laterale tra le fibre radicolari del complesso VIII. Le fibre sinaptiche e specialmente il canestro pericellulare, appaiono molto sviluppate, ma la cellula presenta una tigroide assai ridotta, con aspetto di vera tigrolisi, e, nei preparati argentici, appare uni-

(3) A. STEFANELLI. *Involuzione sperimentale delle cellule di Mauthner nei Tritoni adulti*. « Rend. Acc. Naz. Lincei », XIII, p. 294 (1952).

(4) A. STEFANELLI e G. BAFFONI. *Il nucleo nei fenomeni della determinazione e del differenziamento della cellula di Mauthner dei Teleostei*. « Rend. Acc. Naz. Lincei », XII, p. 110 (1952).

(5) G. BAFFONI e L. SERRA. *La citomorfosi del neurone mauthneriano di un teleosteo durante lo sviluppo*. « Riv. Biol. », XLIV, p. 169 (1952).

formemente colorata senza presentare neurofibrille distinte. Seppure questi aspetti fossero molto simili a quelli di cellule di Mauthner di Anfibi che iniziano la loro involuzione fisiologica (Stefanelli 1949; Baffoni e Catte 1951) [6] o a quelli di cellule di Mauthner a cui sia stato amputato il neurite e ne sia impedita la rigenerazione (Baffoni 1952) [7], tuttavia non abbiamo considerata una involuzione che allora appariva in antitesi con le nostre conoscenze e ci è sembrato più logico pensare che tale aspetto fosse da porsi in relazione con manifestazioni di senescenza.

Nel frattempo avevo fatto studiare ad un altro mio allievo, il De Angelis, l'apparato di Mauthner di Teleostei adulti di fondo o comunque dotati di modeste attitudini natatorie, sicuro che si sarebbe riscontrato uno sviluppo più ridotto di questi neuroni legati alla attività natatoria. Infatti nel materiale studiato (*Trachinus*, *Scorpaena*, *Clinus*, *Blennius*, *Solea*) le cellule di Mauthner erano presenti e con i caratteristici sistemi sinaptici, ma di dimensioni di poco superiori a quelle di altri elementi reticolati del tegmento; né le fibre apparivano con calibro notevole e tanto meno « colossale » quale quello che era noto dalle immagini degli autori in avannotti di varie specie. Dopo il calamo era ben difficile poter seguire ancora queste fibre [8]. Ciò spiega come Tagliani ritenesse alcune di queste specie prive di fibre di Mauthner.

Queste osservazioni collimavano perfettamente con le acquisizioni raggiunte, ma occorreva un raffronto con la condizione, negli adulti, di tali neuroni in pesci forti nuotatori, tanto più che gli autori avevano preferito lavorare su larve e avannotti, dove meglio riuscivano i metodi argentici e più celere era l'allestimento dei preparati. Gli unici Teleostei adulti studiati mi risultavano solo quelli esaminati da Tagliani (1905), tutte forme di fondo (*Cerna*, *Motella*, *Pagellus*, *Julis*, *Corvina*, *Apagon*). Inoltre con tale studio avrei potuto fare un controllo se il comportamento osservato in *Brachydanio* dovesse ritenersi generale o una condizione particolare di questa specie.

I primi esemplari di Teleostei nuotatori furono alcuni *Pelamis sardoa*, di circa 50 cm. di lunghezza [9]. E qui ho potuto fare la constatazione che mi ha molto sorpreso che le cellule di Mauthner erano completamente regredite, ridotte ad un residuo citolizzato contenuto in una cavità dello allungato (fig. 1). Dico sinceramente che il mio primo sospetto è stato quello di una cattiva fissazione del materiale che, tuttavia, al momento del fis-

(6) G. Baffoni e G. Catte. *La citomorfosi della cellula di Mauthner in « Hyla arborea Savigny »*. « Riv. Biol. », XLIII, p. 373 (1951).

(7) G. Baffoni. *La rigenerazione della coda e gli effetti reattivi delle cellule di Mauthner in anfibi anuri e urodeli*. « Rend. Acc. Naz. Lincei », XII, p. 89 (1951).

(8) C. De Angelis, *Le cellule di Mauthner in alcuni Teleostei di fondo*. « Boll. Pesca Pisc. Idrob. », V, fasc. 2 (1950).

(9) Ringrazio il Sig. Dohrn della Stazione Zoologica di Napoli per l'ospitalità data al mio allievo Mario Pecini, colà recatosi per procurare questo materiale.

saggio era ancora vivente. Ma successivi preparati fatti con la massima cura (sia in Bouin, sia in alcool sec. Cajal) mi hanno tolto ogni dubbio sulla reale esistenza di questo citolizzato. A parte ogni altra considerazione, tutte le altre cellule nervose apparivano perfettamente fissate.

Inoltre, la fibra risultava assai sottile e seguibile solo per un certo tratto dell'allungato. Ciò dimostra una maggior resistenza della fibra ai processi involutivi (tale condizione è ancor meglio osservabile nel *Salmo fario* di 50 cm. successivamente studiato). Attorno alla cavità lasciata dalla cellula di Mauthner si osserva ancora, per quanto alterato, il sistema sinaptico.

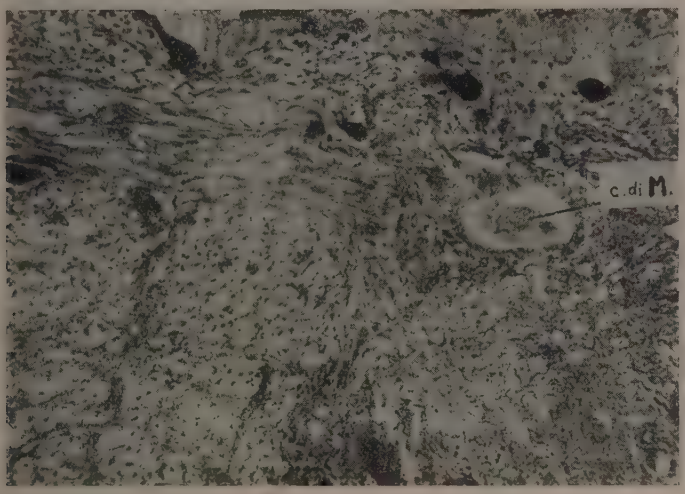


Fig. 1. – Condizione della cellula di Mauthner (c. di M.) di un *Pelamis sardoa* di 50 cm. di lunghezza. Met. Bodian.

Appare invece, in questi pesci, uno sviluppo assai cospicuo, notevolmente maggiore che nelle forme precedentemente studiate da De Angelis, del fascicolo longitudinale mediale (fig. 2).

Dopo queste osservazioni in *Pelamis* ho esaminati tra i Teleostei forti nuotatori le seguenti specie di mare: *Engraulis* (giovani e adulti), *Clupea* (adulti), *Exocoetus* (larve) e, tra i forti nuotatori di acqua dolce, *Esox lucius* (di 60 cm.) e *Salmo fario* (di 50 cm. allo stadio larvale). Inoltre, per gentilezza del prof. Sanzo, ho avuti da Messina i seguenti abissali adulti: *Argyropelacus*, *Scopaelus*, *Maurolicus*.

I preparati furono allestiti con il metodo all'argento colloidale di Bodian e in parte con la colorazione alla Nissl.

In tutti gli adulti di queste specie, eccetto che in *Salmo* in cui vi è solo notevole riduzione, si nota la distruzione della cellula di Mauthner. In alcuni Teleostei modesti nuotatori, preparati per controllo, quali il *Cipri-*

nus auratus e il *Lebistes reticulatus*, le cellule e le fibre rimangono invece anche nell'adulto.

Già da queste prime osservazioni appare che l'involuzione della cellula avviene con modalità diverse: o con citolisi e con la permanenza nella cavità prima occupata dalla cellula di un residuo (*Pelamis*, *Clupea*, e gli abissali), o si ha un graduale disseccamento dell'elemento come in *Esox*, *Salmo Brachydanio*, similmente a quanto avviene negli Anfibi anuri dopo la metamorfosi. Così pure appare diverso l'aspetto della fibra di Mauthner: mentre in alcune forme essa è completamente introvabile tra le fibre del fascicolo

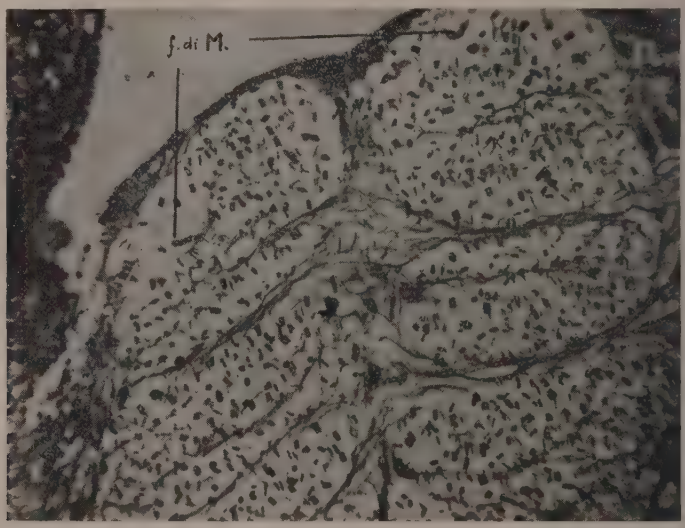


Fig. 2. – Sezione del fascicolo longitudinale mediale in prossimità del calamo mostrante i residui delle fibre di Mauthner (f. di M.) di un *Esox lucius* di 60 cm. di lunghezza.

longitudinale mediale (abissali, *Clupea*, *Engraulis*), in altri è rintracciabile, ma ridottissima di calibro e solo per un certo tratto del bulbo (*Esox*) o, in altri ancora (*Salmo*), è presente con uno sviluppo notevole del diametro, seppure per un tratto limitato e con evidente alterazione del cilindrasse. Questi fatti si possono interpretare considerando una maggior resistenza delle fibre ai fenomeni involutivi, anche quando la cellula è già completamente distrutta; probabilmente le differenze osservate nelle diverse specie sono in relazione alla differente età, non controllata, dei vari esemplari esaminati. Non si può pensare certo, a meno di non andare contro ai più elementari concetti di neurologia, ad una sopravvivenza morfologica e fisiologica della fibra senza la cellula da cui è stato originata!

Osservando come attorno alla sede della cellula, ormai distrutta, vi sia sempre un groviglio delle fibre sinaptiche che prima erano in rapporto col corpo cellulare, si ha l'impressione che la fibra venga in questa sede a sfioc-

carsi in un groviglio di fibre; ciò spiega come antichi osservatori (Mayser, 1881) abbiano parlato di un *caput medusae* che rappresenterebbe il sistema di diramazioni terminali della fibra a cui veniva attribuito così un decorso centripeto.

Riassumo nella seguente tabella, per brevità di esposizione, le condizioni dei neuroni di Mauthner nei vari teleostei da me esaminati.

TABELLA I.

Presenza (+) assenza o atrofia (—) dei neuroni di Mauthner in alcuni Teleostei

	Embrione	Larva	Adulto
A) MODESTI NUOTATORI CON CODA:			
Blennius basiliscus			+
Gobius jozo			+
Clinus argenteus			+
Trachinus radiatus			+
Solea impar		+	+
Tripterygion nasus			—
Scorpaena porcus		+	+
Uranoscopus			
Lebystes reticulatus		+	+
Cyprinus auratus		+	+
Trigla corax		+	+
Arnoglossus grohmanni		+	+
B) MODESTI NUOTATORI NÓN CON CODA:			
Hyppocampus guttulatus		—	—
Nerophys ophidion			—
Signatus acus		+	—
C) ATTIVISSIMI NUOTATORI CON CODA:			
Pelamis sardoa			—
Cuplea sp.			—
Engraulis encrasicolus		+	—
Exocoetus volitans		+	
Esox lucius			—
Salmo fario		+	—
Scopaelus benoiti			
Maurolicus pennanti			—
Argyropelacus hemigymnus			—
Trachypterus sp.		+	
Brachydanio rerio	+	+	
D) NUOTATORI ANGUILLIFORMI:			
Anguilla anguilla	+		
Conger vulgaris	+	+	
Muraena helena		+	
Myrus vulgaris		+	
Cobitis taenia		+	

Da queste osservazioni risulta pertanto come in quasi tutti i Teleostei da me studiati, ad eccezione di quelli, quali i Lofobranchi, in cui la natazione non si esplica con moto della coda, si vengano ad identificare nello embrione e nella larva i neuroblasti di Mauthner, tipici per sede e dimensioni; ma, mentre nei Murenoidi non vi è un differenziamento specifico e vengono ad assumere il valore di elementi reticolari non dissimili da molte altre coppie, nella gran maggioranza dei Teleostei si ha il differnziamento nell'avannotto e nella larva dei tipici neuroni di Mauthner. Il destino di questi neuroni è però diverso: mentre nei Teleostei adulti modesti nuotatori essi, pur ridotti, si conservano, nei Teleostei adulti forti nuotatori si distruggono; ma in questi la funzione dell'apparato mauthneriano viene sostituita da elementi del fascicolo longitudinale mediale e il fascicolo infatti appare di gran lunga più sviluppato.

Queste condizioni si possono così riassumere (Tabella I): A, forme dotate di natazione modesta per mezzo della coda; si ha notevole sviluppo dell'apparato mauthneriano nelle larve e nell'adulto si conserva con aumento dei sistemi sinaptici, specialmente dell'*axon cap* e del canestro pericellulare (esempio tipico in *Cyprinus*); B, forme con modesta attività natatoria e non per mezzo della coda (forme anure, o con coda immobile o trasformata. In questo caso non si ha lo sviluppo delle cellule di Mauthner (caso tipico in *Hippocampus*); C, forme dotate di grande attività natatoria. In queste forme si ha grande sviluppo dell'apparato mauthneriano nella larva, ma poi, nell'adulto, il sistema subisce una graduale atrofia e nelle forme più anziane di alcune specie è completamente distrutto; rimangono attorno alla sede delle cellule dei residui di tutti i sistemi sinaptici (esempio tipico in *Pelamis*). In questi animali si osserva un imponente sviluppo del fascicolo longitudinale mediale.

Da questi fatti si può facilmente trarre la conclusione che i neuroni di Mauthner *sono anche nei Teleostei dei neuroni larvali*, nel senso che la loro massima attività funzionale si ha in questo stadio. Essi sono i primi neuroni del neurasse a differenziarsi (Stefanelli e Baffoni, 1952) e ciò in relazione con la precocissima necessità di coordinazione del movimento natatorio [10]. Nella larva e nei giovanissimi si osserva la più completa struttura dei sistemi sinaptici quali sono il canestro pericellulare, l'*axon cap* e gli *ending clubs*; nell'adulto, in relazione alla differente ecologia delle forme, si ha un diverso destino di questi neuroni (fig. 3): se l'attività natatoria, per gli adattamenti alla vita di fondo, rimane modesta, questi neuroni non si distruggono perché, evidentemente, la loro attività è sufficiente e continua ad esplicarsi anche nell'adulto. È quello che si riscontra anche negli Anfibi urodeli (fig. 3). Ma negli animali dotati di attivissima natazione il neurone di Mauthner, larvale, è insufficiente. Si sviluppa allora tutto un sistema di fibre nuove da altri centri tegmentali, prevalentemente mesencefalici, che vengono ad

(10) BAFFONI, con osservazione inedita, ha trovato la precocissima differenziazione dei nuclei mauthneriani anche in embrioni di *Conger*.

ingrossare notevolmente il fascicolo longitudinale mediale e a vicariare la insufficiente attività mauthneriana. E finiscono per sostituirsi completamente nella funzione a questi neuroni che vanno gradualmente in involuzione.

Questa condizione spiega perfettamente l'apparente paradosso di neuroni specifici del nuoto che si conservano nei modesti nuotatori e si distruggono nei Teleostei forti nuotatori.

È in corso uno studio comparativo del fascicolo longitudinale mediale tra Teleostei che conservano le cellule di Mauthner e quelli in cui si distruggono.

Una condizione particolare risulta essere quella dei Teleostei del gruppo D della tabella: gli anguilliformi. Nelle larve di questi animali, secondo osservazioni inedite di Baffoni, si ha l'identificazione, per la sede e le dimensioni, delle cellule di Mauthner negli embrioni [10] e nelle larve; ma successivamente, come ho potuto osservare (Stefanelli e Camposano, 1945) non subiscono il peculiare differenziamento mauthneriano, ma si differenziano come coppia di elementi reticolari in tutto simili ad altre 17 coppie di notevoli dimensioni (osservazioni in *Anguilla*).

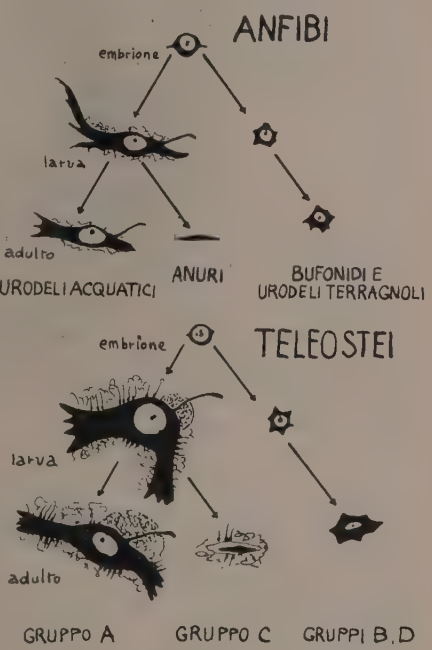


Fig. 3. – Schema del destino delle cellule di Mauthner negli Anfibi e nei Teleostei. La condizione centrale indica involuzione e quella a destra indica differenziamento non dissimile da quello di cellule reticolari comuni del tegmento.

La condizione delle cellule di Mauthner dei Teleostei rappresenta pertanto un bellissimo esempio nei Vertebrati di un sistema vicariante nervoso, come già ne erano stati descritti negli Invertebrati. Il comportamento di un neurone che può essere sostituito in specie affini da un sistema numeroso di neuroni può essere collegato al concetto dello Zavarzin (1925) di neurone polivalente, in genere di giganti dimensioni; tale polivalenza si manifesta appunto dalla presenza in forme affini, al posto del neurone polivalente, di un complesso di neuroni minori vicarianti. Tenendo presenti queste condizioni possiamo pertanto così concludere e definire i neuroni di Mauthner degli Ittiopsidi: neuroni giganti polivalenti larvali della coordinazione motoria per la natazione con coda e di correlazione per i riflessi della linea laterale e degli organi vestibolari. Essi permangono nello adulto se la funzione natatoria non supera un certo limite (Anfibi Urodeli, Teleostei di fondo); si distruggono e vengono sostituiti nella funzione da un

più complesso sistema del fascicolo longitudinale mediale, nei Teleostei dotati di potente attività natatoria (Teleostei d'alto mare, abissali, predatori, ecc.). Condizioni particolari sono quelle degli Anfibi anuri in cui, con il passaggio alla vita terrestre, si ha parallelamente alla perdita della coda e all'atrofia del sistema laterale la distruzione dei neuroni di Mauthner dopo la metamorfosi, quelle dei Teleostei privi di coda o con coda non atta al nuoto (*Orthagoriscus*, sec. Tagliani, Lofobranchi) in cui i neuroni di Mauthner non si sviluppano affatto, e quelle degli anguilliformi, in cui le cellule di Mauthner, che si identificano nell'embrione e nella larva, non subiscono poi un differenziamento dissimile da quello di molte altre coppie di cellule reticolari giganti.

Biologia. — *Osservazioni fotometriche sull'oocite in crescita di «Antedon rosacea» Lamarck*(*). Nota di ENRICO URBANI, presentata(**) dal Socio G. COTRONEI.

In una serie di lavori condotti sugli oociti in crescita di varie specie animali ho richiamato l'attenzione sulla importanza dell'acido ribonucleico nelle attività metaboliche della cellula germinale femminile: l'oocite infatti è una cellula caratterizzata da notevoli fenomeni di sintesi proteica e lipidica che conducono alla formazione del tuorlo.

Le prime osservazioni mi sono state suggerite dalle ricerche di Brachet, Caspersson e altri nelle quali si insisteva sugli stretti rapporti tra acidi nucleici e sintesi proteiche nelle cellule. D'altra parte Cotronei che aveva studiato citologicamente la vitellogenesi in *Antedon rosacea* aveva messo in evidenza (1910-1911)(1) il singolare comportamento di una formazione citoplasmatica, la «fascia vitellogena» e le sue relazioni con la elaborazione del deutoplasma.

La fascia vitellogena è una formazione transitoria: compare negli oociti che hanno iniziato l'accrescimento, rimane nella cellula un certo tempo e poi si disgrega e scompare, dopo la sua scomparsa appaiono le prime formazioni di vitello. Cotronei ha interpretato la genesi della fascia vitellogena come conseguenza di un gioco di saturazioni di sostanze basofile ooplasmatiche in rapporto al volume dell'oocite. Essa si origina come per precipitazione di dette sostanze basofile che raggiungono in un periodo della crescita dell'oocite un tenore elevato; continuando la cellula il suo accrescimento la concentrazione delle sostanze basofile rispetto al suo volume diminuisce e allora la fascia vitellogena si disgrega e scompare.

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Anatomia Comparata «G. B. Grassi» della Università di Roma, con contributo del C.N.R.

(**) Nella seduta dell'11 aprile 1953.

(1) G. COTRONEI, «Boll. Soc. Nat. Napoli», *24*, 155 (1910) e «Arch. Zool.», *5*, 41 (1911).

Cotronei aveva avanzato l'ipotesi che le sostanze basofile della fascia fossero utilizzate per la sintesi del vitello e per questo la denominazione di « fascia vitellogena ».

Queste osservazioni mi hanno spinto a uno studio degli acidi nucleici nell'oocite di *Antedon* e con l'applicazione della tecnica di Brachet e con la fotografia in luce ultravioletta ho potuto dimostrare che nella fascia vitellogena sono presenti acido ribonucleico e proteine (1949) [2].

Queste osservazioni sono state da me e da allievi del nostro Istituto estese a quelle formazioni chiamate nuclei vitellini o corpi vitellini che sono presenti, con diversa morfologia negli oociti in crescita di molti animali [3]. Il criterio comparativo che mi ha guidato in questa seconda fase del lavoro ha consentito una messa a punto delle questioni inerenti ai nuclei vitellini e una inquadratura, eseguita con tecniche citologiche moderne, dei problemi relativi alla loro genesi e funzione. Da un punto di vista citochimico è risultato che nei nuclei vitellini, al pari che nella fascia vitellogena di *Antedon*, è presente acido ribonucleico; talvolta, come nei ragni (Tegenaria) e nei Mammiferi (pipistrello, cavia) questo composto è presente solo in determinati settori del nucleo vitellino stesso, si è così dimostrato che i nuclei vitellini, che hanno una morfologia molto variata, sono unificati dalla presenza di RNA. Questi risultati sono stati confermati da autori italiani e stranieri [4, 5, 6].

In una Memoria del 1949 [3] avevo annunziato di aver iniziato delle osservazioni quantitative sul tenore degli acidi nucleici nei nuclei vitellini degli oociti in crescita; fin da allora mi ero infatti posto il problema della misurazione della quantità di acido ribonucleico e di proteine presenti, per esempio, nella fascia vitellogena in confronto al restante citoplasma dell'oocite. Seguendo le indicazioni degli studi di Caspersson e di Pollister e Collaboratori avevo impiegato una cellula fotoelettrica per la misura delle estinzioni delle varie zone di uno stesso oocite fotografato in luce ultravioletta prima e dopo l'azione della ribonucleasi. Questo lavoro è stato più volte interrotto e ripreso sopratutto per difficoltà di carattere tecnico nella realizzazione di circuiti elettrici con corrente perfettamente stabilizzata indispensabile per l'alimentazione dei fotomoltiplicatori elettronici.

Da allora l'attenzione di Pollister e collaboratori in America e di Lison e Pasteels in Belgio si è polarizzata su questo problema che può per semplicità essere riassunto in poche parole – Poter misurare fotometricamente la quantità di luce (visibile) che viene arrestata da una certa struttura cellulare quando questa venga colorata in modo particolare, oppure misurare fotometricamente la quantità di luce (invisibile) ultravioletta che viene arrestata da strutture cellulari che contengono determinati composti chimici che hanno la proprietà di essere opachi ad una determinata λ (per esempio gli acidi nucleici a 2600 Å o alcune proteine a 2800 Å) La fotometria nell'invisibile (U.V.) richiede impianti molto costosi mentre quella nel visibile è più facilmente realizzabile. Supponiamo per esempio che si vogliano fare delle misure fotometriche della reazione di Feulgen, specifica per il DNA. Se su di una cellula fotoelettrica viene fatta arrivare la luce che è passata attraverso un nucleo il quale si è

(2) E. URBANI, « Riv. di Biologia », *41*, 68 (1949).
(3) E. URBANI, « Riv. di Biologia », *41*, 331 (1949).
(4) E. VANNINI, « Rend. Acc. Naz. Lincei », *10*, 256 (1951).
(5) E. FAURÉ FREMIET, H. COURTINES e H. MUGARD, « Exp. Cell. Res. », *1*, 253 (1950).
(6) J. FAUTREZ, « C.R.S.B. », *144*, 1129 (1950).

debolmente colorato con la Feulgen è chiaro che poca luce sarà arrestata dal colore e la cellula fotoelettrica darà un forte segnale registrabile da un galvanometro o da un microamperometro. Se invece il nucleo sarà fortemente colorato con la Feulgen una maggiore quantità di luce (rispetto al precedente esempio) sarà arrestata e la cellula fotoelettrica darà un segnale più debole. Il colore dei nuclei, indice in questo caso del contenuto in DNA, anziché essere indicato dall'osservatore con i termini generici e soggettivi di « reazione di Feulgen debole » oppure « forte » potrà essere indicato con due cifre indicanti la quantità di luce che è stata arrestata da una certa intensità di colore.

Lo spazio non consente qui di poter analizzare dettagliatamente i vari procedimenti fotometrici: è però importante dire che perché i risultati ottenuti con una tecnica del genere siano attendibili è necessario siano rispettate delle condizioni che qui non posso enumerare e discutere [7]. Il metodo fotometrico è molto delicato per le numerose cause di errore che possono infirmare i risultati e perciò è augurabile che questa nuova tecnica citologica quantitativa (destinata sopratutto allo studio degli acidi nucleici e di determinate proteine), che potrà rendere grandi servigi nelle ricerche biologiche, entri nei laboratori per essere sottoposta ad una critica più generale dalla quale saranno vagliate e precisate le possibilità di impiego e il limite di attendibilità dei risultati [8].

Dopo quanto ho detto, preciso che è mia intenzione comunicare in questa Nota alcuni dati quantitativi ottenuti con misure fotometriche [9] effettuate con luce visibile su oociti in crescita di Antedon colorati secondo la tecnica di Pollister con azzurro A.

L'apparecchio da me costruito ed usato è ispirato agli schemi di Pollister e di Lison, il fotomoltiplicatore elettronico è un 931 *a* RCA alimentato con corrente raddrizzata e stabilizzata: tensione di alimentazione da 1000 a 1200 volts. Tutti i particolari costruttivi saranno oggetto di altra pubblicazione.

Le pinnule di Antedon sono state fissate in alcool acetico 3 : 1 secondo Pollister [10], incluse in paraffina e sezionate a *7 micron*. Le sezioni sono state colorate con azzurro A secondo Pollister. Tale colorante colora, secondo il suddetto Autore, RNA e DNA, Lison non concorda con Pollister sulla specificità dell'azzurro A per i due acidi nucleici. Nel mio caso, mentre mi riprometto di sottoporre ad una analisi fotometrica oociti di Antedon colorati con i vari tipi di coloranti preconizzati per lo studio istochimico degli acidi nucleici, posso dire che la colorabilità degli oociti con azzurro A scompare dopo trattamento con ribonucleasi, o con acido tricloroacetico secondo Schneider o con acido perclorico, secondo Sax e Ogur, inoltre i risultati che si ottengono con detta colorazione corrispondono a quanto si ottiene con la fotografia in luce ultravioletta su λ da 2537 Å a 2750 Å.

Evidentemente il fatto che l'azzurro A colori sia DNA che RNA è fastidioso in tutte quelle ricerche su materiali che presentano ambedue i composti, ma non è questo il caso degli oociti di Antedon dove non è rileva-

(7) L. Lison, *Histochimie et Cytochimie animales*. Ed. Gauthier Villars, Paris 1953.

(8) Si confronti a questo proposito quanto scritto da Vialli su « Mon. Zool. Ital. », Suppl., vol. 60, 1951.

(9) Ringrazio il dott. Salvatore Russo che mi ha aiutato nelle determinazioni fotometriche.

(10) A. W. Pollister, « Rev. d'Hématologie », 5. 527 (1950).

bile con la reazione di Feulgen DNA in nessuno degli stadi di accrescimento dell'oocite da me studiati. D'altra parte le misurazioni da me eseguite sono state effettuate sul citoplasma e sulla fascia vitellogena degli oociti; non sono stati fotometrati la vescicola germinativa ed il nucleolo perché la prima presenta un reticolo basofilo a maglie molto larghe che non si presta a determinazioni fotometriche ed il secondo non possiede una distribuzione omogenea di RNA.

La determinazione dei bianchi è stata fatta colorando con azzurro A sezioni trattate con acido tricloroacetico secondo Pollister o con acido perclorico al 10 % per 15–25 minuti a 20° C, dopo tale trattamento la colorabilità scompare quasi completamente. Di ogni oocite è stata misurata la sezione a diametro maggiore, sono state fatte più di tre misure nel citoplasma e due o tre nella fascia vitellogena quando questa era presente. I dati riportati sono la media delle misure effettuate.

Riporto due grafici (fig. 1 e fig. 2) tratti dalle determinazioni eseguite sugli oociti di due pinnule di Antedon. In ascisse è indicato il raggio degli oociti (raggio medio calcolato tra il diametro maggiore e il minore) in ordinate le estinzioni in luce bianca. Alcune determinazioni eseguite con luce rossa (filtro PC 5 della spettrofotometro Colema) hanno dato gli stessi risultati, questo forse perché l'azzurro A conferisce una colorazione di tonalità bleu molto scura, quasi nera. Per la comprensione dei grafici basterà dire che la concentrazione in RNA, o più generalmente in ribonucleoprotidi (punti = citoplasma; croci = fascia vitellogena) indicata dalla intensità del colore è direttamente proporzionale alla estinzione E.

L'andamento dei grafici mostra che in un primo tempo vi è una sintesi di ribonucleoprotidi còrrispondentemente ad un primo aumento di volume dell'oocite. Nella fascia vitellogena, quando questa compare, vi è una maggiore concentrazione di ribonucleoprotidi che nel citoplasma. Con la disgregazione della fascia vitellogena e il progressivo aumento del volume degli oociti la colorabilità diminuisce come è indicato dalle estinzioni sempre minori. Si pone qui la questione se la diminuzione e la scomparsa di colorabilità che si verifica con il grande accrescimento dell'oocite sia effettivamente indice di una scomparsa di RNA perché questo viene utilizzato o sia invece dovuto al fatto che l'RNA passa in uno stato nel quale non è più colorabile. Le misure che ho eseguite in luce U.V. e che non riporto perché ancora incomplete mostrano anche loro una notevole diminuzione di estinzione nel citoplasma dalla disgregazione della fascia vitellogena in poi.

Questi dati quantitativi confermano pienamente l'ipotesi di Cotronei che la fascia vitellogena si forma come per una precipitazione di sostanze basofile, difatti nella fascia stessa si trova sempre una maggiore concentrazione di azzurro A e quindi di RNA o di ribonucleoprotidi.

Vannini con il metodo di Gerola e Vannini, con l'impiego cioè di miscele verdedimetile-pironina tamponate a vari pH ha potuto stabilire (loc. cit.) che nella fascia vitellogena di Antedon si trova la maggior concentrazione

di ribonucleoprotidi, anche lui ha riscontrato una diminuzione dei ribonucleoprotidi citoplasmatici a seguito della disgregazione della fascia.

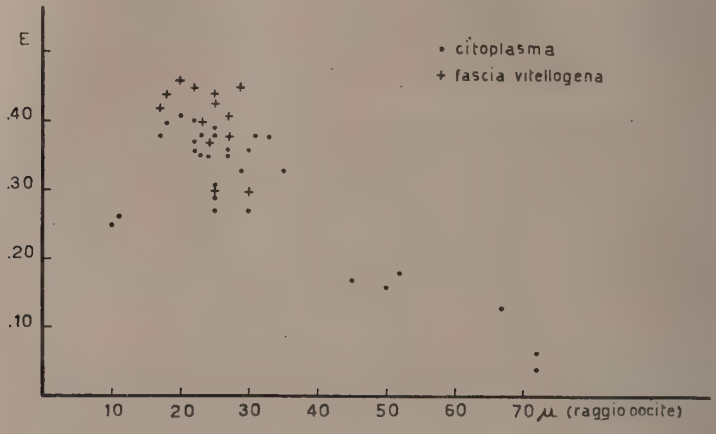


Fig. 1.

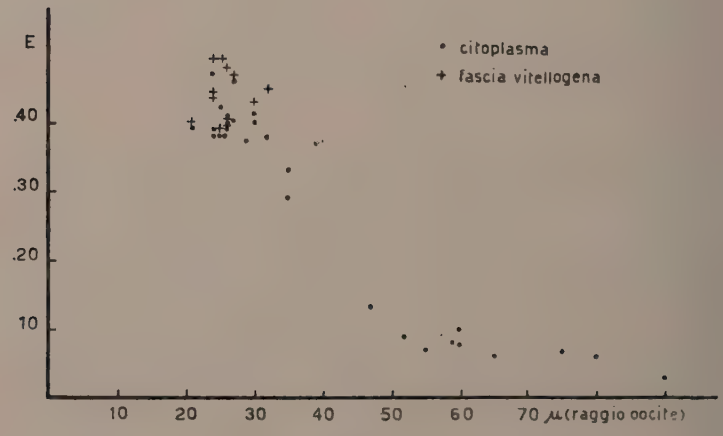


Fig. 2.

Le osservazioni che ho qui esposte hanno il valore di impostazione di un problema e necessitano pertanto di controlli eseguiti con altri coloranti preconizzati per lo studio degli acidi ribonucleici, onde poter vedere se i risultati siano, e in quale misura, concordanti con quelli ottenuti con l'impiego dell'azzurro A.

Biologia. — *La simmetria speculare in biologia con particolare riguardo agli arti soprannumerari indotti* (*). Nota di TEODORO PERRI, presentata (**) dal Socio G. COTRONEI.

Il Pasteur fu il primo a scoprire, nel 1848, gli isomeri ottici; sono forme che stanno tra loro come la mano destra alla sinistra e che quindi sono « uguali » ma non sono soprapponibili; si chiamarono successivamente forme enantiomorfe o antipodi ottici. Da notare che fu lo stesso Pasteur a scoprire che vari batteri che crescono in una soluzione di un composto racemico, si nutrono quasi sempre di una sola delle due forme enantiomorfe: è questa la prima osservazione sull'importanza dell'enantiomorfismo in biologia.

Due corpi si dicono adunque enantiomorfi quando sono l'uno come l'immagine speculare dell'altro e non sono tra loro sovrapponibili; l'enantiomorfismo riguarda solo i corpi che non hanno nessun piano e nessun centro di simmetria. Per averne un modello geometrico si pensi ai triedri « inversamente uguali »: essi sono l'uno il simmetrico dell'altro rispetto ad un piano di simmetria, e non esiste nessun movimento che porti alla sovrapposizione dell'uno sull'altro. Si noti che si usa comunemente l'espressione « simmetria speculare » in luogo di « enantiomorfismo ».

I problemi della simmetria hanno grande importanza, particolarmente in cristallografia e in biologia. Per l'importanza della simmetria in generale nel mondo dei viventi rinvio ai trattati del Bateson, del Thompson, del Cotronei. In questa Nota (1) desidero occuparmi di un particolare ed interessantissimo tipo di simmetria, cioè della simmetria speculare, della quale ho sopra ricordata la definizione.

La simmetria speculare, in alcuni casi, ha la sua base già nell'uovo non ancora fecondato; in altri insorge con la fecondazione e si stabilizza con la comparsa della semiluna grigia, come tipicamente è stato riscontrato in vari Anfibi: è stato comprovato da varie esperienze che si può provocare, per un tempo più o meno lungo, l'inversione della simmetria.

Di particolare interesse è l'enantiomorfismo nelle duplicazioni, parziali o totali, di un intero organismo. Separando, in modo completo o meno, i due primi blastomeri di un uovo regolativo, si hanno due individui (o due componenti se trattasi di duplicazione parziale) del tutto uguali. Invece seguendo la divisione in due ad uno stadio più avanzato (di blastula o di

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Anatomia comparata « G. B. Grassi » dell'Università di Roma.

(**) Nella seduta dell'11 aprile 1953.

(1) Il lavoro in esteso dal titolo *Leggi della simmetria speculare in biologia* è in corso di stampa in « Arch. Zoologico Italiano »; ad esso rinvio per la bibliografia e per l'esposizione analitica dei miei risultati.

gastrula) si osserva che mentre il componente proveniente dalla metà sinistra del germe conserva la normale asimmetria dei suoi visceri (cuore, apparato digerente ecc.) invece l'altro presenta *situs viscerum inversus* e vi è quindi simmetria speculare tra i visceri dei due componenti. Si è parlato di una predominanza di una metà del corpo sull'altra, che si instaura gradualmente. L'asimmetria dei visceri è, secondo lo Spemann, in rapporto con fattori che si trovano nel tetto dell'archenteron. È pure noto che una asimmetria dell'induttore porta ad una asimmetria dell'indotto.

Per spiegare la simmetria speculare si è ricorsi a varie ipotesi. Mi limito a ricordare una corrente di idee, di cui l'Harrison è il principale sostenitore, secondo la quale è l'ordinamento delle molecole che ha la massima parte nel determinare le simmetrie; come lo stesso ordinamento molecolare sarebbe la base del differenziamento. Secondo il Child è discutibile se l'orientamento molecolare possa occorrere senza l'influenza di fattori esterni alle molecole; egli pensa che sia invece conseguenza di un gradiente che involge le attività essenziali del protoplasma. Per il Child la simmetria speculare è riconducibile alla dominanza fisiologica di un lato del corpo sull'altro; similmente per gli arti egli ammette che uno di essi possa indurre sull'altro un differenziamento specularmente simmetrico. Si è pure insistito sull'esistenza di un gradiente destro–sinistro; di ipotetici agenti di asimmetria destra e sinistra.

Il Bateson (1894), osservando un gran numero di casi con appendici soprannumerarie, notò che queste (solitamente due) sono conformate l'una come l'immagine speculare dell'altra; e che l'appendice soprannumeraria più vicina alla normale è anche con questa in simmetria speculare. Il Della Valle, con il suo classico esperimento in tritone di rigenerazione triplice di un arto, diede la prima verifica sperimentale delle leggi del Bateson, le quali furono pure riconfermate dal Przibram e da numerosi altri autori.

Per la lateralità degli arti trapiantati, sono di particolare importanza le ricerche dell'Harrison e della sua scuola (Detwiler, Swett, Nicholas). Egli stabilì, sperimentando in *Amblystoma punctatum*, che nello stadio usato (bottone codale) l'abbozzo dell'arto ha già determinato stabilmente il suo asse antero–posteriore, mentre gli altri assi sono dall'embrione impressi all'abbozzo e solo in stadi più avanzati divengono anch'essi stabilmente determinati. Il risultato ch'egli ebbe è che nei trapianti di abbozzo di arto, se si rispetta inalterato l'asse antero–posteriore, si sviluppa un arto della stessa lateralità del lato del corpo sul quale giace (arto armonico ; invece se nel trapianto si inverte la direzione di questo asse, allora si ha un arto di lateralità opposta al lato del corpo sul quale giace (arto disarmonico).

L'Harrison osservò che l'arto trapiantato si duplica frequentemente, specie in alcune combinazioni; egli interpreta che costituitisi due centri di accrescimento (primo segno visibile della duplicazione) si abbia, con molta probabilità, una mutua influenza tra i due centri e conseguente inversione della lateralità in uno di essi, in quello ad esempio che ha un differenziamento meno avanzato. Di modo che nelle duplicazioni l'arto che direttamente si sviluppa dall'abbozzo trapiantato ha la sua lateralità in funzione della

posizione fatta assumere al suo asse antero–posteriore, mentre il 2° arto (nei casi di duplicazione), che sempre si sviluppa più tardivamente del primo, è di simmetria (ossia lateralità) opposta. Le duplicazioni nei trapianti di abbozzo di arto larvale negli Anuri, con enantiomorfismo dei due componenti, sono abbastanza frequenti (Braus, Graeper, ed altri).

Particolare interesse ha il comportamento degli arti soprannumerari da stimoli abnormi, perché la loro lateralità è in rapporto unicamente con le proprietà della zona di somatopleura che li forma, e quindi con le influenze che detta zona risente dalle parti circostanti. Il Balinsky osservò che gli arti soprannumerari da lui indotti mediante il trapianto di un'otocisti sul fianco di embrione di *Triton* erano, a parte alcune eccezioni specie per gli arti posteriori, di lateralità opposta al lato del corpo sul quale erano stati indotti (arti disarmonici). Come interpretazione egli aveva pensato dapprima che ciò fosse in rapporto con una inversione di polarità della somatopleura compresa tra gli arti; successivamente, in base ad altri risultati, pensò che la disarmonia degli arti fosse dovuta ad un diverso accrescimento di una delle due facce dell'abbozzo dell'arto indotto.

Degli arti soprannumerari da stimoli abnormi, negli Anfibi Anuri, me ne vado occupando da vari anni. La tecnica che mi ha permesso di ottenerne un gran numero di casi, soprattutto in *Bufo vulgaris*, consiste essenzialmente nel trapianto su embrione normale, nella regione ventrolaterale del tronco, della parte apicale della testa di embrioni röntgenirradiati con dosi nettamente letali. Il trapiantato, quale conseguenza della röntgenirradiazione, va gradualmente in necrosi, e i prodotti di citolisi che così man mano si liberano stimolano la somatopleura, la quale, per la sua competenza arto–formativa, produce uno o più arti soprannumerari. Questi sono abbastanza spesso ben conformati e tali da permettere il riconoscimento sicuro della loro lateralità. È opportuno aggiungere che da mie ricerche sulle fasi iniziali della formazione di questi arti soprannumerari unici o plurimi, è risultato che si possono realizzare varie condizioni. Si può avere l'induzione di una sola gemma soprannumeraria, oppure di due o più gemme sia nettamente separate sia fuse in vario grado, può aversi infine una gemma singola che si duplica o triplica.

Ecco, in compendio, i risultati che ho ottenuto, tenendo conto di tutti i casi, che sono 45, con ben chiara lateralità dell'autopodio.

Gli arti posteriori soprannumerari unici sono stati nell'84 % dei casi (16 su 19) di lateralità opposta al lato del corpo sul quale furono indotti (arti disarmonici). Gli arti soprannumerari anteriori unici sono ancora in piccolo numero, ma già mostrano un comportamento simile. Gli arti soprannumerari hanno presentato sovente duplicazioni parziali di vario grado oppure se ne sono avuti due costituenti vere e proprie coppie di arti: i due componenti di queste duplicità sono stati sempre – senza nessuna eccezione – in simmetria speculare tra di loro (14 casi su 14). Si noti che in altri casi, dei due componenti degli arti doppi, si è avuto un arto (quello più vicino al normale) ben differenziato e di ben riconoscibile lateralità, e l'altro arto ati-

pico: ciò non è in contraddizione con le leggi della specularità, in quanto trattasi di fattori che si sovrappongono ed inibiscono il pieno sviluppo di un arto. Sia nei 14 casi di arti duplici sopra menzionati, sia nei casi in cui si è sviluppato bene solo uno dei componenti della duplicazione, si è avuto nel 90 % dei casi (20 su 22) che il componente più vicino all'arto normale è in simmetria speculare rispetto a questo. Esemplificando, se siamo sul lato destro del corpo, si ha la seguente successione di arti: normale destro, soprannumerario sinistro, soprannumerario destro.

Passando ora all'interpretazione dei fatti, si noti anzitutto che le percentuali dei casi ottenuti sono così elevate da escludere ogni possibilità che si tratti di risultati casuali. E perciò la prima conclusione è che le leggi del Bateson sulla simmetria speculare sono tutte ed ampiamente verificate nelle mie particolari condizioni sperimentali.

Vediamo ora qual sia la genesi della lateralità degli arti soprannumerari indotti. Premetto che l'Harrison ebbe notevoli differenze nella frequenza delle duplicazioni di un abbozzo di arto a seconda della zona dove veniva trapiantato. Nei trapianti ortotopici le duplicità erano frequentissime nelle combinazioni disarmoniche e scarsissime nelle armoniche; invece nei trapianti etrotopici ottenne il contrario, cioè duplicazioni in scarsissimo numero nelle combinazioni disarmoniche e frequentissime nelle armoniche. Sia il Detwiler che lo Swett dimostrarono che i fattori che spingono alle duplicazioni sono presenti solo nella somatopleura, e riconfermarono i risultati sopradetti dell'Harrison. Sono tutte ricerche che mettono in evidenza un comportamento nettamente differenziale tra la somatopleura della zona normale degli arti e la somatopleura del rimanente del tronco. Si tenga inoltre presente la concezione che ho già ricordata sopra, che cioè una parte dell'organismo può influenzarne un'altra spingendola ad essere in simmetria speculare. Tenendo conto di questi fatti e soprattutto basandomi sui miei risultati, ritengo più che probabile che siano le zone degli arti normali a imprimere nella somatopleura interposta un eteropolarità.

Per la simmetria speculare tra i due componenti di una duplicazione parziale o tra i due arti di una stessa formazione soprannumeraria, simmetria che ho riscontrata nella totalità dei miei casi, è da ammettersi un'influenza di un componente sull'altro, l'uno che tende a fare assumere all'altro una lateralità opposta, onde la simmetria speculare tra le due parti. Questa reciproca influenza è ammessa da alcuni autori (Harrison, Child) ed è invece negata da altri: i casi che io ho avuto dimostrano nettamente la sua esistenza. Abbiamo visto inoltre che nelle duplicità parziali o totali, la parte più vicina all'arto normale è con questo in simmetria speculare; essa ha dunque lo stesso comportamento di un arto soprannumerario singolo. Ciò mostra chiaramente che nelle duplicità l'arto più vicino al normale è quello che imprime all'altro una lateralità opposta. Come ho sopra ricordato a proposito della genesi degli arti soprannumerari duplici, i due centri (siano tra loro indipendenti oppure insorgano da biforcazione di un'unica gemma) si formano contemporaneamente, e quindi la prevalenza dell'uno sull'altro

è da ricercarsi nella loro posizione, cioè nella loro distanza rispetto all'arto normale. E, d'altronde, se è quest'ultimo che imprime una eterolateralità alla somatopleura circostante, è da ammettere che questa energia vada diminuendo man mano che ci si allontana dall'arto normale. È pure da aggiungere che quando gli arti soprannumerari sono due, si ha, come regola, che meglio sviluppato è quello più vicino all'arto normale.

CONCLUSIONI. – Le leggi del Bateson sulla simmetria speculare, che risultano in tutte le loro parti ampiamente verificate nei miei casi di arti soprannumerari da stimoli abnormi, hanno, come loro genesi, una predominanza fisiologica delle zone normali degli arti sulla somatopleura vicina: predominanza che vi provoca una eteropolarità. Una zona normale di arto imprime all'arto soprannumerario indotto una lateralità opposta, dal che consegue la simmetria speculare tra l'arto normale ed il soprannumerario. Quando gli arti soprannumerari sono due (e lo stesso dicasi per i due componenti di una duplicazione parziale), si ha che l'arto soprannumerario che è più vicino al normale ne risente l'influenza e quindi assume lateralità opposta (è in simmetria speculare con il vicino normale); questo arto soprannumerario a sua volta predomina, appunto perché più vicino al normale, sull'altro arto soprannumerario imprimendogli una lateralità opposta alla sua, dal che consegue la simmetria speculare tra i due arti soprannumerari. Se vi sono tre arti soprannumerari, il terzo (chiamo terzo l'arto soprannumerario più distante dal normale) risente l'influenza del soprannumerario che gli sta più vicino ed assume la lateralità opposta. È questa l'interpretazione che è la più aderente ai fatti finora posti in evidenza.

COMUNICAZIONI VARIE

Il Presidente comunica che il Collega Perucca con lettera in data 20 marzo u. s. gli ha sottoposto uno schema di procedura per la designazione di terne di studiosi da proporre al Consiglio Nazionale delle Ricerche per i posti di professore comandato presso il predetto Consiglio per la ricerca scientifica. Da parte sua il Presidente del C.N.R. prof. Colonnetti, con lettera in data 9 corrente, ha manifestato la sua piena adesione alle proposte del Collega Perucca.

Dopo tale premessa, il Presidente invita il Socio Perucca ad illustrare alla Classe le sopracitate proposte.

Il prof. Perucca osserva che il compito dell'Accademia per la designazione di quegli studiosi ai quali il C.N.R. affida in Italia il nuovo, elevatissimo incarico di professore di ricerca ha un alto significato, certamente paragonabile a quello della designazione per il conferimento dei maggiori premi scientifici dell'Accademia. Sembra pertanto al Socio Perucca che le norme per la nomina di una Commissione incaricata di proporre le terne

da designare al C.N.R. possano ispirarsi, per analogia, a quelle stabilite per la nomina delle Commissioni giudicatrici dei Premi Nazionali e, in particolare, della Commissione per il Premio Nazionale di Categoria. Pertanto, considerato che il C.N.R. segnala le discipline per le quali si devono designare terne, egli ritiene che la Commissione incaricata di proporre le designazioni possa essere composta di cinque membri, cioè dal Presidente della Classe, Presidente della Commissione, e da altri 4 membri scelti dalla Classe con particolare riguardo alle competenze più opportune.

Le proposte della Commissione dovranno essere portate quindi all'esame e all'approvazione della Classe alla quale spetta la decisione definitiva.

Il Presidente ringrazia il Collega Perucca e chiede se vi siano osservazioni o altre proposte da parte dei Soci.

Il Socio Cotronei osserva che è opportuno precisare se il C.N.R. indichi, per la designazione di ciascuna terna, una disciplina o un argomento determinato di una data disciplina perché, in questo secondo caso, sembra che il compito affidato all'Accademia verrebbe a perdere gran parte del suo significato, trattandosi di designazioni concernenti un campo molto ristretto, per il quale la possibilità di scelta è necessariamente limitata a pochissimi nomi.

Il Presidente ritiene opportuno scindere la questione nei due seguenti argomenti e di sottoporli al voto della Classe:

a) approvazione della procedura proposta dal Collega Perucca;

b) opportunità di richiedere al C.N.R. di segnalare, ai fini delle terne, discipline e non determinati argomenti di date discipline.

Poiché la Classe si pronuncia favorevolmente su entrambi i punti sopra indicati, il Presidente ne prende atto e assicura che darà comunicazione in tal senso al C.N.R.

Il Presidente chiede se la Commissione composta dai Soci Crocco, Pistolesi e De Marchi, incaricata di esaminare la proposta dell'Associazione elettrotecnica italiana circa il riconoscimento internazionale del nome di « Numero di Allievi » alla costante ϱ definita dall'Allievi e posta a base dei suoi calcoli, possa riferire in merito nell'odierna seduta.

Il Socio Crocco, che è l'unico membro della Commissione presente alla adunanza, risponde negativamente e il Presidente rimanda pertanto la questione ad una prossima seduta, pregando il Collega Perucca, che si recherà a Milano, di ricordare la cosa al prof. De Marchi.

Il prof. Giordani presenta il fascicolo 2 dei Rendiconti della Classe (febbraio 1953).

PRESENTAZIONE DI LIBRI

Il Socio Carobbi offre in omaggio i volumi IV, V, VI, VII e VIII dei « Rendiconti della Società Mineralogica Italiana » che contengono gli Atti del 4° Congresso della predetta Società (Genova 25-27 settembre 1947), del 5° (Milano 1-3 ottobre 1948), del 6° (Catania 21-24 ottobre 1949),

del 7° (Miniera di Raibl–Cave del Predil 18–21 settembre 1950) e dell'8° (Padova–Trieste 24–28 settembre 1951).

Il Socio Carobbi, dopo aver ricordato che i sopra citati Congressi sono stati presieduti dai Colleghi Panichi e Bianchi, comunica che è in corso di stampa il volume IX dei « Rendiconti » che contiene gli Atti del Congresso di Firenze del quale egli è stato Presidente.

Il Socio Pensa offre in omaggio e illustra un gruppo di lavori del prof. Adelchi Negri, con le seguenti parole:

« È con compiacimento che ho l'onore di offrire in omaggio all'Accademia il gruppo di lavori che or son cinquant'anni un valoroso giovane patologo italiano condusse a compimento e coi quali egli pose con mano sicura una pietra miliare nella storia di uno dei problemi più gravi e difficili di epidemiologia, quello della istopatologia ed eziologia della rabbia. È per desiderio espressomi dalla vedova di Lui, di ADELCHI NEGRI, che fu anche sua collaboratrice che io presento all'Accademia questo documentario che è prezioso, ma breve, perché pur troppo breve fu la vita dell'autore.

In cinquant'anni la scoperta dei corpi del Negri nelle cellule nervose degli animali e dell'uomo colpiti da rabbia canina è stata ed è tuttora discussa, non nell'essenza che rimane quella che fu rivelata dal Negri, ma per il significato.

« La primitiva interpretazione che i corpi del Negri fossero per loro stessi l'agente patogeno e precisamente uno sporozoo, andò modificandosi con l'affermarsi della concezione che l'agente sia un *virus* filtrabile ultramicroscopico e il problema si è spostato nel senso di stabilire se il *virus* è piuttosto legato alle formazioni viste per la prima volta dal Negri oppure da una reazione oscura delle cellule nervose all'agente patogeno. Rimane tuttavia il grande merito al Negri di aver per il primo segnalato e descritto con grande chiarezza e molteplicità di particolari un fatto assolutamente nuovo di istopatologia del sistema nervoso in rapporto con la rabbia e di aver resa possibile la diagnosi immediata di rabbia con l'esame di alcune parti del cervello di animali sospetti di essere affetti dal morbo, imponendo così la necessità di una sollecita cura antirabica o sollevando dal terrore di essere stato contagiato chi eventualmente fosse stato morsicato da animale sospetto.

« Ricordare Adelchi Negri qui, dove cinquant'anni or sono, presentato da due eminenti scienziati quali furono il Golgi ed il Grassi, col consenso del Marchiafava, del Dionisi e di altri sommi, esponeva il risultato delle sue ricerche, mi è parso doveroso e di conforto personale per me che gli fui legato di fraterna amicizia ».

Il Socio Boaga offre in omaggio due sue pubblicazioni: la « Bibliografia Geodetica Italiana » (anno 1951) e « La Fotogrammetria in Italia – Rapporto al VII Congresso Internazionale di Fotogrammetria – Washington 1952 ».

Il Presidente ringrazia i Soci Carobbi, Pensa e Boaga.

Il Segretario accademico presenta le opere inviate in omaggio all'Accademia, mettendo in particolare evidenza il « Trattato di Farmacognosia »

di Serafino Dezani ed Ettore Guidetti, un volume dell'Istituto Forestale Finnico, edito in onore del prof. Olli Heikinheimo nel suo settantesimo anniversario, il volume I di « Erboristeria pedemontana » di Luigi Pomini e uno studio di Antonio Tizzano su: « Il problema medico sociale della sopravvivenza e della senescenza ».

PRESENTAZIONE DI NOTE E MEMORIE

Presentano Note per la pubblicazione nei Rendiconti i Soci Perucca (a nome del Collega Ascoli), Sergi, Cotronei, Picone, Semerano e Puntoni.

Viene letto l'elenco delle Note pervenuto alla Cancelleria.

Le seguenti Note saranno pubblicate in fascicoli successivi:

SERGI S. – I profaneantropi di Swanscombe e di Fontechevade.

DOLLFUS R. Ph. – Sulla forma adulta di un Echinostomide (*Trematoda*: Digenea) ottenuta esperimentalmente nel ratto bianco di laboratorio (pres. dal Corrisp. V. PUNTONI).

HORNICH H. – Risolubilità di generali equazioni lineari a derivate parziali mediante serie di potenze (pres. dal Socio M. PICONE).

RELAZIONI DI COMMISSIONI

Il Socio Abetti, anche a nome del Collega Silva, legge la relazione sulla Memoria di M. G. Fracastoro dal titolo: « La corona solare del 25 febbraio 1952 ».

Detta relazione, che conclude proponendo la stampa del citato lavoro nelle Memorie accademiche, viene messa ai voti e approvata dalla Classe con le solite riserve di carattere finanziario.

PLICHI SUGGELLATI

Il Socio De Blasi, anche a nome del Collega Vernoni, legge la relazione sul contenuto del plico suggellato del prof. Guido Finzi, presentato nella seduta di Classe del 10 gennaio c. a. e aperto, su richiesta dell'interessato, nella seduta del 14 febbraio.

Tale relazione attesta che il prof. Guido Finzi ha presentato, nel plico suggellato sopra ricordato, uno studio dal titolo: « Natura e meccanismo della reazione alla tubercolina. Immunità antitossica e tubercolosi », illustrando una sua interpretazione della natura della reazione alla tubercolina.

La Classe prende atto della relazione che sarà conservata nell'archivio accademico unitamente al predetto studio.

Il Presidente presenta quindi un plico suggellato del dott. Aurelio Romeo, consegnato all'Accademia in data odierna dal Socio Bargellini.

La Classe, constatata l'integrità dei sigilli, delibera che il plico di cui trattasi sia conservato nell'archivio accademico a disposizione dell'interessato.

PREMI IN CORSO DI ASSEGNAZIONE PRESSO L'ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

ELENCO DEI CONCORRENTI

CLASSE DI *SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI*
ELENCO DEI CONCORRENTI AL PREMIO NAZIONALE GENERALE

(Scadenza 31 dicembre 1952 – Premio lire 1.000.000).

1. Dott. Ing. GIUSEPPE BOFFA. — 1. « Le " quantizzazioni " come legge di natura » (5 cop.). — 2. « Termodinamica " alcune trasformazioni dei sistemi binati " » (5 cop. dats.). — 3. « Termodinamica " Trasformazioni ad entropia variabile " ». — 4. Cinque copie fotografiche brevetto n. 325.401 e 4 copie brevetto 397.490 ».

2. ACHILLE CORNACCHIA. — « Era atomica » (5 cop. dats.).

3. Prof. VITTORIO ERSPAMER. — 1. « Biological Activity of some Enteramine-related Substances » (5 cop.). — 2. « Modificazioni delle azioni dell'enteramina ad opera di farmaci simpaticomimetici e di farmaci simpaticolitici » (5 cop.). — 3. « Ricerche preliminari sulle indolalchilamine e sulle fenilalchilamine degli estratti di pelle di anfibio » (5 cop.). — 4. « Identification of Enteramine the Specific Hormone of the entero-chromaffin Cell System, as 5-Hydroxytryptamine » (5 cop.). — 5. « Antidiuretic Action of Pure Synthetic Enteramine in Hydrated Rats » (5 cop.). — 6. « Wirksame Stoffe der hinteren Speicheldrüsen der Octopoden und der Hypobranchialdrüse deu Purpurschnecken » (5 cop.). — 7. « Antidiuretic Action of Small Doses of Enteramine in the Rat » (5 cop.). — 8. « Enteramina e 5-metrossitiptamina – Tossicità. Azione sulla diuresi, sulla pressione del sangue e su alcuni organi a muscolatura liscia » (5 cop.). — 9. « Synthese des Enteramins (5-Oxy-tryptamin » (3 cop.). — 10. « Antidiuretic Action of Small Doses of Enteramine Extracts in the Rat » (4 cop.). — 11. « The Action of Enteramine on the Heart of Molluscs » (5 cop.). — 12. « L'enteramina, prodotto ormonale specifico del sistema enterocromaffine » (3 cop.). — 13. « Identification and characterization, by paper chromatography, of enteramine, octopamine, tyramine, histamine and allied substance in extracts of posterior salivary glands of octopoda and on other tissue extracts of vertebrates and invertebrates » (1 cop.). — 14. « Presence of Enteramine in the Skin of Amphibia » (5 cop.). — 15. « Substances oh a Phenolic and Indolic Nature Present in Acetone Extracts of the Posterior Salivary Glands of Octopoda » (5 cop.). — 16. « Preliminary Researches on the Mechanism of the Antidiuretic Action of Enteramine » (5 cop.). — 17. « Antidiuretic Action of Enteramine » (5 cop.). — 18. « Identification of Enteramine and Enteramine-Related Substances in Extracts of Posterior Salivary Glands of *Octopus vulgaris* by Paper Chromatography » (5 cop.). — 19. « Active Substances in the Posterior Salivary Glands of Octopoda » (5 cop.). — 20. « Presenza di un principio antidiuretico nelle ghiandole salivari posteriori degli Octopodi » (5 cop.). — 21. « Ricerche chimiche e farmacologiche sugli estratti di ghiandola ipobranchiale di *Murex Trunculus*, *Murex Brandaris* e *Tritonalia Erinacea*. – IV. Presenza negli estratti di enteramina o di una sostanza enteraminisimile » (5 cop.). — 22. « Idem – II. Reazioni chimiche colorate degli estratti » (5 cop.). — 23. « Ricerche farmacologiche sull'enteramina. – VII. Enteramina e indolalchilamine del veleno del rospo » (5 cop.). — 24. « Idem. – I. Bufotenina e Bufotenidina » (5. cop.). — 25. « Presenza di enteramina o di una sostanza enteraminosomile negli estratti gastrointestinali e splenici dei pesci e negli estratti gastroenterici delle *Ascidie* » (5 cop.). — 26. « Pharmakologische Studien Über Ente-

ramin. — VI. Mitteilung: Weitere Untersuchungen über die Inaktivierung von Enteramin durch tierisches Gewebe » (5 cop.). — 27. « Über den Enteramingehalt der menschlichen Milz in normalen und pathologischen Zuständen » (5 cop.). — 28. « Pharmakologische Studien über Enteramin – Über aktives (A–Enteramin) und inaktives Enteramin (I–Enteramin) und über Aktivierung von I–Enteramin » (5 cop.). — 29. « Pharmacologische Studien über Enteramin — IV. Mitteilung: Über die Inaktivierung von Enteramin durch tierisches Gewebe » (5 cop.). — 30. « Sulle reazioni chimiche colorate dell'enteramina – Nota II: Presenza di sostanze enteraminosimili al di fuori della mucosa gastro–intestinale » (5 cop.). — 31. « Idem. – Nota I: Ricerche su estratti acetonici di mucosa gastro–intestinale » (5 cop.). — 32. « Attuali aspetti farmacologici delle sostanze attive tessutali » (5 cop.). — 33. « Pharmakologische Studien über Enteramin. – III. Mitteilung: Über das Vorhandensein eines enteramin–ähnlichen Stoffes in Milzextrakten » (5 cop.). — 34. « Idem – II. Mitteilung: Über einige Eigenschafaten des Enteramins, sowie über die Abgrenzung des Enteramins von den anderen kreislaufwirksamen Gewebsprodukten » (5 cop.). — 35. « Idem – I. Mitteilung: Über die Wirkung von Acetonextrakten der Kaninchenmagenschleimhaut auf den Blutdruck und auf isolierte überlebende Organe » (5 cop.). — 36. « Sulla presenza di una sostanza enteraminosimile negli estratti acetonici di milza » (5 cop.). — 37. « Caratterizzazione biologica di una nuova amina di– o polifenolica negli estratti acetonici di ghiandola salivare posteriore di *Octopus vulgaris* » (5 cop.). — 38. « Ricerche di caratterizzazione chimica delle sostanze fenoliche presenti negli estratti acetonici di ghiandole salivari posteriori di *Octopus vulgaris* » (5 cop.). — 39. « Zeitschrift für Zellforschung und mikroskopische Anatomie » (5 cop.). — 40. « Zeitschrift für anatomie u. Entwicklungsgeschichte » (5 cop.). — 41. « Ricerche sulla diazoreazione. Nota III. – Significato e limiti della modificazione proposta da Hanke e Koessler per la determinazione quantitativa della tirosina e della tiramina » (5 cop.). — 42. « Idem – Nota II. Limiti e significato della modificazione di Gebauer–Fulnegg alla diazoreazione di Pauly » (4 cop.). — 43. « Idem. – Nota I. Introduzione, diazoreazione in ambiente acido, in ambiente alcalino e in ambiente alcalino con successiva acidificazione » (5 cop.). — 44. « Ricerche istochimiche sulla ghiandola salivare posteriore di *Octopus vulgaris* » (5 cop.). — 45. « Caratteristiche delle cellule enterocromaffini tipiche e delle cellule preenterocromaffini argentofile » (5 cop.). — 46. « Ricerche sul secreto specifico delle cellule enterocromaffini » (5 cop.). — 47. « Sulla presenza di cellule argentofile (preentorocromaffini) nelle vie biliari dell'uomo e di alcuni mammiferi » (5 cop.). — 48. « Ricerche sul secreto delle cellule enterocromaffini. VII » (5 cop.). — 49. « Cellule enterocromaffini e cellule argentofile nel pancreas dell'uomo e dei mammiferi » (5 cop.) — 50. « Ricerche sul secreto delle cellule enterocromaffini – Nota IX. – Intorno alla natura chimica della sostanza specifica » (5 cop.). — 51. « Ricerche sperimentali sul significato biologico delle cellule enterocromaffini » (5 cop.). — 52. « Contributo alla migliore conoscenza istochimica delle cellule enterocromaffini » (5 cop.). — 53. « Die enterochromaffinen Zellen der Gallenwege in normalen und pathologischen Zuständen (Nach Untersuchungen beim Menschen und bei Säugetieren) » (5 cop.). — 54. « Ricerche preliminari sulla moschatina » (5 cop.). — 55. « Papierchromatographische Untersuchungen über die Hydroxyphenylalkylamine der Gerstenkeimlinge » (5 cop.). — 56. « Synthese des Murexins (β–[(Imidazolyl 4 (5)]–acryl–cholin) » (5 cop.). — 57. « Osservazioni preliminari, chimiche e farmacologiche, sulla murexina » (5 cop.). — 58. « Ricerche chimiche e farmacologiche sugli estratti di ghiandola ipobranchiale di *Murex* e *Trunculus*, *Murex Brandaris* e *Tritonalia Erinacea* – III. Presenza negli estratti di un nuovo derivato della colina o di una colina omologa: la murexina » (5 cop.). — 59. « Identification of Octopamine as I–p–Hydroxyphenylethanolamine » (5 cop.). — 60. « Active Substances in the Posterior Salivary Glands of Octopoda – II. Tyramine and Octopamine (Oxyoctopamine) » (5 cop.). — 61. « Azione adrenalinosimile degli estratti di ghiandola salivare posteriore di *Octopus vulgaris* irradiati con luce ultravioletta » (5 cop.). — 62. Ricerche chimiche e farmacologiche sugli estratti di ghiandola ipobranchiale di *Murex* (*Truncularia*) *trunculus* (L.) *Murex* (*Bolinus*) *brandaris* (L.) e *Tritonalia erinacea* (L.). – I. Distribuzione e caratteristiche della purpurasi e delle purpurine » (5 cop.). — 63. « Istamina » " condizionatore positivo " dell'azione purgativa di alcuni drastici » (5 cop.). —

64. « Sul possibile condizionamento Istaminico dell'azione purgativa di alcuni drastici » (5 cop.). — 65. « Über die Erzeugung von Gallensteinen durch Vitamin A – Mangel beim Meerschweinchen » (5 cop.). — 66. « Sulla influenza delle vitamine A, B_1, B_2, E PP sul quadro morfologico dell'assorbimento intestinale dei lipidi » (3 cop.). — 67. « Acetilcolina e Vitamina B_1 – Nota IV. Sul contenuto di acetilcolina dell'encefalo, del cuore e dell'intestino dei colombi normali ed in avitaminosi B. ». (5 cop.). — 68. « La titolazione farmacologica dei cardiocinetici nei colombi avitaminizzati ed ipervitaminizzati « (5 cop.). — 69. « Influenza della Vitamina B_1 sull'azione della pilocarpina, eserina, arecolina, istamina ed acido adenilico » (5 cop.). — 70. « Acetilcolina e Vitamina B_1 – Nota III. Azione delle iniezioni endovenose e sottocutanee di Vitamina B_1 sull'intossicazione da acetilcolina nel ratto » (5 cop.). — 71. « Idem – Nota II. Ricerche in piccioni normali, in avitaminosi B_1 ed in ipervitaminismo B_1 » (5 cop.). — 72. « Idem – Nota I. Ricerche sugli organi isolati, sulla pressione del sangue e sulla pupilla dell'occhio di coniglio *in situ* » (5 cop.). — 73. « Sui rapporti tra acetilcolina e vitamina B_1 » (5 cop.). — 74. « Ricerche morfologiche ed istochimiche sui lipidi delle vie biliari nei Mammiferi » (5 cop.). — 75. « Ricerche morfologiche ed istochimiche sui lipidi nelle vie biliari degli Uccelli » (5 cop.). — 76. « Ricerche morfologiche ed istochimiche sui lipidi nelle vie biliari dei Rettili » (5 cop.). — 77. « Ricerche sulle droghe purgative nostrane – II. Ecballium Elaterium L. » (5 cop.). — 78. « Ricerche sulle droghe purgative nostrane. – III. Brionia Dioica Jacq. » (5 cop.). — 79. « Ricerche sulle droghe purgative nostrane – I. *Convolvulus Sepium* L. – *Convolvulus Arvensis* L. e *Convolvulus Soldanella* L. ». (5 cop.). — 80. « Ricerche Farmacologiche sul *Leonurus cardiaca* L. (e sul *Leonurus Marrubiastrum* L.) » (5 cop.). — 81. « Droghe e principî ipoglicemizzanti di origine vegetale » (5 cop.). — 82. « Modificazioni delle azioni dell'enteramina ad opera degli agenti antiistaminici » (5 cop.). — 83. « Observation on Alleged Serotonin – (Enteramine) – Like Nature of Cerebral Pressor Substance of Taylor, Page, and Corcoran » (5 cop.).

(Comune al Premio Nazionale di Categoria, Fisiologia e Patologia n. 2).

4. Prof. FABIO FERRARI. — 1. « In tema di supercementi ». — 2. « Über gipshaltige Puzzolanzemente ». — 3. « Brownmillerit – Zement ». — 4. « Cementi pozzolanici ». — 5. « Supercemento d'uso generale ». — 6. « Universal – Portlandzemente ». — 7. « Dei cementi Ferrari ». — 8. « Cemento Ferrari ». — 9. « Ciments ferreux et ferreux pouzzolaniques vis-à-vis des eaux agressives ». — 10. « Il cemento Ferrari e l'attuale orientamento delle industrie dei leganti idraulici ». — 11. « Il cemento Ferrari di ridotta basicità e l'autarchia ». — 12. « Über Ferrari – Zement ». — 13. « Le ciment Ferrari ». — 14. « Zur Kenntnis des Ferrari Zementes » (4 cop.). — 15. « Sulle ragioni dell'alta resistenza chimica dei cementi Ferrari ». — 16. « Sulla determinazione rapida della silice del cemento idraulico o dei silicati decomponibili dagli acidi ». — 17. « Sul tufo del Monferrato » (4 cop.). — 18. « Per il progresso delle industrie del cemento » (1 cop.). — 19. « Nel divenire del cemento idraulico ». — 20. « Sulla costituzione dei leganti idraulici in rapporto al ritiro e al calore d'idratazione » (3 cop.). — 21. « De leganti idraulici per la Ricostruzione » (3 cop.). — 22. « Agglomerati per la Ricostruzione » (1 cop.). — 23. « Note au sujet des essais préalade cuisson dans l'industrie du ciment » (1 cop.). — 24. « Leganti pozzolanici ». — 25. « Agglomerati pozzolanici e cementizi » (4 cop.). — 26. « Per l'impiego razionale dei cementi idraulici ». — 27. « Sul problema della casa in Italia ». — 28. « Sui cementi misuratamente espansivi ». — 29. « Analisi rapida dei leganti idraulici unitari ». — 30. « Cementi ipocalcici ». — 31. « Leganti idraulici di razionale impiego per la costruzione di opere idroviarie e marittime ». — 32. « Attitudine alla cottura, finezza di macinazione ed omogeneità dei crudi da cemento calcico ». — 33. Sulla resistenza chimica dei cementi ferrici (tipo Ferrari) e dei relativi pozzolanici ». — 34. « Sul processo di fabbricazione dei cementi ferrici (tipo Ferrari) ». — 35. « Miscele a base di pozzolana e di calce ». — 36. « Chiarimenti in tema di cementi ferrici e pozzolanici. — 37. « Sull'urgenza di generalizzare la razionalità di fabbricazione dei cementi ». — 38. « Ciments à basicité réduite ». — 39. « Per la razionale scorificazione del clinker di cemento idraulico ». — 40. « Sull'impiego dei cementi nelle opere destinate all'aperto ». — 41. « Silicato bicalcico e cemento pozzolanico ». — 42. « Refrattari e clincherizzazione » (tutto in 5 copie). — 43. « Le ciment le plus rationnel » (1 cop. dats.).

5. Avv. Romolo Gambini. — « Fenomeni ed esperimenti radio-bio-magnetici-terapeutici e metapsisichici ».

6. Prof. Pietro Mascherpa. — « Ricerche Sperimentali » (voll. I-IX), 1 copia di ciascuno. « Scritti vari » (voll. I e II), 1 copia di ciascuno. « Tossicologia », 1 copia. « Trattato di Farmacologia e Farmacognosia », 1 copia. « 25 anni di attività scientifica », 8 copie.

7. Dott. Enrico Masera. — 1. « La lotta biologica agli insetti dannosi con l'impiego di miceti patogeni » (cop. 5). — 2. « Osservazioni sull'infezione da " Nosema bombycis Naegeli " nel " Bombyx mori L. " » (cop. 5). — 3. « La " Beauveria globulifera (Speg.) Picard " parassina del " Bombyx mori L. " » (cop. 5). — 4. « Ad un secolo di distanza dalla nascita della Scienza delle malattie infettive » (cop. 5). — 5. « Comportamento del " Bombyx mori L. " all'infezione sperimentale del " Bacterium prodigiosum L. et N. " » (cop. 5). — 6. « Contributo allo studio della virulenza e patogenicità di alcuni entomomiceti » (cop. 5). — 7. « L'andamento della concentrazione idrogenionica nei terreni di coltura durante lo sviluppo di miceti » (cop. 5). — 8. « Le malattie infettive degli insetti e loro indice bibliografico » (cop. 5). — 9. « I germogli di gelso in relazione alla poliedria del baco da seta » (cop. 5). — 10. « Prove sperimentali dell'azione patogena di alcuni entomofiti sul " Bombyx Mori L. " » (cop. 5). — 11. « Un primato della nostra Scienza: Gaetano Cantoni e Luigi Pasteur » (cop. 5). — 12. « Action pathogéne de bactéries et de champignons entomophytes sur le " Bombyx mori L. " » (cop. 5). — 13. « Artropodi dannosi al " Bombyx mori L. " ed alla seta » (cop. 5). — 14. « Azione della canfora sulle uova di " Bombyx mori L. " » (cop. 1). — 15. « Sulla " fersa " e " batteriosi " del gelso » (cop. 5). — 16. « Malattie dei bozzoli » (cop. 5). — 17. « L'assenzio in bachicoltura » (cop. 5). — 18. « Influence du mâle infecté de " Nosema bombycis Naegeli ", pour le transmission de la pébrine du " Bombyx mori L. " (Note préventive) » (cop. 1). — 19. « Observations sur la naissance de larves infectes des oeufs des papillons de " Bombyx mori L. " affectés de pébrine (Note préventive) » (cop. 5). — 20. « Maladies des cocons (Note préventive) » (cop. 5). — 21. « L'absinthe en sériculture (Note préventive) » (cop. 5). — 22. « La concentrazione idrogenionica del succo dell'uovo di " Bombyx mori L. " durante la diapausa e l'incubazione » (cop. 5). — 23. « Recenti ricerche sulla pebrina del baco da seta » (cop. 5). — 24. « Répartition des oeufs infectes dans le pontes de papillons pebrinés de " Bombyx mori L. " (Note préliminaire) » (copie 5). — 25. « Osservazioni sulla nascita di larve infette da ovature di farfalle di " Bombyx mori L. " ammalate di pebrina » (cop. 5). — 26. « Influenza del maschio infetto da " Nosema bombycis Naegeli " nella trasmissione della pebrina ereditaria » (cop. 5). — 27. « Azione biologica di metalli sulle uova di " Bombyx mori L. " infette di pebrina (Nota preliminare) » (cop. 5). — 28. « Fersa del gelso e trattamenti cuprici » (cop. 5). — 29. « Action biologique des métaux sur les oeufs de " Bombyx mori L. " sains et infectés par la pébrine (Note préliminaire) ». — 30. « Difendiamoci dal calcino » (cop. 5). — 31. « Influenza della temperatura e dei R. U. V. sulla vitalità e virulenza delle spore di Beauveria Bassiana (Bals.) Vuill. » (cop. 1). — 32. « Sul contenuto batterico delle uova degli insetti " Bombyx mori L. " » (cop. 5). — 33. « Per i Bachicoltori » (cop. 5) . — 34. « Autres hotês du " Nosema bombycis Naegeli " (Note préliminaire) » (cop. 5.) — 35. « Action de l'ozonc sur la vitalité et la virulence des spores de " Beauveria Bassiana " (Bals) Vuill. » (cop. 5). — 36. « Ricerca di sorgenti di infezione pebrinosa in allevamenti provenienti da " seme " sano » (cop. 5). — 37. « Minorata produzione di bozzoli determinata dal calcino » (cop. 5). — 38. « Miceti patogeni al " Bombyx mori L. " » (cop. 5). — 39. « Comportamento delle uova d'insetti all'azione dei vapori di mercurio " Bombyx mori L. " " Phylosamia Cynthia Dr. " » (cop. 5). — 40. « La lotta contro il calcino » (cop. 5). — 41. « Gli anticalcinici in bachicoltura » (cop. 5). — 42. « Il pollame e la diffusione del calcino » (cop. 5). — 43. « La lotta contro il calcino » (cop. 5). — 44. « Dopo ottanta anni di selezione. – Ritorno alla pebrina ? » (cop. 5). — 45. « Ricerche sulla Poliedria del " Bombyx mori L. " » (cop. 1). — 46. « Comportamento delle uova di " Bombyx mori L. " al calore e tentativo di selezione del " seme-bachi " infetto di pebrina " » (cop. 5). — 47. « Rapport LVII – Le malattie del baco da seta in Italia sulle malattie del " Bombyx mori L. "» (cop. 5). — 48. « Rapporto LVIII – Rapporti fra " Apanteles Glomeratus Reinh. " » e " Pieris Brassicae L. "

infette di pebrina » (cop. 5). — 49. Un nuovo Annibale alle porte della sericoltura? » (cop. 5). — 50. « Grande storia di un piccolo insetto: Il baco da seta » (cop. 5). — 51. « Doppi accoppiamenti nelle farfalle di " Bombyx mori L. " » (5 cop.). — 52. « Su una modalità pressoché ignorata di diffusione interna del calcino " » (5 cop.). — 53. « Le origini della sericoltura veneta » (5 cop.).

8. GIOVANNI RICCI. — « La relatività tramonta. Gravitazione: mistero svelato. Spazismo ».

9. Ing. PASQUALE TROJA. — 1. « Sul triangolo isoscele – Teorema e sua applicazione » (4 cop. ms.). — 2. « Nuovi metodi per il calcolo della circonferenza e dell'area del circolo, e della superficie e volume di alcuni solidi » (4. cop. ms.). — 3. « Sui poligoni regolari nuovi metodi per il calcolo dell'area e dell'apotema » (4 cop. ms.).

10. Prof. MASSIMO VANNI. — 1. « Le curvature delle ipercurve » (4 cop. ms.). — 2. « I teoremi di Pitagora e di Carnot estesi allo spazio. Il teorema di Pitagora nello spazio quadridimensionale » (4 cop. ms.). — 3. « Costruzione grafica del punto probabile secondo il metodo dei minimi quadrati con " n " rette disposizione di pesi differenti » (4 cop. ms.). 4. « Determinazione della latitudine degli intervalli siderei fra i passaggi di stelle fisse per verticali ignoti, indipendentemente da eventuali piccole inesattezze non trascurabili nelle coordinate urano grafiche delle stelle osservate » (4 cop. ms.) — 5. « Osservazione dei tempi dei passagi di coppie di stelle attraverso verticali ignoti per determinare la posizione dell'osservatore a terra e in navigazione » (4 cop. ms.). — 6. « Sulla teoria della rifrazione astronomica » (4 cop.). — 7. « Le possibilità teoriche delle determinazioni del punto nave astronomico senza l'orizzonte marino » (1 cop.). — 8. « La goniometria negli iperspazi. I teoremi di Pitagora e di Carnot negli iperspazi » (4 cop. ms.).

11. ORSOLA CAMPERO. — « Manoscritti ».

CLASSE DI *SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI*
ELENCO DEI CONCORRENTI AL PREMIO NAZIONALE DI CATEGORIA (*FISIOLOGIA E PATOLOGIA*).

(Scadenza 31 dicembre 1952 – Premio di lire 1.000.000).

1. Prof. BEPPE BIANCO. — « Esperienze e concetti originali di fisiologia dell'uomo » I, II, III quaderno (5 cop.).

2. Prof. VITTORIO ERSPAMER. — 1. « Biological Activity of some Enteramine-related Substances » (5 cop.). — 2. « Modificazioni delle azioni dell'enteramina ad opera di farmaci simpaticomimetici e di farmaci simpaticolitici » (5 cop.). — 3. « Ricerche preliminari sulle indolalchilamine e sulle fenilalchilamine degli estratti di pelle di anfibio » (5 cop.). — 4. « Identification of Enteramine the Specific Hormone of the entero-chromaffin Cell System, as 5-Hydroxytryptamine » (5 cop.). — 5. « Antidiuretic Action of Pure Synthetic Enteramine in Hydrated Rats » (5 cop.). — 6. « Wirksame Stoffe der hinteren Speicheldrüsen der Octopoden und der Hypobranchialdrüse deu Purpurschnecken » (5 cop.). — 7. « Antidiuretic Action of Small Doses of Enteramine in the Rat » (5 cop.). — 8. « Enteramina e 5-metrossitiptamina – Tossicità. Azione sulla diuresi, sulla pressione del sangue e su alcuni organi a muscolatura liscia » (5 cop.). — 9. « Synthese des Enteramins (5-Oxy-tryptamin » (3 cop.). — 10. « Antidiuretic Action of Small Doses of Enteramine Extracts in the Rat » (4 cop.). — 11. « The Action of Enteramine on the Heart of Molluscs » (5 cop.). — 12. « L'enteramina, prodotto ormonale specifico del sistema enterocromaffine » (3 cop.). — 13. « Identification and characterization, by paper chromatography, of enteramine, octopamine, tyramine, histamine and allied substance in extracts of posterior salivary glands of octopoda and on other tissue extracts of vertebrates and invertebrates » (1 cop.). — 14. « Presence of Enteramine in the Skin of Amphibia » (5 cop.). — 15. « Substances oh a Phenolic and Indolic Nature Present in Acetone Extracts of the Posterior Sali-

vary Glands of Octopoda » (5 cop.). — 16. « Preliminary Researches on the Mechanism of the Antidiuretic Action of Enteramine » (5 cop.). — 17. « Antidiuretic Action of Enteramine » (5 cop.). — 18. « Identification of Enteramine and Enteramine-Related Substances in Extracts of Posterior Salivary Glands of *Octopus vulgaris* by Paper Chromatography » (5 cop.). — 19. « Active Substances in the Posterior Salivary Glands of Octopoda » (5 cop.). — 20. « Presenza di un principio antidiuretico nelle ghiandole salivari posteriori degli Octopodi » (5 cop.). — 21. « Ricerche chimiche e farmacologiche sugli estratti di ghiandola ipobranchiale di *Murex Trunculus*, *Murex Brandaris* e *Tritonalia Erinacea*. – IV. Presenza negli estratti di enteramina o di una sostanza enteraminisimile » (5 cop.). — 22. « Idem – II. Reazioni chimiche colorate degli estratti » (5 cop.). — 23. « Ricerche farmacologiche sull'enteramina. – VII. Enteramina e indolalchilamine del veleno del rospo » (5 cop.). — 24. « Idem. – I. Bufotenina e Bufotenidina » (5. cop.). — 25. « Presenza di enteramina o di una sostanza enteraminosomile negli estratti gastrointestinali e splenici dei pesci e negli estratti gastroenterici delle *Ascidie* » (5 cop.). — 26. « Pharmakologische Studien Über Enteramin. — VI. Mitteilung: Weitere Untersuchungen über die Inaktivierung von Enteramin durch tierisches Gewebe » (5 cop.). — 27. « Über den Enteramingehalt der menschlichen Milz in normalen und pathologischen Zuständen » (5 cop.). — 28. « Pharmakologische Studien über Enteramin – Über aktives (A–Enteramin) und inaktives Enteramin (I–Enteramin) und über Aktivierung von I–Enteramin » (5 cop.). — 29. « Pharmacologische Studien über Enteramin – IV. Mitteilung: Über die Inaktivierung von Enteramin durch tierisches Gewebe » (5 cop.). — 30. « Sulle reazioni chimiche colorate dell'enteramina – Nota II: Presenza di sostanze enteraminosimili al di fuori della mucosa gastro–intestinale » (5 cop.). — 31. « Idem. – Nota I: Ricerche su estratti acetonici di mucosa gastro–intestinale » (5 cop.). — 32. « Attuali aspetti farmacologici delle sostanze attive tessutali » (5 cop.). — 33. « Pharmakologische Studien über Enteramin. – III. Mitteilung: Über das Vorhandensein eines enteramin–ähnlichen Stoffes in Milzextrakten » (5 cop.). — 34. « Idem – II. Mitteilung: Über einige Eigenschafaten des Enteramins, sowie über die Abgrenzung des Enteramins von den anderen kreislaufwirksamen Gewebsprodukten » (5 cop.). — 35. « Idem – I. Mitteilung: Über die Wirkung von Acetonextrakten der Kaninchenmagenschleimhaut auf den Blutdruck und auf isolierte überlebende Organe » (5 cop.). — 36. « Sulla presenza di una sostanza enteraminosimile negli estratti acetonici di milza » (5 cop.). — 37. « Caratterizzazione biologica di una nuova amina di– o polifenolica negli estratti acetonici di ghiandola salivare posteriore di *Octopus vulgaris* » (5 cop.). — 38. « Ricerche di caratterizzazione chimica delle sostanze fenoliche presenti negli estratti acetonici di ghiandole salivari posteriori di *Octopus vulgaris* » (5 cop.). — 39. « Zeitschrift für Zellforschung und mikroskopische Anatomie » (5 cop.). — 40. « Zeitschrift für anatomie u. Entwicklungsgeschichte » (5 cop.). — 41. « Ricerche sulla diazoreazione. Nota III. – Significato e limiti della modificazione proposta da Hanke e Koessler per la determinazione quantitativa della tirosina e della tiramina » (5 cop.). — 42. « Idem – Nota II. Limiti e significato della modificazione di Gebauer–Fulnegg alla diazoreazione di Pauly » (4 cop.). — 43. « Idem. – Nota I. Introduzione, diazoreazione in ambiente acido, in ambiente alcalino e in ambiente alcalino con successiva acidificazione » (5 cop.). — 44. « Ricerche istochimiche sulla ghiandola salivare posteriore di *Octopus vulgaris* » (5 cop.). — 45. « Caratteristiche delle cellule enterocromaffini tipiche e delle cellule preenterocromaffini argentofile » (5 cop.). — 46. « Ricerche sul secreto specifico delle cellule enterocromaffini » (5 cop.). – 47. « Sulla presenza di cellule argentofile (preentorocromaffini) nelle vie biliari dell'uomo e di alcuni mammiferi » (5 cop.). — 48. « Ricerche sul secreto delle cellule enterocromaffini. VII » (5 cop.). — 49. « Cellule enterocromaffini e cellule argentofile nel pancreas dell'uomo e dei mammiferi » (5 cop.). – 50. « Ricerche sul secreto delle cellule enterocromaffini – Nota IX. – Intorno alla natura chimica della sostanza specifica » (5 cop.). — 51. « Ricerche sperimentali sul significato biologico delle cellule enterocromaffini » (5 cop.). – 52. « Contributo alla migliore conoscenza istochimica delle cellule enterocromaffini » (5 cop.). – 53. « Die enterochromaffinen Zellen der Gallenwege in normalen und pathologischen Zuständen (Nach Untersuchungen beim Menschen und bei Säugetieren) » 5 cop.). — 54. « Ricerche preliminari sulla moschatina » (5

cop.). — 55. « Papierchromatographische Untersuchungen über die Hydroxyphenylalkylamine der Gerstenkeimlinge » (5 cop.). — 56. « Synthese des Murexins (β- [(Imidazolyl 4 (5)] - acryl-cholin) » (5 cop.). — 57. « Osservazioni preliminari, chimiche e farmacologiche, sulla murexina » (5 cop.). — 58. « Ricerche chimiche e farmacologiche sugli estratti di ghiandola ipobranchiale di *Murex* e *Trunculus*, *Murex Brandaris* e *Tritonalia Erinacea* – III. Presenza negli estratti di un nuovo derivato della colina o di una colina omologa: la murexina » (5 cop.). — 59. « Identification of Octopamine as I-p-Hydroxyphenylethanolamine » (5 cop.). — 60. « Active Substances in the Posterior Salivary Glands of Octopoda – II. Tyramine and Octopamine (Oxyoctopamine) » (5 cop.). — 61. « Azione adrenalinosimile degli estratti di ghiandola salivare posteriore di *Octopus vulgaris* irradiati con luce ultravioletta » (5 cop.). — 62. Ricerche chimiche e farmacologiche sugli estratti di ghiandola ipobranchiale di *Murex* (*Truncularia*) *trunculus* (L.) *Murex* (*Bolinus*) *brandaris* (L.) e *Tritonalia erinacea* (L.). – I. Distribuzione e caratteristiche della purpurasi e delle purpurine » (5 cop.). — 63. « Istamina " condizionatore positivo " dell'azione purgativa di alcuni drastici » (5 cop.). — 64. « Sul possibile condizionamento Istaminico dell'azione purgativa di alcuni drastici » (5 cop.). — 65. « Über die Erzeugung von Gallensteinen durch Vitamin A – Mangel beim Meerschweinche » (5 cop.). — 66. « Sulla influenza delle vitamine A, B_1, B_2, E PP sul quadro morfologico dell'assorbimento intestinale dei lipidi » (3 cop.). — 67. « Acetilcolina e Vitamina B_1 – Nota IV. Sul contenuto di acetilcolina dell'encefalo, del cuore e dell'intestino dei colombi normali ed in avitaminosi B. ». (5 cop.). — 68. « La titolazione farmacologica dei cardiocinetici nei colombi avitaminizzati ed ipervitaminizzati « (5 cop.). — 69. « Influenza della Vitamina B_1 sull'azione della pilocarpina, eserina, arecolina, istamina ed acido adenilico » (5 cop.). — 70. « Acetilcolina e Vitamina B_1 – Nota III. Azione delle iniezioni endovenose e sottocutanee di Vitamina B_1 sull'intossicazione da acetilcolina nel ratto » (5 cop.). — 71. « Idem – Nota II. Ricerche in piccioni normali, in avitaminosi B_1 ed in ipervitaminismo B_1 » (5 cop.). — 72. « Idem – Nota I. Ricerche sugli organi isolati, sulla pressione del sangue e sulla pupilla dell'occhio di coniglio *in situ* » (5 cop.). — 73. « Sui rapporti tra acetilcolina e vitamina B_1 » (5 cop.). — 74. « Ricerche morfologiche ed istochimiche sui lipidi delle vie biliari nei Mammiferi » (5 cop.). — 75. « Ricerche morfologiche ed istochimiche sui lipidi nelle vie biliari degli Uccelli » (5 cop.). — 76. « Ricerche morfologiche ed istochimiche sui lipidi nelle vie biliari dei Rettili » (5 cop.). — 77. « Ricerche sulle droghe purgative nostrane – II. Ecballium Elaterium L. » (5 cop.). — 78. « Ricerche sulle droghe purgative nostrane. – III. Brionia Dioica Jacq. » (5 cop.). — 79. « Ricerche sulle droghe purgative nostrane – I *Convolvulus Sepium* L. – *Convolvulus Arvensis* L. e *Convolvulus Soldanella* L. ». (5 cop.). — 80. « Ricerche Farmacologiche sul *Leonurus cardiaca* L. (e sul *Leonurus Marrubiastrum* L.) » (5 cop.). — 81. « Droghe e principî ipoglicemizzanti di origine vegetale » (5 cop.). — 82. « Modificazioni delle azioni dell'enteramina ad opera degli agenti antiistaminici » (5 cop.). — 83. « Observation on Alleged Serotonin – (Enteramine) – Like Nature of Cerebral Pressor Substance of Taylor, Page, and Corcoran » (5 cop.). (Comune al Premio Nazionale Generale n. 3).

3. Dott. ENRICO MASERA. — 1. « La lotta biologica agli insetti dannosi con l'impiego di miceti patogeni » (cop. 5). — 2. « Osservazioni sull'infezione da " Nosema bombycis Naegeli " nel " Bomby mori L. " » (cop. 5). — 3. « La " Beauveria globulifera (Speg.) Picard " parassita del " Bombyx mori L. " » (cop. 5). — 4. « Ad un secolo di distanza dalla nascita della Scienza delle malattie infettive » (cop. 5). — 5. « Comportamento del " Bombyx mori L. " all'infezione sperimentale del " Bacterium prodigiosum L. et N. " » (cop. 5). — 6. « Contributo allo studio della virulenza e patogenicità di alcuni entomomiceti » (cop. 5). — 7. « L'andamento della concentrazione idrogenionica nei terreni di coltura durante lo sviluppo di miceti » (cop. 5). — 8. « Le malattie infettive degli insetti e loro indice bibliografico » (cop. 5). — 9. « I germogli di gelso in relazione alla poliedria del baco da seta » (cop. 5). — 10. « Prove sperimentali dell'azione patogena di alcuni entomofiti sul " Bombyx Mori L. " » (cop. 5). — 11. « Un primato della nostra Scienza: Gaetano Cantoni e Luigi Pasteur » (cop. 5). — 12. « Action pathogène de bactéries et de champignons entomophytes sur le " Bombyx mori L. " » (cop. 5). — 13. « Artropodi dannosi al " Bombyx mori L. "

ed alla seta » (cop. 5). — 14. « Azione della canfora sulle uova di " Bombyx mori L. " (cop. 1). — 15. « Sulla "fersa" e "batteriosi" del gelso » (cop. 5). — 16. « Malattie dei bozzoli » (cop. 5). — 17. « L'assenzio in bachicoltura » (cop. 5). — 18. « Influence du mâle infecté de " Nosema bombycis Naegeli ", pour le transmission de la pébrine du " Bombyx mori L. " (Note préventive) » (cop. 1). — 19. « Observations sur la naissance de larves infectes des oeufs des papillons de " Bombyx mori L. " affectés de pébrine (Note préventive) » (cop. 5). — 20. « Maladies des cocons (Note préventive) » (cop. 5). — 21. « L'absinthe en sériculture (Note préventive) » (cop. 5). — 22. « La concentrazione idrogenionica del succo dell'uovo di " Bombyx mori L. " durante la diapausa e l'incubazione » (copie 5). — 23. « Recenti ricerche sulla pebrina del baco da seta » (cop. 5). — 24. « Répartition des oeufs infectes dans le pontes de papillons pebrinés de " Bombyx Mori L. " (Note préliminaire) » (cop. 5). — 25. « Osservazioni sulla nascita di larve infette da ovature di farfalle di " Bombyx mori L. " ammalate di pebrina » (cop. 5). — 26. « Influenza del maschio infetto da " Nosema bombycis Naegeli " nella trasmissione della pebrina ereditaria » (cop. 5). — 27. « Azione biologica di metalli sulle uova di " Bombyx mori L. " infette di pebrina (Nota preliminare) » (cop. 5). — 28. « Fersa del gelso e trattamenti cuprici » (cop. 5). — 29. « Action biologique des métaux sur les oeufs de " Bombyx mori L. " sains et infectés par la pébrine (Note préliminaire) ». — 30. « Difendiamoci dal calcino » (cop. 5). — 31. « Influenza della temperatura e dei R.U.V. sulla vitalità e virulenza delle spore di " Beauveria Bassiana " (Bals.) Vuill. » (cop. 1). — 32. « Sul contenuto batterico delle uova degli insetti " Bombyx mori L. " (cop. 5). — 33. « Per i Bachicoltori » (cop. 5). — 34. « Autres hôtes du " Nosema bombyci Naegeli " (Note préliminaire) » (cop. 5). — 35. « Action de l'ozone sur la vitalité et la virulence des spores de " Beauveria Bassiana " (Bals.) Vuill. » (cop. 5). — 36. « Ricerca di sorgenti di infezione pebrinosa in allevamenti provenienti da " seme " sano » (cop. 5). 37. « Minorata produzione di bozzoli determinata dal calcino » (cop. 5). — 38. « Miceti patogeni al " Bombyx mori L. " » (cop. 5). — 39. « Comportamento delle uova d'insetti all'azione dei vapori di mercurio " Bombyx mori L. Phylosamia Cynthia Dr. " » (cop. 5). — 40. « La lotta contro il calcino » (cop. 5). — 41. « Gli anticalcinici in bachicoltura » (cop. 5). — 42. « Il pollame e la diffusione del calcino " (cop. 5). — 43. « La lotta contro il calcino » (cop. 5). — 44. « Dopo ottanta anni di selezione – Ritorno alla pebrina ? » (cop. 5). — 45. « Ricerche sulla Poliedria del " Bombyx Mori L. " (cop. 1). — 46. « Comportamento delle uova di " Bombyx mori L. " al calore e tentativo di selezione del "seme-bachi" infetto di pebrina " » (cop. 5). — 47. « Rapport LVII – Le Malattie del baco da seta in Italia – sulle malattie del " Bombyx mori L. " » (cop. 5). — 48. « Rapporto LVIII – Rapporti fra " Apanteles Glomeratus Reinh. E Pieris Brassicae L. " infette di pebrina » (cop. 5). — 49. « Un nuovo Annibale alle porte della sericoltura ? » (cop. 1). — 50. « Grande storia di un piccolo insetto: Il baco da seta » (cop. 5). — 51. « Doppi accoppiamenti nelle farfalle di ' Bombyx mori L. " » (5 cop.). — 52. « Su una modalità pressoché ignorata di diffusione interna del calcino » (5 cop.). — 53. « Le origini della sericoltura veneta » (5 cop. giornale). (Comune al Premio Nazionale Generale n. 7).

ELENCO DEI CONCORRENTI AL PREMIO « GUALTIERO POMA » PER LA *CHIMICA*

(scadenza 31 dicembre 1952 – Premi lire 500.000).

1. Dott. GIORGIO CARERI. — 1. « Sulla cinetica delle reazioni di dissociazione ». — 2. « Equation of state computations » (In coll. con J. E. Mayer). — 3. « The Gaussian approximation for the probability density of a molecule in a cell. ». — 4. « Note on superposition methods in mass spectrometry ». — 5. « A note on the recombination rate of free atoms ». — 6. « La discriminazione degli ioni negli spettrometri di massa » (In coll. con G. Nancini). — 7. « On discrimination in mass spectrometer ion sources (In coll. con G. Nencini). — 8. « Sulla composizione isotopica dell'argon nei gas naturali » (In coll. con G. Boato

G. Nencini, M. Santangelo). — 9. « Argon isotopes in natural gases » (In coll. con G. Boato e M. Santangelo). — 10. « Hydrogen isotopes in steam wells » (In coll. con G. Boato e G. G. Volpi). — 11. « Reazione di scambio tra idrogeno e deuterio ».

2. Prof. Massimo Simonetta. — 1. « Azione mutagena delle sostanze chimiche ». Nota IV (1 cop.). — 2. « Idem. » Nota V (1 cop.). — 3. « Studi sul comportamento dei metalli nelle pile di concentrazione » Nota VII (1 cop.). — 4. « Idem. » Nota VIII (1 cop.). — 5. « Sugli spettri di assorbimento nell'ultravioletto della flavoglaucina e di sostanze a struttura simile » (1 cop.). — 6. « Zur Kenntnis der Sesquiterpene und Azalene » (1 cop.). — 7. « Sul calcolo del più basso livello energetico dell'Ortoelio » (1 cop.). — 8. « Alcuni aspetti della teoria degli orbitali di valenza » (1 cop.). — 9. « Bond Orbital and Bond Energy in Elementary Phosphorus » (1 cop.). — 10. « The Calculation of Coefficients of Coulomb and Exchange Integrals in Matrix Elements Involving Polar Singlet Structures » (1 cop.). — 11. « Mécanique quantique des molécules d'éthylène, butadiène, benzène, pyridine, pyrazione, pyrrole et furanne par la méthode des orbitales de valence, tenant compte des structures ioniques » (1 cop.). — 12. « Sulla cinetica della reazione tra 1-cloro-2-nitroetano ed acqua » (1 cop. dats.).

3. Dott. Giovanni B. Tommasi. — 1. « The determination of crystal structures. A basic investigation on the problem » (2 cop. datt. e una copia in italiano). — 2. « Sulla determinazione delle strutture cristalline » (2 cop.). — 3. « Sul potere risolutivo dei raggi X nello studio di proteine e polipeptidi (in collab. con il dott. A. Liquori » (2 cop.). — 4. « Forma della nuvola elettronica e potere risolutivo dei raggi X nella determinazione delle strutture cristalline » (2 cop. dats.).

OPERE PERVENUTE IN DONO ALL'ACCADEMIA

presentate nella seduta dell'11 aprile 1953

Boaga Giovanni. — *Bibliografia geodetica italiana (anno 1951)*. Estr. da « Rivista del Catasto e dei Servizi Tecnici Erariali », n. s., a. VII, 1952, n. 1.

— *La Fotogrammetria in Italia*. Rapporto al VII Congresso Internazionale di Fotogrammetria 1952. Estr. da « Rivista del Catasto e dei Servizi Tecnici Erariali », n. s., a. VII, 1952, nn. 5-6.

Commentationes in honorem professoris Olli Heikinheimo septuagenarii editae. Helsinki, 1952. Pp. 868, in-8° (Communicationes Instituti Forestalis Fenniae, 40).

Dezani Serafino e Guidetti Ettore. — *Trattato di Farmacognosia*. 2° ed. Torino, U.T.E.T., 1953. Pp. XV-575, in-8°, con figg.

Guidetti Ettore. — Vedi: Dezani Serafino e Guidetti Ettore.

Negri Adelchi. — *Rabbia e opere varie* (Volume miscellaneo). Allegata una conferenza del prof. Emilio Veratti sulla vita ed opera del Negri.

Pomini Luigi. — *Erboristeria pedemontana*. Vol. I. Parte generale. Vercelli, Camera di Commercio, Industria, Agricoltura, 1953. Pp. 125, in-8°, con figg.

Rendiconti della Società Mineralogica Italiana. Pavia. Anni IV-VIII, 1947-52.

Spandos B. N. — *L'électron planétaire et l'astre (Lois communes)*. Thessaloník, 1953. Pp. 8, in-8°.

Tizzano Antonio. — *Il problema medico-sociale della sopravvivenza e della senescenza*. Roma, Istituto di medicina sociale, 1953. Pp. 107 (Collana di studi sui problemi medico-sociali, 20).

Verotti Emilio. — Vedi: Negri Adelchi.

D. De Blasi e U. Amaldi.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

Seduta del 9 maggio 1953

Presiede il Presidente FRANCESCO GIORDANI

NOTE DI SOCI

Fisica matematica. — *Su le equazioni di campo della teoria relativistica unitaria di Einstein.* Nota (*) del Corrisp. BRUNO FINZI.

1. In appendice alla 3ª edizione del volume « Il significato della Relatività » (1) Einstein diede nel 1950 una teoria relativistica unitaria, consistente in una interpretazione geometrica dei fenomeni gravitazionali e di quelli elettromagnetici. Questa teoria (evoluzione di precedenti ricerche) si vale di uno spazio-tempo non riemanniano, la cui geometria quadridimensionale è tutta individuata da un unico tensore doppio veramente fondamentale g_{ik} $(i, k = 0, 1, 2, 3)$, perché individua la metrica

$$ds^2 = g_{ik}\, dx^i\, dx^k \tag{1}$$

ed individua i coefficienti di trasporto, o di connessione, $\left[\begin{smallmatrix} l \\ i\ k \end{smallmatrix}\right]$ attraverso la seguente condizione che ne afferma la costanza:

$$g_{\underset{+-}{i\,k}\,,r} \equiv g_{ik\,,r} - \left[\begin{smallmatrix} l \\ i\ r \end{smallmatrix}\right] g_{lk} - \left[\begin{smallmatrix} l \\ r\ k \end{smallmatrix}\right] g_{il} = 0. \tag{2}$$

Nella (2) $g_{\underset{+-}{i\,k}\,,r}$ indica la derivata tensoriale di g_{ik} rispetto ad x^r, quando si tratti l'indice i, polarizzato col segno +, come primo indice e l'indice k, polarizzato col segno —, come secondo, mentre $g_{ik\,,r}$ indica la derivata ordinaria di g_{ik} rispetto ad x^r.

(*) Presentata nella seduta del 9 maggio 1953.

(1) A. EINSTEIN. *The Meaning of Relativity*. 3ª ed. Princeton. Un. Press. pp. 127-141 (1950).

Se g_{ik} fosse un tensore simmetrico, i coefficienti di trasporto $\left[\begin{smallmatrix} l \\ i\ k \end{smallmatrix}\right]$ ottenuti risolvendo la (2) coinciderebbero con i simboli di Christoffel $\left\{\begin{smallmatrix} l \\ i\ k \end{smallmatrix}\right\}$, e lo spazio–tempo sarebbe riemanniano. Ma non così se il tensore fondamentale g_{ik} non è simmetrico, e consta di una parte simmetrica $\underset{-}{g}_{ik}$, che sola interviene nella metrica (1), e di una parte emisimmetrica $\underset{\vee}{g}_{ik}$, che con la prima interviene nella (2):

$$g_{ik} = \underset{-}{g}_{ik} + \underset{\vee}{g}_{ik}. \tag{3}$$

I coefficienti di trasporto, che si ottengono risolvendo la (2), non sono allora simmetrici e la loro parte emisimmetrica

$$\mathrm{T}^{l}_{ik} = \underset{\smile}{\left[\begin{smallmatrix} l \\ i\ k \end{smallmatrix}\right]} \tag{4}$$

costituisce un tensore che dà la torsione.

Per ottenere le equazioni di campo ci si vale di un principio d'azione stazionaria, nel quale si fanno variare in modo *arbitrario*, in una regione dello spazio–tempo, i coefficienti di trasporto e il tensore fondamentale, rispettandone però i valori al contorno. Quando alle equazioni di campo così ottenute si aggiunga la condizione *posta a priori* (se pur compatibile)

$$\mathrm{T}_i \equiv \mathrm{T}^{k}_{ik} = 0, \tag{5}$$

queste si possono scrivere così:

$$\begin{cases} \overset{+\,-}{g}_{i\ k\ l} = 0 \\ \mathrm{R}_{ik} = 0\,, \quad \text{ossia} \quad \mathrm{R}_{ik} = 0 \quad , \quad \underset{\vee}{\mathrm{R}}_{ik} = 0, \end{cases} \tag{6}$$

dove R_{ik} è il tensore ottenuto contraendo il tensore di Riemann, dipendente soltanto dai coefficienti di trasporto e dalle loro derivate prime ordinarie. La prima delle (6) non è altro che la (2), di profondo significato geometrico, e da essa si trae la costanza della densità scalare $w = \sqrt{-g_{ik}}$, mentre dalla (2) e dalla (5) si deduce che è pure costante il tensore di Ricci (quando si polarizzino tutti i suoi indici con lo stesso segno), e che la parte emisimmetrica della densità tensoriale fondamentale $\mathfrak{g}^{ik} = w\, g^{ik}$ è solenoidale:

$$w_{/k} = 0 \quad , \quad \overset{+\,+\,+\,+}{\varepsilon}{}^{i\ k\ r\ s}{}_{/l} = 0 \quad , \quad \underset{\vee}{\mathfrak{g}}{}^{ik}{}_{,k} = 0. \tag{7}$$

L'ultima delle (7) permette di interpretare il tensore doppio emisimmetrico

$$^{*}g^{ik} = \varepsilon^{i\,k\,r\,s}\, g_{rs} \tag{8}$$

coniugato del tensore fondamentale (o della sola sua parte emisimmetrica) come tensore elettromagnetico, perché (conformemente alle leggi di Maxwell

espresse nello spazio–tempo da Minkowski [2]) il suo rotore è nullo, mentre la sua divergenza, rappresentante la distribuzione elettrica, è solenoidale, come vuole il principio di conservazione dell'elettricità.

2. L'appendice della 4ª edizione testè pubblicata [3] del volume *Il significato della Relatività* modifica alquanto la teoria precedente. In essa le equazioni di campo sono ancora ricavate da un principio variazionale affermante la stazionarietà dell'azione

$$S = \int R^{**}_{ik}\, g^{ik}\, d\tau, \tag{9}$$

dove l'integrale è esteso ad una generica regione dello spazio–tempo, $d\tau$ è il prodotto dei quattro differenziali delle coordinate, e

$$R^{**}_{ik} = R^{*}_{ik} - \left(\frac{1}{w}\, \underset{+}{w}_{|i}\right)_{|k}, \text{ essendo } R^{*}_{ik} = R_{ik} + \underset{+}{T}_{i|k}. \tag{10}$$

Come si vede, R^{**}_{ik} si riduce ad R^{*}_{ik} quando $\underset{+\ -}{g}_{i\,k|r} = 0$, perché allora $w_{|i} = 0$, e si riduce ad R_{ik} quando è nullo anche il vettore di torsione, cioè $T_i = 0$. Per ottenere le equazioni di campo si impone a priori la condizione espressa dall'ultima (7), e cioè la solenoidalità di $\overset{ik}{\underset{\vee}{g}}$,

$$\overset{ik}{\underset{\vee}{g}}{}_{,k} = 0, \tag{11}$$

e si scrive che è nulla la variazione di S subordinata soltanto da tale condizione (fermi restando si intende i valori al contorno degli elementi che sono arbitrari nella variazione).

Le equazioni che così si ottengono da tale principio di stazionarietà condizionata sono le seguenti:

$$\begin{cases} \underset{+\ -}{g}_{i\,k|r} = 0 \\ \underset{-}{R}^{**}_{ik} = 0 \end{cases}, \qquad \operatorname{rot} \overset{**}{\underset{\vee}{R}}_{ik} \equiv \varepsilon^{ikrs}\, \overset{**}{\underset{\vee}{R}}_{ik\,,r} = 0. \tag{12}$$

Ad esse naturalmente va aggiunta la condizione (11), che insieme alla prima delle (12) conduce all'annullarsi del vettore di torsione T_i. Nelle ultime (10) è allora possibile sostituire R^{**}_{ik} col tensore di Riemann contratto, scrivendole così:

$$\underset{-}{R}_{ik} = 0 \quad , \quad \operatorname{rot} \underset{\vee}{R}_{ik} = 0. \tag{12'}$$

Einstein pone a raffronto il sistema di equazioni di campo (6) ottenuto nel 1950 con il sistema attuale formato dalla (11) e dalle (12) e constata che quest'ultimo è più « forte » del primo, e perciò lo preferisce.

(2) Cfr. ad esempio B. FINZI e M. PASTORI, *Calcolo Tensoriale e Applicazioni*. Bologna 1949, cap. IX.

(3) A. EINSTEIN, *The Meaning of Relativity*. 4ª ed. Princeton. Un. Press, pp. 133–165 (1953).

L'interpretazione geometrica del tensore elettromagnetico è ancora quella data precedentemente.

3. Nella recente versione della teoria relativistica unitaria, Einstein postula la (11) (equivalente a 4 equazioni scalari, fra le quali sussiste però l'identità differenziale $(\mathfrak{g}^{\nu}_{\ ,k})_{,i} \equiv 0$), ma ciò non mi sembra del tutto spontaneo in una teoria che vuol spiegare geometricamente le leggi elettromagnetiche, perché proprio la (11) è la relazione destinata ad essere interpretata come quella che traduce le equazioni maxwelliane sintetizzate dall'irrotazionalità del tensore elettromagnetico. Mi sembra perciò non privo di interesse mostrare quali equazioni di campo si ottengono dalla stazionarietà dell'azione einsteiniana, senza presupporre a priori nessuna equazione, ma soltanto dando significative variazioni, se pur non del tutto arbitrarie, all'azione stessa [4].

In questa Nota mostro, in primo luogo, che le (12) possono ottenersi dando una variazione arbitraria ai coefficienti di trasporto e alla parte simmetrica della densità tensoriale fondamentale, e una variazione solenoidale alla parte emisimmetrica, rispettando però i valori al contorno degli elementi arbitrari in tale variazione. Mostro poi che, se la variazione della parte emisimmetrica della densità tensoriale fondamentale è somma di una variazione solenoidale e di una irrotazionale, si trovano, accanto alla (2), delle equazioni di campo analoghe a quelle di altre teorie unitarie, come ad esempio quella di Hattori. Mostro infine che, se la variazione della parte emisimmetrica della densità tensoriale fondamentale è somma di una variazione solenoidale e di una ottenuta eseguendo un cambiamento infinitesimo del riferimento spazio-temporale, le equazioni di campo sono *tutte* quelle della teoria relativistica unitaria einsteiniana.

4. Variamo l'azione S, rispettando i valori al contorno degli elementi arbitrari da cui la variazione dipende, e scriviamo che tale variazione è nulla [5]:

$$(13) \qquad \delta S = \int \left\{ w\, g^{\overset{i\ k}{+\ -}}_{\ \ \ /l}\, \delta \begin{bmatrix} l \\ i\ k \end{bmatrix} + R^{\bullet\bullet}_{ik}\, \delta \mathfrak{g}^{ik} + (\mathfrak{g}^{\overset{i\ k}{\cdot\ -}}_{\ \ \ ,i})_{,k}\, \delta (\log w) \right\} d\tau = 0.$$

Prendendo in questa formula variazionale $\delta \mathfrak{g}^{ik} = 0$, affinché essa sia verificata qualunque sia la variazione $\delta \begin{bmatrix} l \\ i\ k \end{bmatrix}$ dei coefficienti di trasporto, deve essere:

$$(14) \qquad g^{\overset{i\ k}{+\ -}}_{\ \ \ /l} = 0$$

(4) Così si fa, del resto, in molti principi variazionali fisici, nei quali, a seconda dei casi, la variazione è sincrona (Hamilton), o isoenergetica (Maupertuis-Hölder), o equilibrata (Menabrea), ecc.

(5) Cfr. A. Einstein, loco secondo citato, pp. 143-146.

e quindi anche $g_{\underset{+}{i}\,\underset{-}{k}\,l} = 0$, $\mathfrak{g}^{\underset{+}{i}\,\underset{-}{k}}{}_{/l} = 0$. Allora la formula variazionale (13) diviene, per $\delta\mathfrak{g}^{ik}$ generica:

$$\int \overset{**}{R}_{ik}\, \delta\mathfrak{g}^{ik}\, d\tau = 0. \tag{15}$$

Prendendo nella (15) $\delta\mathfrak{g}^{\overset{ik}{\vee}} = 0$, affinché essa sia verificata qualunque sia la variazione $\delta\mathfrak{g}^{\underline{ik}}$ della parte simmetrica della densità tensoriale fondamentale, deve essere:

$$\overset{**}{R}_{ik} = 0. \tag{16}$$

Allora la (15), per $\delta\mathfrak{g}^{\overset{ik}{\vee}}$ generico, diviene:

$$\int \overset{**}{R}_{\overset{ik}{\vee}}\, \delta\mathfrak{g}^{\overset{ik}{\vee}}\, d\tau = 0. \tag{17}$$

Assumiamo come tensore $\delta\mathfrak{g}^{\overset{ik}{\vee}}$ un generico tensore doppio emisimmetrico solenoidale, che sempre può porsi nella forma

$$\delta\mathfrak{g}^{\overset{ik}{\vee}} = \eta^{ikrs}\, \psi_{r,s}\,, \tag{18}$$

dove ψ_r è un vettore *a priori* arbitrario ed η^{ikrs} è la densità tensoriale di Levi-Civita, corrispondente al tensore ε^{ikrs} di Ricci. Ponendo la (18) nella (17), integrando per parti e ricordando che al contorno $\psi_r = 0$, si ha:

$$-\int \eta^{ikrs}\, \overset{**}{R}_{\overset{ik}{\vee},s}\, \psi_r\, d\tau = 0. \tag{19}$$

Scrivendo che la (19) è verificata qualunque sia ψ_r nella regione spazio-temporale considerata, si trova che:

$$\operatorname{rot} \overset{**}{R}_{\overset{ik}{\vee}} = 0. \tag{20}$$

Dando dunque una variazione arbitraria ai coefficienti di trasporto e alla parte simmetrica della densità tensoriale fondamentale, e una variazione solenoidale alla parte emisimmetrica (rispettando però i valori al contorno degli elementi arbitrari in tale variazione) si ottengono le equazioni (14), (16) e (20), che coincidono con le (12). Le ultime due equazioni, non avendo noi imposto *a priori* la (11), non possono porsi nella forma (12'), perché, essendo $g_{\underset{+}{i}\,\underset{-}{k}\,l} = 0$, è ancora $w_i = 0$, ma non $T_i = 0$. Ricordando la (10), queste due ultime equazioni si possono però scrivere così:

$$\overset{*}{R}_{\underline{ik}} = 0 \quad , \quad \operatorname{rot} \overset{*}{R}_{\overset{ik}{\vee}} = 0. \tag{21}$$

5. Diamo ora nell'espressione dell'azione S una variazione arbitraria ai coefficienti di trasporto e alla parte simmetrica della densità tensoriale fondamentale, e una variazione alla parte emisimmetrica, che, come è proprio di un *generico* tensore doppio emisimmetrico, sia somma di una variazione solenoidale e di una irrotazionale, e sempre rispettiamo i valori al contorno degli elementi arbitrari di tale variazione.

Dall'equazione variazionale $\delta S = 0$ potremo ancora dedurre le equazioni di campo (14) e (16) e la formula variazionale (17). In quest'ultima però $\delta g^{ik}_{\vee}$ dovrà esprimersi mediante due vettori arbitrari: il potenziale φ_k e l'antipotenziale ψ_r [6]. Si ha così:

$$\int \{ R^{**}_{\underset{\vee}{ik}} \eta^{ikrs} \psi_{r,s} + R^{**ik}_{\vee} [(w\varphi_k)_{,i} - (w\varphi_i)_{,k}] \} \, d\tau = 0.$$

Integrando per parti e ricordando che al contorno $\psi_r = 0$, $\varphi_k = 0$, si trova che

$$\text{(22)} \qquad \text{rot } R^{**}_{\underset{\vee}{ik}} = 0 \quad , \quad \text{div } R^{**ik}_{\vee} \equiv R^{**ik}_{\vee\,,k} = 0.$$

Queste ultime equazioni di campo, essendo per la (14) $g_{i\,k/l} = 0$, possono scriversi più semplicemente così:

$$\text{(22')} \qquad \text{rot } R^{*}_{\underset{\vee}{ik}} = 0 \quad , \quad \text{div } R^{*ik}_{\vee} = 0.$$

Le (22') suggeriscono di interpretare il tensore $R^{*}_{\underset{\vee}{ik}}$ come tensore elettromagnetico, perché quello come questo per un campo neutro sono irrotazionali e solenoidali. Questa interpretazione richiama altre teorie relativistiche unitarie, come quella di Hattori [7]. L'analogia sta nel fatto che ancor qui si ravvisa il tensore elettromagnetico in un tensore doppio emisimmetrico che dipende essenzialmente dal tensore di Riemann contratto [8]. È però nella teoria di Hattori non sussiste la (14), cioè la (2), che costituisce la più suggestiva e profonda relazione della teoria unitaria einsteiniana.

6. Diamo, in fine, all'azione S una variazione corrispondente ad un incremento arbitrario dei coefficienti di trasporto e della parte simmetrica della densità tensoriale fondamentale, e un incremento alla parte emisimme-

(6) B. FINZI, *Sul principio della minima azione e sulle equazioni elettromagnetiche che se ne deducono*. « Rend. Acc. Naz. dei Lincei », ser. VIII, vol. XII, p. 378 (1952).

(7) K. HATTORI, *Ueber eine formale Erweiterung der Relativitätstheorie und ihren Zusammenhang mit der Theorie der Elektrizität*. « Phys. Zeitsch. », Bd 19, pp. 538 549 (1928).

(8) Se il campo non è neutro, basterebbe, per ottenere le equazioni di campo, aggiungere all'azione S, l'azione sostanziale elettrica.

trica che sia somma di un generico incremento solenoidale e di un generico incremento ottenuto eseguendo un cambiamento infinitesimo del riferimento spazio-temporale. Tale variazione rispetti, al solito, i valori al contorno degli elementi arbitrari.

Dall'equazione variazionale $\delta S = 0$ potremo ancora dedurre le equazioni di campo (14), (16) e la formula variazionale (17). In quest'ultima però $\delta \mathfrak{g}^{\overset{\vee}{ik}}$ dovrà esprimersi come somma della variazione solenoidale $\eta^{ikrs}\psi_{r,s}$ e della variazione

$$\mathfrak{g}^{\overset{\vee}{sk}}\xi^{i}{}_{,s} + \mathfrak{g}^{\overset{\vee}{is}}\xi^{k}{}_{,s} + \mathfrak{g}^{\overset{\vee}{ik}}\xi^{s}{}_{,s} - \mathfrak{g}^{\overset{\vee}{ik}}{}_{,s}\,\xi^{s} \tag{23}$$

che si ottiene passando dalle coordinate x^i alle coordinate $x^i + \xi^i$, essendo ξ^i un vettore infinitesimo arbitrario [9].

Ponendo nella (17) $\xi^i = 0$ e scrivendo che essa è verificata qualunque sia ψ_r, si ottiene ancora la (20); quindi la (17), per ξ^i generico, si riduce alla seguente [10]:

$$\int \{\mathfrak{g}^{\overset{\vee}{sk}}[\mathrm{R}^{\overset{**}{\vee}}_{ki,s} + \mathrm{R}^{\overset{**}{\vee}}_{is;k} + \mathrm{R}^{\overset{**}{\vee}}_{sk,i}] + 2\,\mathrm{R}^{\overset{**}{\vee}}_{ik}\mathfrak{g}^{\overset{\vee}{kt}}{}_{,t}\}\,\xi^i\,d\tau = 0\ [11]. \tag{24}$$

Ma, grazie alla (20), cioè all'irrotazionalità di $\mathrm{R}^{\overset{**}{\vee}}_{ik}$, la (24) si semplifica così:

$$\int \mathrm{R}^{\overset{**}{\vee}}_{ik}\mathfrak{g}^{\overset{\vee}{kt}}{}_{,t}\,\xi^i\,d\tau = 0. \tag{24'}$$

Affinché questa sia verificata qualunque sia ξ^i, deve essere

$$\mathrm{R}^{\overset{**}{\vee}}_{ik}\,\mathfrak{g}^{\overset{\vee}{kt}}{}_{,t} = 0, \tag{25}$$

ed essendo genericamente diverso da zero il determinante emisimmetrico di quarto ordine $\| \mathrm{R}^{\overset{**}{\vee}}_{ik} \|$, risulta:

$$\mathfrak{g}^{\overset{\vee}{kt}}{}_{,t} = 0. \tag{26}$$

La (26) coincide con la (11).

(9) A. EINSTEIN, loco ultimo citato, p. 142.

(10) A. EINSTEIN, loco ultimo citato, p. 143.

(11) Si noti che la variazione corrispondente ad un cambiamento infinitesimo di coordinate verifica identicamente la $\delta S = 0$, qualunque sia ξ^i, perché S è un invariante. Ciò vuol dire che, se nella (13) si pongono al posto di $\delta\begin{bmatrix} l \\ i\ k \end{bmatrix}$, $\delta\mathfrak{g}^{ik}$, $\delta(\log w)$ le loro espressioni in funzione di ξ^i, risulta identicamente $\delta S = 0$, qualunque sia ξ^i, ma ciò non significa affatto che la (24), proveniente dalla (17), debba essere identicamente soddisfatta per ξ^i generico.

Le quattro identità che si possono ottenere nel modo prima indicato compiono lo stesso ufficio delle identità di Bianchi relative allo spazio tempo riemanniano, le quali furono ottenute da Weyl appunto per questa via (H. WEYL, *Raum, Zeit, Materie*, Berlin, par. 28 (1921).

Concludendo: dal principio dell'azione einsteiniana stazionaria si possono ottenere le equazioni (14), (16), (20), (26), che la (10), grazie alla (14) e alla (26) stessa, permette di scrivere così:

$$(27) \qquad \begin{cases} g_{i\,k/l} = 0 \quad , \quad \overset{\vee}{\mathfrak{g}}{}^{ik}{}_{,k} = 0 \\ R_{ik} = 0 \quad , \quad \operatorname{rot} \overset{\vee}{R}_{ik} = 0. \end{cases}$$

Esse comprendono *tutte* le equazioni del campo unitario di Einstein, e sono state ottenute non presupponendone nessuna, ma dando una variazione arbitraria ai coefficienti di trasporto e alla parte simmetrica della densità tensoriale fondamentale, e una variazione alla parte emisimmetrica che sia somma di una generica variazione solenoidale e di una ottenuta eseguendo un cambiamento infinitesimo del riferimento spazio-temporale. Come di consueto, queste variazioni rispettano i valori al contorno degli elementi arbitrari.

Nulla muta relativamente all'interpretazione geometrica delle (27). La prima è equivalente a 64 equazioni scalari che dànno i 64 coefficienti di trasporto, e quindi la connessione, mediante il campo del tensore fondamentale. Questo campo, a sua volta, è individuato dalle rimanenti tre equazioni tensoriali, che riassumono $4 + 10 + 4 = 18$ equazioni differenziali scalari: le prime quattro di primo ordine, le seconde dieci di secondo ordine, le terze quattro di terzo ordine nelle 16 componenti del tensore fondamentale. E ciò è possibile perché fra le quattro equazioni differenziali di primo ordine riassunte dalla $\overset{\vee}{\mathfrak{g}}{}^{ik}{}_{,k} = 0$ intercede l'identità differenziale di secondo ordine $(\overset{\vee}{\mathfrak{g}}{}^{ik}{}_{,k})_{,i} \equiv 0$, e fra le quattro equazioni differenziali di terzo ordine riassunte dalla $\operatorname{rot} \overset{\vee}{R}_{ik} = 0$ intercede l'identità differenziale di quarto ordine $\operatorname{div} \operatorname{rot} \overset{\vee}{R}_{ik} \equiv 0$.

Dal punto di vista fisico, il tensore elettromagnetico è sempre identificato al tensore ${}^{*}g^{ik}$ coniugato del tensore fondamentale, e l'equazione $\overset{\vee}{\mathfrak{g}}{}^{ik}{}_{,k} = 0$ ne traduce l'irrotazionalità. La distribuzione elettrica, definita dalla divergenza del tensore elettromagnetico, è solenoidale, conformemente al principio di conservazione dell'elettricità, e negli spazi vuoti di materia, a cui le (27) si riferiscono, la distribuzione elettrica non può essere generica, perché deve ubbidire alle relazioni che le (27) stesse implicano.

Chimica biologica. — *Destino del glucosio uniformemente marcato nel diaframma di ratti normali e diabetici da allossana in presenza ed in assenza di insulina* (*). Nota di Anne Beloff-Chain, Raffaella Catanzaro, Ernst Boris Chain, Oscar D'Agostino, Ines Masi, Francesco Pocchiari e Cesare Rossi, presentata (**) dal Socio E. B. Chain.

Nella presente Nota preliminare vengono riportati i risultati delle ultime ricerche relative all'azione dell'insulina sul metabolismo intermedio del glucosio nel diaframma isolato di ratti normali e diabetici per allossana.

Secondo la tecnica di Gemmill (1) sono stati incubati pezzi di diaframma in vaschette di Warburg con glucosio uniformemente marcato con C^{14} (2).

Dopo l'incubazione è stato fatto un estratto alcoolico-acquoso del diaframma omogeneizzato: una parte aliquota di tale estratto è stata cromatografata su carta usando come solvente una miscela di acido picrico-alcool butilico terziario-acqua (3). Successivamente è stata eseguita la radioautografia mettendo a contatto il cromatogramma con una lastra radiografica (4) per alcuni giorni.

Si è trovato che il glucosio si trasforma in almeno otto prodotti metabolici rilevabili nel cromatogramma con macchie più o meno attive al contatore di Geiger e nel radioautogramma con annerimenti più o meno intensi.

Nella fig. 1 è dato un esempio di tali radioautogrammi osservando tuttavia che le macchie più deboli chiaramente visibili sulla lastra non appaiono nella riproduzione a stampa qui annessa; perciò nella tabella I sono riportati gli Rf di tutte le macchie visibili nell'originale.

Le macchie corrispondenti ai vari prodotti metabolici non risultano tutte disposte nel cromatogramma in modo da consentire una misura della loro singola attività: il cromatogramma è stato perciò diviso in zone le cui attività globali sono state riportate nella successiva tabella III.

Corrispondentemente sono state divisi in zone anche i rispettivi radioautogrammi.

Come si vede nell'esempio riportato nella fig. 1 la prima zona è costituita da una macchia, da attribuire a glicogeno, che non si è mossa durante lo sviluppo del cromatogramma e da altre due macchie che probabilmente

(*) Lavoro eseguito nel Laboratorio di Chimica biologica dell'Istituto Superiore di Sanità di Roma.

(**) Nella seduta del 9 maggio 1953.

(1) C. L. Gemmill, « Bull. Johns Hopkins Hosp. », *66*, 232 (1940); *68*, 329 (1941).

(2) Il glucosiomarcato è stato fornito dal Radiochemical Centre, Amersham (Inghilterra).

(3) C. S. Hanes, e F. A. Isherwood, « Nature », *164*, 1107 (1949).

(4) R. M. Fink, C. E. Dent e K. Fink, « Nature », *160*, 801 (1947).

debbono attribuirsi ad oligo–saccaridi. La seconda zona è costituita da una sola macchia corrispondente ad una sostanza la cui natura non è stata ancora chiarita. La terza zona è costituita da più macchie non completamente risolte che sicuramente debbono attribuirsi al glucosio non trasformato e ad almeno un'altra sostanza, probabilmente un estere fosforilato. La quarta zona è costituita infine da una sola macchia attribuibile ad acido

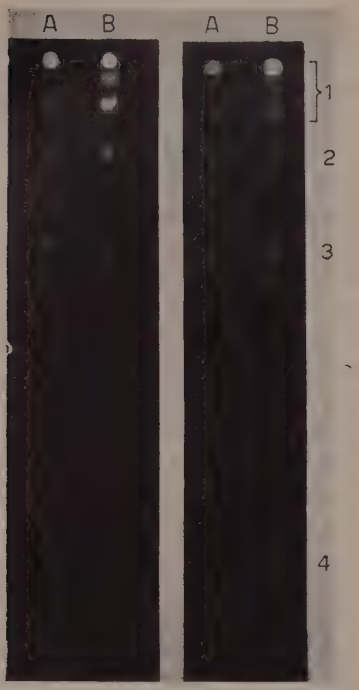


Fig. 1. – Radioautografie dei cromatogrammi dell'estratto alcoolico–acquoso di diaframma incubati con glucosio marcato senza (A) e con (B) insulina.

Fig. 2. – Radioautografie dei cromatogrammi del mezzo prima (C) e dopo incubazione. (A) senza insulina (B) con insulina.

lattico. Tra la zona terza e quarta esiste un gruppo di deboli macchie che non sono state raggruppate in una speciale zona né misurate e che probabilmente sono dovute ad acidi facenti parte del ciclo tricarbossilico.

Anche il mezzo nel quale è stato incubato il diaframma è stato cromatografato (fig. 2, Tabella I). Oltre al glucosio si vedono altre macchie più deboli corrispondenti a quelle seguenti il glucosio nella cromatografia dell'estratto alcoolico acquoso, e una macchia corrispondente all'acido lattico. Prima del glucosio e subito dopo (Rf 0,43) si notano delle macchie non ben definite che sono però anche presenti nel glucosio originale.

Tabella I.

Rf *delle macchie presenti nelle radioautografie dei cromatogramma del mezzo contenente glucosio marcato* C^{14}, *prima e dopo incubazione e dell'estratto alcoolico acquoso di diaframma dopo incubazione.*

Mezzo		Estratto alcoolico acquoso	Zone
Controllo	Dopo incubazione		
		0	
		0,03	1
		0,07	
		0,16	2
0,29	0,29	0,30	3
(0,43)	(0,43)	(0,40)	
		(0,50)	
	0,55	0,58	
	0,74	0,74	
	0,82	0,83	4

I valori tra parentesi si riferiscono a macchie molto deboli e quindi difficili da localizzare.

Dalla fig. 1 si vede chiaramente che l'insulina non ha alcuna influenza qualitativa sulla comparsa dei vari metaboliti, ma aumenta invece l'intensità di alcune zone della cromatografia. Per conoscere le quantità dei prodotti metabolici formati, la radioattività delle varie zone è stata misurata [5] facendo passare la striscia di carta cromatografata sotto la finestra di un contatore di Geiger. È stata misurata la radioattività della frazione insolubile [6] del muscolo, determinata secondo il metodo di Van Slyke [7], dell'acido lattico del mezzo cromatografato e quella del CO_2 prodotto durante

(5) R. M. Tomarelli e K. Florey, « Science », *107*, 630 (1948).

(6) In ulteriori esperienze è stato trovato che la maggior parte della attività di questa frazione è dovuta a glicogeno.

(7) D. D. Van Slyke e J. Folch, « Journ. Biol. Chem. », *136*, 509 (1940); D. D. Van Slyke, J. Plazin e J. R. Weisiger, « Journ. Biol. Chem. », *191*, 299 (1951); D. D. Van Slyke, R. Steele e J. Plazin, « Journ. Biol. Chem. », *192*, 769 (1951).

la incubazione, secondo il metodo di Villee e Hastings [8]. La percentuale di glucosio trasformato in acido lattico è circa 25 in pieno accordo con il risultato chimico di O. Walaas e E. Walaas [9].

Nella maggior parte delle nostre esperienze è stato trovato l'80–90 % dell'attività totale del glucosio scomparso dal mezzo. Tale scomparsa è stata determinata misurando su cromatografia il glucosio presente nel mezzo prima e dopo incubazione. I risultati sono riportati nella Tabella II.

TABELLA II.

Effetto dell'insulina sulla scomparsa del glucosio incubato con diaframma di ratti normali e diabetici da allossana.

(I risultati sono espressi in % dell'attività totale del glucosio nel mezzo: valori medi ± l'errore standard. Per « effetto dell'insulina » si intende la variazione (in %) tra i risultati ottenuti con e senza insulina. Il numero dei pezzi di diaframma usato è dato tra parentesi).

Numero di ratti	Scomparsa del glucosio		Effetto della insulina
	Senza insulina	Con insulina	
Normali			
6	18,3 ± 2,1	25,2 ± 3,1	+ 39 ± 9,2
	(10)	(8)	$p < 0{,}1$
Diabetici			
4	16,4 ± 1	25,5 ± 1,3	+ 56 ± 4,7
	(8)	(8)	$p < 0{,}01$

Viene considerato significativo $p \leq 0{,}1$.

(8) C. L. GEMMILL e L. HAMMAN, « Bull. Johns Hopkins Hosp. », *68*, 50 (1941); W. C. STADIE, « Yale Journ. Biol. Med. », *16*, 539 (1944); M. E. KRAHL e C. F. CORI, « Journ. Biol. Chem. », *170*, 607 (1947); M. PERLMUTTER e R. O GREEP, « Journ. Biol. Chem. », *174*, 915 (1948); M. E. KRAHL e C. R. PARK, « Journ. Biol. Chem. », *174*, 939 (1948); C. A. VILLEE e A. B. HASTINGS, « Journ. Biol. Chem. », *179*, 673 (1949); A. BELOFF-CHAIN, E. B. CHAIN, D. BOVET, F. POCCHIARI, R. CATANZARO e L. LONGINOTTI, « Bioch. Journ. », *54*, 529 (1953).

(9) O. WALAAS e E. WALAAS, « Journ. Biol. Chem. », *187*, 769 (1950).

Tutti i dettagli dei metodi sperimentali usati saranno dati in una successiva e più estesa pubblicazione.

Si è visto che sotto l'influenza dell'insulina scompare dal mezzo una maggior quantità di glucosio, confermando così con misure radioattive i risultati delle analisi chimiche già noti [8]. Benché la radioattività di tutti i metaboliti aumenti in valore assoluto, tuttavia, in rapporto all'attività totale ritrovata, aumentano significativamente soltanto la prima e la seconda zona, cioè quella del glicogeno e degli oligo-saccaridi e quella a Rf=0,16, mentre tutto il resto (zona glucosio, macchie deboli, acido lattico, residuo insolubile e CO_2) rimane costante o diminuisce. I risultati sono dati nella Tabella III.

Poiché nel solvente usato non si presentava omogenea, la macchia del glucosio è stata ricromatografata in butanolo – acido acetico – acqua (4 : 1 : 5), ottenendo oltre quella del glucosio un'altra macchia non ben definita che potrebbe essere uno zucchero fosforilato. Non si è però ancora in condizione di precisare con certezza se l'insulina faccia o no aumentare tale sostanza.

Nel muscolo diabetico non vi sono differenze significative nè qualitative né quantitative rispetto al metabolismo del glucosio nel muscolo normale. Sembra quindi che nel diabete non abbia luogo una alterazione del metabolismo glucidico del muscolo, ma che il fegato sia l'organo nel quale la capacità di metabolizzare il glucosio è notevolmente ridotta. Disturbi del metabolismo del glucosio nel fegato di animali diabetici sono ben conosciuti e sono stati dimostrati da vari autori (per esempio da Chernick e Chaikoff, e Stetten e Boxer) [10] con l'aiuto dei radioisotopi.

In base ai risultati sopra esposti si può pensare che l'insulina influisca sul metabolismo del glucosio nel diaframma di ratto aumentando i processi sintetici di immagazzinamento, lasciando invece costante o forse anche diminuendo le reazioni cataboliche. Per confermare o meno tale ipotesi sono in corso le relative ricerche.

Si fa presente che la tecnica qui utilizzata non è solamente applicabile allo studio del metabolismo del glucosio nel muscolo, ma può essere applicata con qualunque sostanza marcata su qualunque organo. Noi stessi stiamo studiando il metabolismo del glucosio in vari organi e sotto l'influenza di varie sostanze farmacologicamente attive come il 2-4-dinitrofenolo.

Il presente lavoro fa parte di un programma di ricerche sul metabolismo intermedio dei carboidrati progettato e diretto da E. B. Chain. La parte biochimica è stata svolta da E. B. Chain, A. Beloff-Chain, F. Pocchiari e R. Catanzaro. L'organizzazione e la messa a punto dell'attrezzatura del laboratorio radiochimico è stata effettuata da O. D'Agostino e C. Rossi. La parte radiochimica e l'elaborazione critica delle misure sono state eseguite da C. Rossi, I. Masi e F. Pocchiari.

(10) S. S. Chernick e I. L. Chaikoff, « Journ. Biol. Chem. », *188*, 389 (1951); D. Stetten Jr. e G. E. Boxer, « Journ. Biol. Chem. », *156*, 271 (1944).

Distribuzione del C^{14} dopo incubazione con glucosio uniformemente marc

(I risultati sono espressi in % della radioattività totale ritrovata: valori medi ± errore e standa
numero dei pezzi di diaf

Numero di ratti	CO_2			Acido lattico			Es		
							Zona 1 Rf = 0; 0,03; 0,0		
	Senza insulina	Con insulina	Effetto della insulina	Senza insulina	Con insulina	Effetto della insulina	Senza insulina	Con insulina	E in
Normali									
4	15±2	13,1±2,8	−17±8	26±3,7	23±4,2	−12±3,4	13,2±1,8	18,7±2,1	+
	(5)	(5)	$p > 0{,}5$	(5)	(5)	$p > 0{,}5$	(5)	(5)	p
Diabetici									
4	17,3±3,4	13,6±3	−21±6,7	29±3,1	24,5±2,9	−15±7,5	11,5±2,3	18,9±2,2	+
	(5)	(7)	$p = 0{,}5$	(7)	(6)	$p = 0{,}3$	(5)	(6)	p

Viene considerato significativo $p \leq 0{,}1$.

(*) Nelle due medie è compreso un valore molto alto rispetto agli altri, il che, per il limitato numero delle esperien

Tabella III.

nma di ratti normali e diabetici da allossana, con e senza insulina.

lell'insulina si intende la variazione (in %) tra i risultati ottenuti con e senza insulina. Il dato tra parentesi).

COOLICO-ACQUOSO						Residuo insolubile		
Zona 2 Rf = 0,16			Zona 3 Rf = 0,30					
a	Con insulina	Effetto della insulina	Senza insulina	Con insulina	Effetto della insulina	Senza insulina	Con insulina	Effetto della insulina
			(*)	(*)				
2	4,9±0,3	+31±5,8	24,7±0,3	20,5±3,6	—19±3,6	21±4,5	26,9±6,3	+27±3.7
	(5)	$p < 0{,}01$	(5)	(4)	$p = 0{,}4$	(4)	(3)	$p = 0{,}5$
4	5,8±0,5	+58±18	16,5±1,4	13,5±0,1	— 19±2,7	21,4±3,8	23,1±4	+8±5,5
	(5)	$p = 0{,}01$	(6)	(6)	$p > 0{,}1$	(7)	(7)	$p > 0{,}5$

parente differenza tra i diabetici ed i normali.

Fisiologia. — *Sulla formazione endogena di acetilcolina nel metabolismo della fibra miocardica e sulla sua importanza per l'automatismo del cuore* (*). Nota di IGINO SPADOLINI e ALDO GIACHETTI, presentata (**) dal Corrisp. I. SPADOLINI.

Le recenti indagini sui cosidetti ormoni locali svolte da Spadolini e dai suoi allievi in Italia (cfr. Spadolini [1]) e confermate da Bürn e collaboratori in Inghilterra [2] hanno condotto ad ammettere che l'acetilcolina si liberi anche normalmente durante il metabolismo della fibra miocardica e che nel meccanismo autoritmico di questo muscolo risiedano pure le ragioni della sua continua formazione per probabili processi di autocatalisi.

Il mediatore chimico dell'impulso nervoso colinergico dovrebbe quindi identificarsi con lo stesso agente che viene spontaneamente elaborato nel metabolismo del tessuto miocardico per sostenerne l'attività; quindi, entro certi limiti, anche indipendentemente da ogni intervento nervoso estrinseco. Infatti, secondo Spadolini (loc. cit.), il livello di formazione endogena del principio attivo può essere modificato da condizioni molteplici; soprattutto, però, sembra essere elevato dagli eccitamenti provenienti dal S.N.C. per la via delle fibre efferenti vagali.

Già le precedenti osservazioni di uno di noi (Spadolini [3]), eseguite su due cuori associati, ci avevano chiaramente indicata la genesi locale di questo principio attivo, ma in tali condizioni l'attività contrattile del preparato ventricolare donatore veniva evocata e guidata da stimoli elettrici. Si poteva perciò presumere che questi stimoli non fossero senza influenza nel determinismo della formazione endogena di acetilcolina. Si è creduto quindi opportuno sottoporre a nuove modalità d'indagine i precedenti esperimenti compiuti in questo laboratorio, e i risultati conseguiti ci appaiono ancor più interessanti dei precedenti, non solo perché confermano la liberazione spontanea di questa sostanza nel metabolismo del miocardio, ma anche perché ne dimostrano le rapide modificazioni di concentrazione che possono occorrere per stimoli di differente natura.

OSSERVAZIONI SULLA FORMAZIONE ENDOGENA DI ACETILCOLINA DIRETTAMENTE STABILITA IN BASE AL COMPORTAMENTO DEL BATTITO CARDIACO. – Non infrequentemente si è rilevato che il liquido di Ringer prelevato da un cuore che batte spontaneamente e che poi viene immesso nel ventricolo di

(*) Lavoro eseguito nel Laboratorio di Fisiologia Umana dell'Università di Firenze.

(**) Nella seduta del 9 maggio 1953.

(1) I. SPADOLINI, « Arch. Fisiol. », *52*, 467 (1952).

(2) J. H. BÜRN, *A discussion on the action of local Hormones*. « Proc. R. Soc. », *137*. 281 (1950).

(3) I. SPADOLINI, « Arch. Fisiol. », *48*, 270 (1949).

un altro preparato dotato, apparentemente, di attività normale determina in quest'ultimo una più o meno marcata azione inotropa e (assai più raramente) cronotropa negativa. Tali effetti vengono a mancare nel cuore trattato con atropina.

Ci è stato pure possibile documentare un identico effetto sullo stesso cuore, in periodi diversi della sua attività. La fig. 1 riproduce un esperimento di questo tipo: cc. 0,25 di liquido di Ringer prelevato dal cuore durante un'attività apparentemente normale e riportati a contatto del cuore dopo un lavaggio con liquido di Ringer, determinano una notevole caduta dell'inotropismo. La stessa quantità di liquido prelevato durante questa manifestazione inibitrice mostra successivamente – sempre sullo stesso cuore – una più marcata azione inotropa negativa, come se alla concentrazione iniziale, causa della prima inibizione, si sia aggiunta una ulteriore quantità di sostanza attiva originatasi nel tessuto stesso.

Fig. 1. – Dimostrazione della formazione endogena di acetilcolina durante l'attività spontanea del cuore (*Bufo vulgaris*).

Dall'alto in basso: ventricologramma isotonico del cuore isolato e sospeso alla Straub. Segnale del tempo: 20 sec. R: lavaggio con liquido di Ringer. P: prelievo dalla cannula di cc. 0,25 di liquido che ha perfuso il cuore e poco dopo arresto del chimografo per qualche tempo (circa un minuto). Successiva reintroduzione del liquido in corrispondenza della punta della freccia. Si noti il rilevante effetto inibitore che si constata ogni volta sul battito durante la fase di attività ripristinatasi dopo il lavaggio del preparato con liquido di Ringer fresco per l'azione dell'acetilcolina passata dal tessuto miocardico nel liquido di perfusione *3 h ar*: arresto della registrazione per tre ore.

L'effetto inibitore permane anche lasciando il liquido prelevato dal cuore per 3 ore a temperatura ambiente, senza aggiunta di eserina.

Tali risultati giustificano vecchie osservazioni (cfr. Hermann [4]) rimaste finora ignorate per le difficoltà che allora incontravano di una soddisfacente interpretazione.

OSSERVAZIONI SULLA FORMAZIONE ENDOGENA DI ACETILCOLINA NEL CUORE DESUNTA DAL TRATTAMENTO CON COLINESTERASI. – La colinesterasi, che notoriamente disturba il processo di sintesi acetilcolinica, manifesta sul miocardio ventricolare ed atriale di *Bufo vulgaris* un'azione diversa a seconda della sua attività enzimatica. In genere, si è osservato che estratti di cervello molto attivi tendono a ridurre la normale attività del cuore iso-

(4) H. HERMANN in G. H. ROGET et L. BINET, *Traité de Physiologie*. Tome VI, p. 274, Masson, Paris 1932.

lato. Questa inibizione può giungere – qualora si aumenti opportunamente la concentrazione del fermento – fino a provocare l'arresto completo della attività cardiaca, sia ventricolare che atriale (cfr. fig. 2). Per diluizioni assai elevate del fermento, invece, dopo una inibizione iniziale si constata una ripresa dell'attività cardiaca sotto forma di una reazione graduata ad incremento positivo, che può notevolmente superare la normale altezza del battito. Altre volte si manifesta, per azione della colinesterasi, un caratteristico ritmo alterno del cuore.

In considerazione dell'azione soprattutto inibitrice della colinesterasi sul cuore di rospo, ci siamo voluti sincerare che effettivamente si trattasse di un'azione enzimatica specifica, non dovuta all'intervento di fattori estranei (joni K) presenti nei liquidi di estrazione. Il fatto che l'inattivazione

Fig. 2. – Ripristino del battito e imponente effetto motore dell'acetilcolina in sol. 10^{-19} nel cuore di *Bufo vulgaris* reso quiescente in seguito a trattamento con acetilcolino–esterasi.

Nell'ultima parte del tracciato viene ripetuta la medesima prova constatando come il semplice lavaggio del preparato con liquido di Ringer (R) è di per sé inefficace a ripristinare il battito che di nuovo torna invece a riprendere (in forma periodica) dopo perfusione con acetilcolina (AC) 10^{-13}. (CE: acetilcolino–esterasi).

col calore di un estratto, che prima aveva manifestato intensa attività inibitrice, renda il liquido pressoché inattivo sull'altezza delle contrazioni cardiache, ci sembra una ragione sufficiente per concludere che le manifestazioni conseguenti all'applicazione di estratti attivi sono veramente da imputarsi all'attività colinesterasica di essi.

Azione dell'acetilcolina sul cuore arrestato da colinesterasi. – La dimostrazione che la presenza di acetilcolina è un fattore indispensabile per il normale svolgersi del battito cardiaco (oltre quella ricavata dall'estinzione enzimatica del battito) è stata messa in luce da questo terzo gruppo di osservazioni, ove appare manifesto che il battito arrestato da colinesterasi, per distruzione idrolitica del principio attivo, non può essere ripristinato che allorquando si ricostituisce nel preparato una determinata riserva di acetilcolina, destinata, con molta probabilità, a ristabilire un certo equilibrio iniziale in favore della sintesi autocatalitica dell'acetilcolina stessa.

La sostituzione alla soluzione di acetilcolina – per quanto diluitissima – di solo liquido di Ringer, non si è mai dimostrata in grado di risollevare il battito cardiaco arrestato dall'attività dell'enzima.

Il tracciato della fig. 2 mostra chiaramente la specificità di una soluzione molto diluita di acetilcolina nel ripristinare l'automatismo cardiaco. Dopo che il battito si era estinto per azione della colinesterasi, un semplice lavaggio con liquido di Ringer non ha alcun effetto, mentre la perfusione con acetilcolina in soluzione 10^{-19} ripristina pressoché immediatamente il battito cardiaco, *elevandone notevolmente l'ampiezza* ed in parte anche la frequenza. Un nuovo trattamento con colinesterasi estingue di nuovo il battito, che ripetuti lavaggi del preparato non riescono a ripristinare; però una soluzione 10^{-13} di acetilcolina – di cui all'inizio dell'esperimento avevamo accertato l'attività inibitrice – è in grado ora di far riassumere al cuore un ritmo periodico.

Che nel periodo di esaltata attività motoria, consecutivo alla ripresa del battito determinata dall'acetilcolina, continui a formarsi ed a liberarsi dalla fibra miocardica il principio attivo, lo dimostra il fatto che il liquido che bagna il cuore in queste condizioni esplica un effetto inibitore allorché, in seguito, venga aggiunto alla soluzione salina che perfonde il viscere in un periodo normale della sua attività.

* * *

La genesi endocellulare dell'acetilcolina durante lo svolgersi dell'attività automatica del cuore isolato, ci sembra ormai, con queste ultime indagini, documentata in modo inequivocabile.

Non ci risulta che il problema sia stato affrontato finora esaltando la distruzione idrolitica del principio attivo, come mezzo d'indagine per rilevarne la influenza sul meccanismo contrattile della fibra miocardica. Utilizzando questo metodo ci appare oggi chiaro che durante il battito cardiaco l'acetilcolina si libera in una certa quantità nel tessuto tanto da diffondere nel liquido salino di perfusione e da mostrare i suoi tipici effetti inibitori allorché venga saggiata, sullo stesso preparato, in periodo di normale attività. E altrettanto documentato ci appare il fatto che la inibizione del battito, dopo trattamento con colinesterasi, sia realmente dovuta ad una accentuata deficienza che si stabilisce nella formazione endogena di acetilcolina.

La ripresa del battito, evocata da questa stessa sostanza, nel cuore arrestato da colinesterasi ci ha dato, inoltre, modo di chiarire il meccanismo di quell'*azione difasica* posseduta dall'acetilcolina, sulla quale uno di noi (Spadolini) va richiamando da tempo l'attenzione degli sperimentatori e che sembra non adeguatamente apprezzata da alcuni Autori stranieri, i quali di recente si sono occupati di questo problema (cfr. Webb [5]).

(5) J. L. WEBB, « Brit. J. Pharmacol. », 5, 335 (1950).

Com'è noto, a parità di ogni altra condizione, l'acetilcolina esercita un effetto motore, talvolta imponente, a concentrazioni eccezionalmente piccole, effetti inibitori a concentrazioni invece relativamente maggiori.

Dagli attuali esperimenti è emersa la nozione che l'effetto motore è legato a un determinato livello acetilcolinino endogeno, vigente nella fibra miocardica. Livello stabilito dal metabolismo intrinseco della fibra stessa, il quale, se si trova situato al di sotto dei valori massimali cui possono giungere le concentrazioni ad effetto motore è in grado di permettere ad una ulteriore aggiunta di acetilcolina di elevare l'ampiezza del battito: se, al contrario, esso livello supera o sta per superare detti valori, tale aggiunta non può dar luogo che all'effetto inibitore più o meno marcato, proprio delle concentrazioni più elevate.

L'acetilcolina può quindi considerarsi come l'ormone dell'automatismo cardiaco. In base agli esperimenti eseguiti in diverse specie animali si deve ammettere che, mentre in alcune di esse (per esempio, mammiferi) la formazione endogena di acetilcolina nel cuore è sovente assai al disotto dei massimi livelli motori, talché l'aggiunta di questa sostanza in soluzioni molto diluite può elevare in modo critico l'inotropismo, tanto da registrare aumenti di oltre il 200 per 100 in condizioni isotoniche, in altre specie animali, ove detti livelli motori massimali sono quasi la norma, l'aggiunta di acetilcolina provoca rapidamente fenomeni inibitori. In quest'ultime condizioni si trovano generalmente il cuore degli anfibi e, per nostra esperienza, anche gli atrii dei cheloni.

Su queste basi noi abbiamo pure giustificata l'influenza generalmente inibitrice esercitata dal vago sul miocardio. Gli impulsi vagali facilitando la formazione di acetilcolina di origine endogena non giungono d'ordinario ad esplicare il loro effetto che in una sola direzione: quella cioè, inibitrice, specialmente quando la produzione locale di questa sostanza si trovi già a quei livelli che abbiamo indicati come massimi per l'effetto motore; l'aumento della concentrazione di acetilcolina non potendo allora corrispondere che a manifestazioni frenatrici e rallentatrici, oppure di arresto, caratteristiche delle dosi relativamente più elevate di tale sostanza.

Che l'effetto motore acetilcolinico, cui sopra è stato fatto cenno, sia legato a concentrazioni notevolmente piccole di sostanza, ci è stato confermato dall'impiego stesso della colinesterasi, la quale adoperata in soluzioni assai diluite si dimostra sovente capace di aumentare temporaneamente l'ampiezza del battito cardiaco, per una distruzione parziale del principio attivo, tale da portarlo a quelle piccole concentrazioni che esplicano appunto un effetto motore.

Altri parametri ancora, oltre la concentrazione della sostanza attiva, debbono essere presi in considerazione per rappresentare nel modo più adeguato, l'*effetto difasico* posseduto dall'acetilcolina, ma della loro natura e del loro significato il lettore potrà prendere nozione in un nostro lavoro di prossima pubblicazione « in Archivio di Fisiologia ».

Antropologia. — *I profanerantropi di Swanscombe e di Fontéchevade.* Nota (*) preliminare del Socio SERGIO SERGI.

Ai Fanerantropi fossili (*Homo sapiens fossilis*) sono stati attribuiti a più riprese alcuni reperti ritenuti contemporanei o più antichi di quelli dei Paleantropi. La maggior parte dei resti descritti da vari autori in tempi e circostanze diverse non possono essere presi in seria considerazione. Restano in discussione solo quei reperti dal Vallois riuniti nel gruppo dei *Praesapiens*, che hanno una posizione stratigrafica e cronologica accertata, ma la cui diagnosi morfologica è tuttora dibattuta ed incerta per la insufficienza dei loro frammenti. Sono questi i resti di Swanscombe e di Fontéchevade a cui si possono aggiungere quelli di Piltdown già tanto contrastati.

L'UOMO DI SWANSCOMBE (1). – In Inghilterra nel Kent, presso Swanscombe, nei depositi di ghiaia della cava di Barnfield, il Marston scopriva nel giugno del 1935 un occipitale umano fossile, e, nove mesi più tardi, nel marzo 1936 un parietale umano sinistro nelle medesime condizioni di conservazione. Le due ossa sono dello stesso cranio, perché si articolano perfettamente fra loro. Furono trovate a sette metri di distanza nello stesso livello geologico.

I depositi di ghiaia di Barnefield, che appartengono alle formazioni pleistoceniche dell'alta terrazza (100 piedi) della riva sinistra del Tamigi, erano già da molto tempo famose per i rinvenimenti di industrie paleolitiche e resti di mammiferi pleistocenici, ed erano state oggetto di investigazioni fin dal 1912. I geologi, l'Oakley in particolare, ritengono che le ghiaie alle quali sono attribuite le due ossa umane rinvenute appartengono ad una formazione interglaciale con fauna calda ritenuta corrispondente al Mindel–Riss. Questa veduta si accorda con quelle del Breuil sulla cronologia delle formazioni quaternarie dell'Inghilterra, ma trova dissenziente il Vaufrey, secondo il quale si potrebbe risalire fino all'interglaciale Riss–Würm. Associate al fossile nello stesso strato di ghiaia si sono rinvenute selci lavorate di tipo acheuleano.

L'uomo di Swanscombe appare quindi quale un rappresentante della cultura acheuleana. Di recente Oakley e Montague (1949) hanno sottoposto le ossa di Swanscombe alle prove del metodo del fluoro le quali hanno confermato l'antichità del fossile quale era stata giudicata. L'anatomico le Gros Clark che ha esaminato il calco endocranico e la morfologia delle due ossa, pur rilevando in queste particolarità anatomiche eccezionali nell'uomo

(*) Presentata nella seduta dell'11 aprile 1953.

(1) *Report on the Swanscombe skull.* « Journal of the Royal Anthropological Institute of Great Britain and Ireland », vol. LXVIII. In particolare le relazioni di OAKLEY, HAWKES, LE GROS CLARK, MORANT.

recente, conclude che Swanscombe non rivela caratteri tali che lo differenzino da quelli di un uomo attuale. Il Morant, che ha trattato della forma del cranio ricorrendo specialmente a misure, rileva che queste nel complesso non dànno la possibilità di distinguerlo da quello dell'uomo attuale. I caratteri che egli trova più rilevanti e che considera in particolare primitivi, sono: lo spessore eccezionale delle ossa, la inclinazione ridotta del basioccipitale; la presumibile bassezza della squama del temporale, che doveva essere eccezionale, e la larghezza biasterica sia assoluta che relativamente alle altre dimensioni di larghezza.

Il Morant conclude, dopo aver proceduto ai confronti con Steinheim e Spy, che i soli caratteri metrici delle ossa parietali e dell'occipitale non permettono di distinguere Steinheim o Swanscombe dall'uomo moderno, ma sono sufficienti a separarli dai neandertaliani. Aggiunge ancora che si potrebbe ammettere che la parte andata distrutta del cranio di Swanscombe avrebbe potuto possedere caratteri differenti da quelli degli uomini attuali, così, come si osserva in Steinheim, per la visiera frontale.

Recentemente (1952) Breitinger [2] ha espresso l'opinione che per le caratteristiche metriche e perigrafiche da lui rilevate sul calco di Swanscombe si deve supporre che il frontale abbia posseduto il *torus frontalis* e per la ricostruzione plastica del calvario da lui compiuta, questo sia da avvicinare a quello di Steinheim piuttosto che a quello di *Homo sapiens*.

Le osservazioni da noi compiute sul calco delle ossa del cranio di Swanscombe (calco che debbo alla gentilezza del prof. Trevor) e la comparazione che abbiamo potuto compiere con il cranio del Circeo, ci hanno condotto a rilevare notevoli convergenze tra essi, sia per le dimensioni che per la morfologia, specialmente del parietale, che qui accenniamo brevemente e delle quali in altra sede daremo più ampia dimostrazione analitica. Le convergenze riguardano la misura dell'altezza basion–bregma, la posizione del lambda principale, la posizione dell'inion, il diametro biasterico, l'ubicazione degli asterion e la forma e posizione del parietale. Queste convergenze si possono facilmente rilevare con la sovrapposizione dei relativi craniogrammi ed in particolare di quello obliquo fronto–sagittale (figg. 1, 2, 3, 4, 5). Nel complesso tutta l'architettura generale della parte cranica conservata ricorda quella dei Paleantropi neandertaliani, specialmente per la grande estensione della regione occipitale all'indietro ed in basso e di lato, e per il forte grado di platicefalia. Così come nei neandertaliani le forze espansive in direzione laterale della regione occipitale si manifestano lateralmente con l'allontanamento dell'angolo asterico di ogni parietale dal piano mediano, e conseguente aumento del diametro di larghezza biasterico. Alla espansione ipolambdica in direzione occipitale sotto il piano orizzontale che passa a livello del lambda fa riscontro l'appiattimento della parte soprastante (sopralambdica) del parietale, cioè quella platicefalia parietale che corrisponde alla

(2) E. Breitinger, *Zur Morphologie und systematischen Stellung des Schädelfragmentes von Swanscombe*. « Homo », 3° Band, 3° Heft 1952.

zona in cui le forze di espansione si sono fatte risentire in minor grado. La espansione occipitale e la platicefalia si manifestano in Swanscombe con le stesse condizioni architetturali che sono comuni ai Paleantropi neandertaliani [3], e come in questi è anche verosimile che il frontale, che è perduto, abbia probabilmente posseduto il *torus*, possibilità non esclusa dal Morant ed ammessa senza riserva ora dal Breitinger. Ma ciò non si può affermare in modo assoluto, perché, come rileva Ashley Montagu a proposito del cranio di Wellbrook, può anche coesistere un frontale senza visiera con una ossificazione della volta cranica di insolito spessore. Swanscombe non è un Fanerantropo, ma piuttosto un tipo paleantropiforme precursore dei Fanerantropi, un Profanerantropo.

L'UOMO DI FONTÉCHEVADE [4]. – Nell'agosto 1947 la figlia di Henri Martin, lo scopritore dei resti de La Quina, trovò in un deposito preistorico della cava di Fontéchevade (Charente) a m. 2,60 di profondità, un piccolo frammento di osso frontale umano (Fontéchevade I) e, poco tempo dopo, la vòlta di un altro cranio umano (Fontéchevade II). Lo strato al quale appartengono questi resti è stato attribuito all'interglaciale Riss–Würm ed esso contiene elementi d'industria paleolitica di tipo tajaciano e fauna calda temperata caratterizzata da *Rhinoceros Merckii*, *Dama sp.*, *Cuon*, *Testudo graeca*. La posizione stratigrafica non è contestata ed è la prima volta che sono segnalati in Francia reperti umani così antichi. Così afferma Vallois al quale si deve l'illustrazione dei reperti. Fontéchevade II è rappresentato dal parietale sinistro, dalla metà superiore di quello di destra e dalla porzione superiore frontale. Alcuni altri piccoli frammenti appartengono al parietale destro ed all'occipitale. Lo spessore delle ossa è considerevole (da 7 a 9 mm.) come in Swanscombe e in Piltdown. Le suture sono in gran parte obliterate ed il Vallois attribuisce al cranio un'età tra 40 e 50 anni. Il contorno sagittale mediano appare per largo tratto del parietale molto pianeggiante. La curva del tratto del frontale conservato è più pronunciata. Nella norma posteriore le pareti dei parietali si piegano lateralmente a partire dal piano mediano fino a raggiungere la massima distanza (154 mm.) alquanto in basso e quindi si volgono in dentro. Il Vallois ritiene che la parte mancante del frontale sia stata dello stesso tipo di quello dell'uomo attuale, cioè priva del *torus* che è caratteristico dei neandertaliani. Egli trova la conferma di questo suo giudizio nel frammento del frontale di Fontéchevade I che è costituito dalla porzione glabellare del frontale nella quale non vi è traccia di *torus*. Il carattere più saliente che distacca Fontéchevade dai Fanerantropi è dato dalla grande larghezza a livello degli asterion così come si incontra nel cranio di Swanscombe, e così come

(3) SERGIO SERGI, *Craniometria e craniografia del primo paleantropo di Saccopastore*. « Ricerche di Morfologia », 1944. Qui è illustrata l'importanza della sezione basion bregma asterion.

(4) H. VALLOIS, *Fontéchevade fossil men*. « Amer. J. Phys. Anthrop. », 1949.

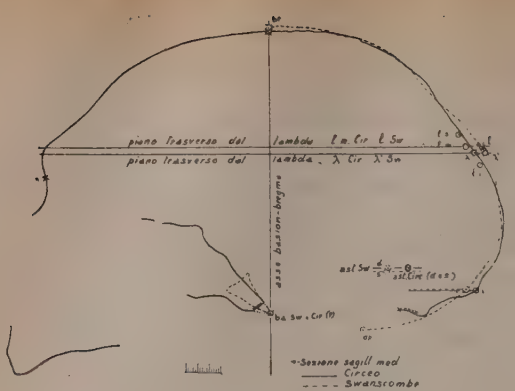


Fig. 1.

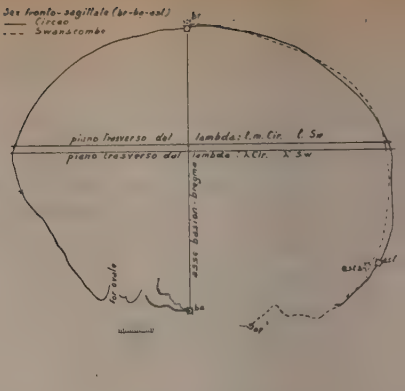


Fig. 2.

Figg. 1, 2. – Contorno sagittale mediano (fig. 1) e contorno obliquo bregma-basion-asterion (fig. 2) dei crani di Swanscombe e del M. C sovrapposti sull'asse basion-bregma e sul piano lambdico. Notare le somiglianze.

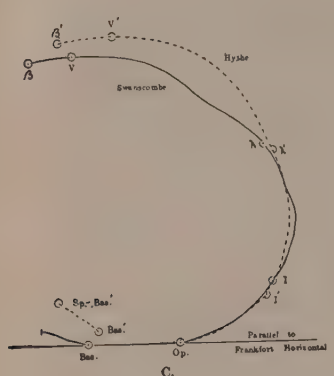


Fig. 3.

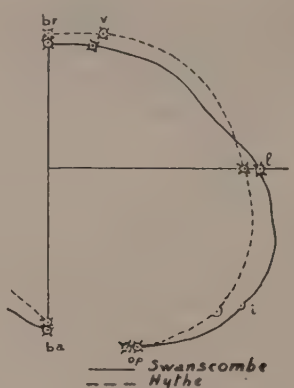


Fig. 4.

Fig. 5.

Fig. 3. – Riportata da Morant (*The form of the Swanscombe skull*, p. 87). Contorno sagittale del cr. di Swanscombe e del cr. del femminile medioevale di Hythe (Kent) sovrapposti sulla orizzontale di Francoforte, presunta da Morant per Swanscombe corrispondente orizzontale basion-opistion. Questo orientamento è inadatto.

Figg. 4, 5. – Il contorno sagittale del tipo di Hythe sovrapposto a quello di Swanscombe (fig. 4) ed a quello del M. Circeo (fig. 5) sul basion-bregma ed il piano lambdico, confrontare con fig. 3 e rilevare le grandi differenze che risultano dal diverso orientamento ado L'orientamento sull'asse basion-bregma rivela il distacco del tipo Hythe e le somiglianze Swanscombe-Circeo.

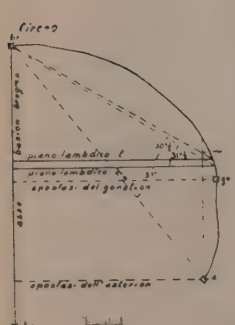


Fig. 6.

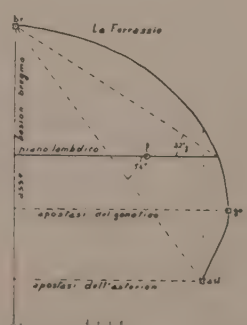


Fig. 7.

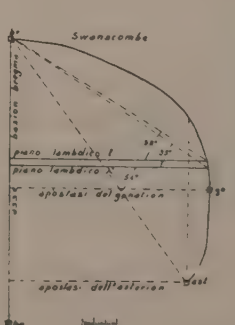


Fig. 8.

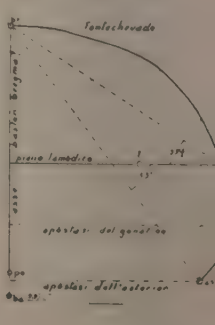


Fig. 9.

Figg. 6, 7, 8, 9. – Sezioni bregma-basion-asterion dei cr. del M. Circeo, di La Ferrassie, di Swanscombe, di Fontechevade. Per Fontéche l'asse bregma basion è *supposto* 10 mm. sotto il porion adottato da Vallois (*Fontéchevade fossil men*, fig. 4). Le curve del Circeo, di La Fer **e di Fontéchevade sono rilevate sugli originali, quella di Swanscombe sul calco.**

accade nei Paleantropi neandertaliani. A questa condizione si associa la grande bassezza del cranio (platicefalia). Il Vallois conclude che l'architettura del cranio cerebrale non è la stessa di quella degli uomini attuali, pur avendo in comune con questi la sopradescritta assenza del *torus* nella regione glabellare. Anche noi, dopo avere esaminato con il gentile permesso del Vallois al Musée de l'Homme il frammento di Fontéchevade II siamo del parere che questo abbia una morfologia diversa da quella dell'uomo attuale senza escludere del tutto che esso abbia potuto subire una qualche deformazione artificiale postuma. Il cranio di Fontéchevade si distingue da quello dei Fanerantropi, cioè dall'uomo attuale, in particolare per la eccezionale larghezza biasterica, per il forte abbassamento della vòlta e per la posizione notevolmente abbassata del diametro di larghezza massimo. Questi tre fatti sono l'espressione della particolare espansione latero-posteriore della regione occipitale, come si rileva dalla curva bregma-asterion da me rilevata dall'originale (fig. 9, Parigi, maggio 1951). In Fontéchevade risulta che la spinta evolutiva della cavità cranica si svolge in direzione occipitale così come avviene nei Paleantropi, discostandosi da quella dei Fanerantropi nei quali la spinta evolutiva è in direzione della vòlta. Fontéchevade non è un Fanerantropo (*Homo sapiens*) ma una forma che si accosta a quella dei Paleantropi, è un Profanerantropo paleantropiforme.

La posizione morfologica dell'uomo di Swanscombe e di quello di Fontéchevade di fronte alle altre forme fossili umane pleistoceniche, allo stato attuale delle nostre conoscenze, si presenta incerta perché i resti sono limitati soltanto a porzioni del cranio cerebrale, mentre nulla si sa della faccia, che pure ha un enorme valore per la discriminazione dei tipi. La incompletezza del cranio cerebrale si presta poi anche a giudizi disparati. Evitando qualsiasi speculazione che possa travisare la valutazione obiettiva di quanto si può rilevare dalla constatazione dei fatti, si può asserire che queste forme partecipano sia di quelle dei Paleantropi che di quelle dei Fanerantropi, le caratteristiche che li accostano ai Paleantropi sono di ordine architettonico generale e credo che siano state fino ad ora sottovalutate. Sono la platicefalia, la espansione latero-posteriore della regione occipitale, la espansione basale dei parietali. Il cranio ancora soggiace ad una condizione primitiva rappresentata dallo sviluppo accentuato della sua base, condizione primitiva che si incontra in grado diverso nei Paleantropi ed è ancora più accentuata nei Sinantropi.

La tipologia *paleantropiforme* dei crani di Swanscombe e di Fontéchevade sommariamente prospettata fin qui nella mia esposizione si può in modo particolare rilevare dallo esame del perigramma basion-bregma-asterion (ved. figg. 6, 7, 8, 9). In questa sezione nella quale l'altezza basion-bregma è assunta come asse verticale ed il piano lambdico come orizzontale ho considerato la normale dall'asterion all'asse basion-bregma da me detta *apostasi* (distanza) *dell'asterion* e la normale dal punto più distante della curva bregma-asterion (da me detto *gonation* o ginocchio) all'asse basion-bregma, da me indicata come *apostasi del gonation*. Ho determinato poi il rapporto centesimale di ognuna delle due apostasi (apostasi dell'asterion e apostasi del gonation) all'altezza basion-bregma. Questi rapporti ho chiamato rispettivamente *indice di apostasi dell'asterion* e *indice di apostasi del gonation*

Ho infine considerato l'angolo d'inclinazione della curva bregma–asterion sul piano lambdico e cioè l'inclinazione di tutto il parietale nella sezione obliqua basion–bregma–asterion e l'angolo d'inclinazione del segmento epilambdico della curva bregma–asterion cioè del segmento della curva del parietale soprastante al piano lambdico (segmento bregma–punto paralambdico). Il valore di quest'angolo individua il grado di elevazione della volta del cranio al di sopra del piano lambdico nella predetta sezione obliqua (figg. 6, 7, 8, 9, 10).

Le misure rilevate sui craniogrammi da me eseguiti sul calco di Swanscombe e sull'originale di Fontéchevade sono state comparate con le misure dei craniogrammi di un gruppo di Paleantropi di cui del tutto nuovi quelli del Circeo e di La Ferrassie e di un gruppo di Fanerantropi appartenenti ai più diversi tipi umani (ved. Tabella).

TABELLA.

	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)
	Asse. Altezza basion–bregma	Apostasi dell'asterion dall'asse	Indice di apostasi dell'asterion $\frac{100\cdot(2)}{(1)}$	Apostasi del gonation dall'asse	Indice di apostasi del gonation $\frac{100\cdot(4)}{(1)}$	Angolo di inclinazione del segmento epilambdico della curva bregma–asterion
	mm.	mm.		mm.		
a) PALEANTROPI						
Circeo	123	82	**66**	89	72	30° ½–31° ½
Rhodesia	128	85	**66**	88	68	35°
Saccopastore I	109	70	**64**	82	75	34°
La Chapelle	129	84	**64**	97	74	28° ?
Gibraltar	120	75	**62**	84	70	33° ½
La Ferrassie	132	82	**62**	94	71	32° ½
b) PROFANERANTROPI						
Fontéchevade	117??	82	**64??**	95	74	33° ½
Swanscombe	125	78 (80)	**62**	88	70	32°–33°
c) FANERANTROPI						
Samoiedo	126	77	**61**	85	67	36°
Vico Gargano	125	76	**60**	86	68	34° ½
Batua	114	69	**60**	81	71	37° ½
Calabrese	129	77	**59**	87	67	34°–39°
Romano brachi	124	69	**55**	79	63	39°
Italiano inf.	121	66	**54**	77	63	39°
Fuegino	133	73	**54**	81	60	38° ½
Eschimese	133	73	**54**	76	57	41°
Romano dolico	136	73		83	61	42°
Melanesiano	126	68	**53**	76	60	38°
Australiano	143	76	**53**	85	59	40° ½
Sumatrano	128	67	**52**	79	61	36° ½

Nella tabella dove sono riportati i valori delle misure e gli indici relativi la serie dei crani è ordinata secondo il valore decrescente dell'indice di apostasi dell'asterion. Così ordinati i crani risultano distinti in tre gruppi: il primo comprende tutti i Paleantropi con i valori maggiori, il secondo, intermedio, comprende i Profanerantropi di Swanscombe e di Fontéchevade con valori molto prossimi ai primi ed il terzo tutti i Fanerantropi con i valori minori. La seriazione rispecchia la corrispondente posizione morfologica già rilevata di Swanscombe e di Fontéchevade. Nel gruppo dei Fanerantropi sono da distinguere due sottogruppi, il primo con valori maggiori, il secondo con i minori. Il primo sottogruppo comprende crani bassissimi, platicefali, con indice di camepeinocefalia. Ad essi appartengono due estremi tipi umani, il Samoiedo, fortemente brachicefalo, il Batua, tipico dolicocefalo e due crani italiani di un tipo umano arcaico con frontale molto declive e con occipitopetia parapaleantropica, dei quali avrò occasione di parlare altrove. La stessa seriazione è riprodotta in un diagramma (fig. 12) che a prima vista rivela la situazione dei tre diversi gruppi. I valori altezza basion bregma ed apostasi dell'asterion riportati in una tavola di correlazione mettono in rilievo la situazione reciproca dei crani esaminati (fig. 11).

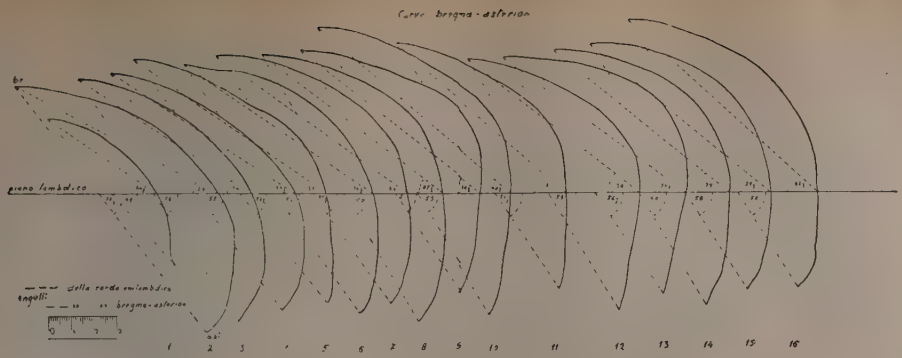


Fig. 10.

Curve bregma–asterion nel piano basion–bregma–asterion. – 1. Cimpanzè. Ist. Antrop. Roma (3253). – 2. La Chapelle. Mus. paleont. Paris. – 3. Saccopastore I. Ist. Antrop. Roma. – 4. Gibraltar. Royal College of Surgeons London. – 5. Rhodesia. British Museum London. – 6. Vico Gargano antico. – 7. Samoiedo. Ist. Anat. Oxford (as. 20) 747. – 8. Pigmeo Batua. Ist. Anat. Oxford (Aus. 20.972). – 11. Esquimese. Ist. Anat. Oxford (Am–10) 844. – 12. Melanesiano. Ist. Antrop. Roma (904). – 13. Sumatrano. Ist. Antrop. Roma (2626). – 14. Italiano inf. I. Ist. Antrop. Roma (394). – 15. Romano moderno brachicefalo (indice cranico 84). – 16. Romano moderno dolicocefalo (indice cranico 70).

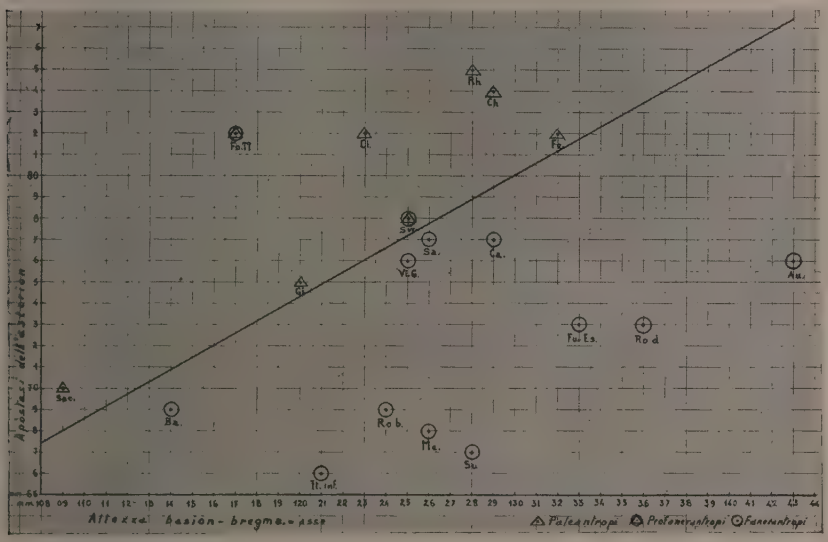


Fig. 11.

Ci.: Circeo – Rh.: Rhodesia – Sac.: Saccopastore I – Ch.: La Chapelle – Gi.: Gibraltar – Fe.: La Ferrassie – Fo.: Fontéchevade – Sw.: Swanscombe – Sa.: Samoiedo – Vi.G.: Vico Gargano – Ba.: Batua – Ca.: Calabrese – Ro.b.: Romano brachicefalo – It. inf.: Italiano infantile – Fu.: Fuegino – Es.: Esquimese – Ro.d.: Romano dolicocefalo – Me.: Melanesiano – Au.: Australiano – Su.: Sumatrano.

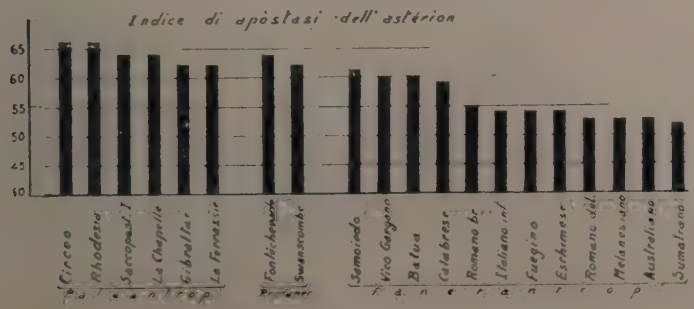


Fig. 12.

Anche dalla tabella [colonna (6)] si rileva che l'angolo d'inclinazione epilambdico parietale nella sezione obliqua è minore nei Paleantropi e nei Profanerantropi e maggiore nei Fanerantropi. Si rivela così il particolare significato che ha la forte occipitopetia obliqua laterale accompagnata al forte abbassamento della curva epilambdica laterale. È una condizione morfologica che caratterizza i Profanerantropi di Swanscombe e di Fontéchevade e li accomuna ai Paleantropi.

Si vogliono trovare d'altra parte gli accostamenti con i Fanerantropi in alcune caratteristiche morfologiche regionali del cranio, ad esempio del frontale per l'assenza del *torus* (Fontéchevade) ed ancora in caratteri metrici e rapporti tra i medesimi che rientrano nel campo della variabilità del tipo fanerantropico (Swanscombe secondo Morant). Il confronto con il cranio del tipo paleantropico, d'altra parte, ha mostrato come alcuni di questi attributi metrici sono a loro volta anche propri degli stessi. Un fatto che ancora non ha trovato una spiegazione soddisfacente è il forte spessore delle ossa della vòlta dei crani in esame. Fino a che non si avrà conoscenza delle parti del cranio mancante ed in particolare della faccia non si può fare un'affermazione categorica sicura sugli attributi dei tipi in questione. Basta ricordare in proposito la mandibola del cranio di Piltdown che è tanto lontana dalle forme fanerantropiche mentre il frontale dello stesso cranio appare privo del *torus*.

Comunque Swanscombe e Fontéchevade sono i documenti più antichi che più si accostano alle forme attuali perché presentano caratteristiche che partecipano di una morfologia che alquanto li avvicina a quella dei fanerantropi senza poterli identificare con questi ai quali potrebbero essere geneticamente imparentati.

Nel momento attuale alcuni (Vallois ed altri) vogliono separare in modo assoluto i resti di Swanscombe e di Fontéchevade da tutto il complesso paleantropico così da considerarli appartenenti ad una linea filetica indipendente.

In contrasto con questa veduta è necessario di prendere nella dovuta considerazione quelle caratteristiche paleoantropiformi che sono state ricordate nell'esame di quei resti e che debbono fare pensare ad una più o meno intima relazione di parentela con i Paleantropi (Sergi).

Non si può dire per la loro incompletezza in che misura possono considerarsi quali forme intermedie tra le protoantropiche e paleantropiche da una parte e le fanerantropiche dall'altra, né esse possono considerarsi a loro volta forme indipendenti da queste ultime come non possono considerarsi indipendenti dalle paleantropiche.

Se accanto a queste forme poniamo quelle dei Paleantropi palestinesi che possiedono insieme caratteri paleantropici e caratteri fanerantropici e se ricordiamo ancora le forme prewürmiane preneandertaloidi di Steinheim e di Saccopastore che possiedono caratteri fanerantropiformi, oggi appare chiaro che gli ominidi attuali devono trovare le loro origini e le loro radici non in un unico tipo precorritore comune, ma già in più di un tipo: seguendo questa via si potrà forse chiarire nel futuro quel complesso di forme che appare di poi subito più tardi a costituire i diversi tipi di Fanerantropi da cui si continueranno gli ominidi dell'olocene; esse cioè avevano già più di un tipo di precursore in un pleistocene più antico.

NOTE PRESENTATE DA SOCI

Analisi matematica. — *Un problema di valori al contorno per l'equazione* $\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ (*). Nota I di BRUNO PINI, presentata (**) dal Socio M. PICONE.

Indichiamo con $\mathfrak{L}$ ed $\bar{\mathfrak{L}}$ rispettivamente l'operatore parabolico

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial}{\partial y}$$

ed il suo aggiunto

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial y}.$$

Essendo $x = \chi_i(y)$, $i = 1, 2$, due funzioni dotate delle derivate prime continue sull'intervallo $a \leq y \leq b$ e tali che $\chi_1(y) < \chi_2(y)$, indichiamo con D il dominio $a \leq y \leq b$, $\chi_1(y) \leq x \leq \chi_2(y)$; con c_1 e c_2 le porzioni di caratteristiche che limitano inferiormente e superiormente il dominio D e con γ_i gli archi di equazioni $x = \chi_i(y)$, $a \leq y \leq b$.

Nella presente Nota consideriamo il problema della determinazione di una funzione $v(x, y)$ tale che

$$\bar{\mathfrak{L}}\mathfrak{L}[v] = 0 \qquad \text{in} \quad D - \mathfrak{F}D \tag{1}$$

$$\left.\begin{aligned} v &= f \qquad \text{su} \quad \mathfrak{F}D \\ \frac{\partial v}{\partial x} &= g_i \qquad \text{su} \quad \gamma_i , \end{aligned}\right\} \qquad i = 1, 2, \tag{2}$$

essendo f e g_i assegnate funzioni che preciseremo più avanti. Questo problema è, per l'equazione (1), l'analogo del problema biarmonico fondamentale. Un'altra estensione di questo problema alle equazioni paraboliche si ha considerando in luogo della (1) l'equazione $\mathfrak{L}\mathfrak{L}[v] = 0$ (1).

Per il problema biarmonico si deve a S. Zaremba una trattazione del seguente tipo (2): l'equazione $\Delta\Delta[v] = 0$ viene sostituita con $\Delta[v] + u = 0$, con u funzione armonica; perciò

$$v = \int_{\mathfrak{F}D} v \frac{dG}{dn}\, ds + \int_{D} u G\, d\tau$$

(**) Lavoro eseguito nel Seminario Matematico dell'Università di Bologna.

(*) Nella seduta del 9 maggio 1953.

(1) B. PINI, *Traduzione in equazioni integrali di un problema analogo al problema biarmonico fondamentale*, in corso di stampa nei « Rend. Sem. Mat. di Padova ».

(2) S. ZAREMBA, *Sur l'intégration de l'équation biharmonique*. « Bull. de l'Acad. des Sci. de Cracovie », 1-29 (1908).

dove D è il dominio cui ci si riferisce e G la relativa funzione di Green; fissato un sistema $\{\varphi_n\}$, ortonormale su D e completo in un certo senso, di funzioni armoniche, si pone

$$u \sim \sum_1^\infty k \left(\int_{\mathcal{F}D} \left(\varphi_k \frac{dv}{dn} - v \frac{d\varphi_k}{dn} \right) ds \right) \varphi_k .$$

A differenza di Zaremba, il quale si è servito del detto procedimento, nel caso di un dominio piano, nell'intento di costruire la soluzione, supposta nota, G. Fichera [3] si è servito del medesimo procedimento a scopo esistenziale. Egli, senza far ricorso alla funzione di Green e relativamente a un dominio D di uno spazio a un numero arbitrario di dimensioni, prova l'esistenza di una funzione biarmonica in $D - \mathcal{F}D$ tale che per quasi-tutti i punti M della $\mathcal{F}D$, è

$$\lim_{P \to M \ (su \ n_M)} u(P) = f(M) \quad , \qquad \lim_{P \to M \ (su \ n_M)} \frac{du(P)}{dn} = g(M)$$

(dove n_M indica la normale alla $\mathcal{F}D$ nel punto M, diretta verso l'interno di D) nell'ipotesi che esista una funzione H (P) continua insieme alle sue derivate prime su D e dotata di un $\Delta[H]$ di quadrato sommabile su D, tale che

$$H = f \quad , \qquad \frac{dH}{dn} = g \quad \text{su} \quad \mathcal{F}D .$$

In ipotesi analoghe a quelle fatte da Fichera, si può provare l'esistenza di una soluzione di (1), regolare in $D - \mathcal{F}D$, che assume i valori f al contorno, in senso ordinario, mentre la sua derivata rispetto a x converge, lungo quasi-tutte le caratteristiche, agli assegnati valori g_i su γ_i.

Richiamandoci a un teorema di Marcinkiewicz-Zygmund, proveremo anche come, supponendo che f, g_i sia la *traccia* su $\mathcal{F}D$ di una funzione opportunamente regolare, si possa provare l'esistenza di una funzione che in $D - \mathcal{F}D$ è soluzione regolare di (1), che assume su $\mathcal{F}D$ i valori f, mentre la sua derivata rispetto a x assume su γ_i i valori g_i, gli uni e gli altri in senso ordinario, anziché in un senso generalizzato come quello considerato da Fichera.

Passando dal piano ad uno spazio $(n+1)$-dimensionale, se S è una superficie regolare di cui

$$x_i = \chi_i(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{n-1}; y), \qquad i = 1, 2, \cdots, n$$

sia una rappresentazione parametrica sull'intervallo $\alpha_k^0 \leq \alpha_k \leq \alpha_k^1$ $(k = 1, 2, \cdots, n-1)$, $a \leq y \leq b$, con le χ_i dotate di derivate parziali continue, la quale insieme ai due iperpiani caratteristici $y = a$, $y = b$ individui un dominio D (tipico per l'equazione del calore), i ragionamenti fatti da Fi-

(3) G. Fichera, *Teorema d'esistenza per il problema bi-iperarmonico.* « Rend. Acc. Naz. Lincei » (8), V, 319-324 (1948).

chera nel caso bi-iperarmonico si prestano, con gli opportuni adattamenti, a provare l'esistenza di una funzione v, soluzione regolare di $\mathfrak{L}\mathfrak{L}[v] = 0$ in $D - \mathfrak{F}D$ $\left(\text{attualmente è } \mathfrak{L} = \sum_1^n{}_k \frac{\partial^2}{\partial x_k^2} - \frac{\partial}{\partial y}\right)$ la quale assume i valori f in quasi-tutti i punti della $\mathfrak{F}D$, secondo la normale alle basi di D, se il punto appartiene a una di tali basi, o, se il punto appartiene ad S, secondo la normale sull'iperpiano passante per tale punto all'intersezione di S con tale iperpiano; la sua derivata, fatta secondo la normale all'intersezione di S con l'iperpiano caratteristico e su questo iperpiano, assume i valori g in quasi-tutti i punti di S e nel secondo dei modi anzidetti. Ciò se f, g è la *traccia* su $\mathfrak{F}D$ di una funzione su cui si facciano ipotesi analoghe a quelle di Fichera. In ipotesi più restrittive si può provare l'esistenza della soluzione dello stesso problema, intesa però in senso ordinario.

1. Cominciamo con lo stabilire una proprietà di media caratteristica delle soluzioni regolari di $\mathfrak{L}[u] = 0$. Fissiamo un punto $Q \equiv (\xi, \eta)$ interno a D e chiamiamo $\mathfrak{D}(Q, r)$ il dominio $(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 \leq r^2$, $\eta \leq y$, essendo r un numero positivo tale che $\mathfrak{D}(Q, r) \subset D$. Poniamo

$$V(P, Q) = (r^4 - \overline{PQ}^4)^2 \, U(P, Q)$$

con $P \equiv (x, y)$, essendo $U(P, Q)$ la soluzione fondamentale di $\mathfrak{L}[u] = 0$.

Se u è soluzione regolare di $\mathfrak{L}[u] = 0$ in $D - \mathfrak{F}D$, applicando la formola di reciprocità alla coppia u, V su $\mathfrak{D}(Q, r) - \mathfrak{D}(Q, \varepsilon)$, con $\varepsilon < r$, e poi passando al limite per $\varepsilon \to 0$, si ottiene

$$(3) \qquad u(Q) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}\, r^8} \int_{\mathfrak{D}(Q, r)} u(P) \, \mathfrak{L}[V(P, Q)] \, dP .$$

È poi immediato invertire la formola (3), nel senso che una funzione u continua in $D - \mathfrak{F}D$, che verifica la (3) in ogni punto, è anche dotata delle derivate $\partial u/\partial y$ e $\partial^2 u/\partial x^2$ continue ed è soluzione (regolare) di $\mathfrak{L}[u] = 0$ [4].

Riferiamo ora la porzione $\gamma_2 + c_2 + \gamma_1$ della $\mathfrak{F}D$ all'arco s, $0 \leq s \leq L$, e consideriamo un sistema completo di polinomi in s su $0 \leq s \leq L$; a ognuno di tali polinomi associamo la corrispondente soluzione (regolare) di $\mathfrak{L}[u] = 0$ in D; da queste, con il procedimento di ortonormalizzazione su D, deduciamo un sistema $\{\varphi_k\}$ di funzioni ortonormali su D, completo nel senso che ogni soluzione regolare di $\mathfrak{L}[u] = 0$ si esprimerà come limite di una successione uniformemente convergente di combinazioni lineari

(4) Un'altra formola di media si trova in B. PINI, *Sulle equazioni a derivate parziali, lineari del secondo ordine in due variabili, di tipo parabolico*. « Annali di Mat. » 4), 32, 195-197 (1951). La (3) del testo presenta il vantaggio che $\mathfrak{L}[V(P, Q)]$ è sommabile su D col suo quadrato (con ogni potenza di esponente < 3).

delle φ_k. A norma di teoremi di completezza di G. Cimmino [5], come funzioni φ_k si possono prendere i polinomi ottenuti per ortonormalizzazione dai polinomi parabolici

$$V_n(x,y) = \sum_0^{\left[\frac{n}{2}\right]}{}_k \frac{n!}{k!(n-2k)!} x^{n-2k} y^k, \qquad n = 0, 1, 2, \cdots$$

Fissato ora un punto Q interno a D e preso r opportunamente piccolo, poniamo

$$f(P) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{\pi r^8}} \Sigma[V] \text{ per } & P \subset \mathfrak{D}(Q,r) \\ 0 \text{ fuori di } & \mathfrak{D}(Q,r) \end{cases}$$

e

$$\alpha_k = \int_D f\varphi_k \, dP = \frac{1}{2\sqrt{\pi r^8}} \int_{\mathfrak{D}(Q,r)} \varphi_k(P) \, \Sigma[V(P,Q)] \, dP;$$

per la proprietà di media (3) riesce

$$\alpha_k = \varphi_k(Q).$$

Ne segue che la serie $\sum_1^\infty{}_k \varphi_k^2(Q)$ è convergente in ogni punto interno a D.

Sia ora $f(Q)$ un'arbitraria funzione a quadrato sommabile su D e siano α_k i suoi coefficienti di Fourier rispetto al sistema $\{\varphi_k\}$. Fissiamo un dominio D_1: $\chi_1(y) + t \leq x \leq \chi_2(y) - t$, $a \leq y \leq b - t$, con t positivo abbastanza piccolo, ma arbitrario. Si può determinare un r tale che per ogni punto Q di D_1, il corrispondente $\mathfrak{D}(Q,r)$ sia interno a D; avendosi, in forza della relazione di Bessel,

$$\sum_1^\infty{}_k \varphi_k^2(Q) < \frac{1}{4\pi r^{16}} \int_D \Sigma^2[V(P,Q)] \, dP \quad , \quad \sum_1^\infty{}_k \alpha_k^2 \leq \int_D f^2(P) \, dP,$$

si riconosce immediatamente la convergenza uniforme della serie $\sum_1^\infty{}_k \alpha_k \varphi_k(Q)$ in D_1. Posto allora

$$\Phi(Q) = \sum_1^\infty{}_k \alpha_k \varphi_k(Q) = \sum_1^\infty{}_k \alpha_k \frac{1}{2\sqrt{\pi r^8}} \int_{\mathfrak{D}(Q,r)} \varphi_k(P) \, \Sigma[V(P,Q)] \, dP,$$

segue

$$\Phi(Q) = \frac{1}{2\sqrt{\pi r^8}} \int_{\mathfrak{D}(Q,r)} \Phi(P) \, \Sigma[V(P,Q)] \, dP$$

(5) G. CIMMINO, *Nuovo metodo di approssimazione per la soluzione dei problemi di valori al contorno relativi all'equazione del calore*. « Giorn. di Mat. di Battaglini » 3, 66, 75 98, (1928).

e quindi, dalla sola continuità di $\Phi(Q)$ in D_t, segue, in base alla formola di media, che $\Phi(Q)$ è (tenendo presente l'arbitrarietà di t), soluzione regolare di $\bar{\mathfrak{L}}[u] = 0$ in $D - \mathfrak{F}D$.

2. Veniamo ora al problema posto all'inizio. Sia assegnata su D una funzione $\omega(x, y)$ continua insieme alla derivata $\partial\omega/\partial x$; sia assolutamente continua rispetto a y con $\partial\omega/\partial x$ assolutamente continua rispetto a x; $\partial^2\omega/\partial x^2$ e $\partial\omega/\partial y$ siano di quadrato sommabile su D.

Sia

$$\omega = f \qquad \text{su} \quad \mathfrak{F}D$$

$$\frac{\partial\omega}{\partial x} = g_i \qquad \text{su} \quad \gamma_i, \qquad i = 1, 2.$$

Nel seguito, per comodità, scriveremo anche ω e $\partial\omega/\partial x$ in luogo di f e g_i.

Sostituiamo all'equazione (1) la

$$\mathfrak{L}[v] + u = 0$$

con u soluzione di $\bar{\mathfrak{L}}[u] = 0$; poniamo

$$(4) \qquad c_k = \int_D u\varphi_k \, dP = \int_{\mathfrak{F}D} \left[\left(\omega \frac{\partial\varphi_k}{\partial x} - \varphi_k \frac{\partial\omega}{\partial x} \right) dy - \omega\varphi_k \, dx \right].$$

Dalla formola di reciprocità di Green applicata su D alla coppia ω, φ_k, si ha

$$(5) \qquad c_k = -\int_D \varphi_k \, \mathfrak{L}[\omega] \, dP.$$

Di qui segue la convergenza della serie $\sum_1^\infty{}_k \, c_k^2$ e quindi, per il teorema di Fischer Riesz, la successione $\left\{ \sum_1^n{}_k \, c_k \varphi_k \right\}$ converge in media a una funzione Φ di quadrato sommabile su D i cui coefficienti di Fourier rispetto al sistema $\{\varphi_k\}$ sono le c_k.

Per quanto si è detto al n. 1, la Φ è, in $D - \mathfrak{F}D$, soluzione regolare di $\mathfrak{L}[u] = 0$. Indichiamo ora con AB il segmento c_1; con MN il segmento, appartenente a D, della caratteristica y (M su γ_1 ed N su γ_2); con D_y la porzione di D limitata superiormente da MN; e, come si è già fatto, con $U(P, Q)$ la soluzione fondamentale di $\mathfrak{L}[v] = 0$.

Ciò posto, proviamo che:

I. *Se, oltre alle ipotesi specificate su* ω, $\mathfrak{L}[\omega]$ *è sommabile su* D *con una potenza di esponente* > 3 *e se per un certo* p, $1 < p < 3/2$, *è convergente la serie*

$$\sum_1^\infty{}_k \, (\max_D |\varphi_k|)^{2-p} \left| \int_D \varphi_k \, \mathfrak{L}[\omega] \, dP \right|^p,$$

allora la funzione

$$(6)\qquad v(P)=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_{MABN}\left[U\left(\omega\,d\xi+\frac{\partial\omega}{\partial\xi}d\eta\right)-\omega\frac{\partial U}{\partial\xi}d\eta\right]+\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_{D_y}\Phi U\,dQ$$

è soluzione in senso ordinario del problema (1)–(2).

Com'è noto, si ha intanto per ogni punto P interno a D, $\mathfrak{L}[v]=-\Phi$ e quindi $\bar{\mathfrak{L}}\,\mathfrak{L}[v]=0$. Si tratta perciò di provare che la (6) verifica le condizioni al contorno richieste.

Ora, per ogni numero naturale k, si ha

$$(7)\qquad \int_{\mathfrak{F}D}\left[\left(\omega\frac{\partial\varphi_k}{\partial\xi}-\varphi_k\frac{\partial\omega}{\partial\xi}\right)d\eta-\omega\varphi_k\,d\xi\right]-\int_{D}\Phi\varphi_k\,dQ=0.$$

D'altra parte se fissiamo il punto P esternamente a D, poiché la U (P , Q) come funzione di Q è soluzione regolare di $\bar{\mathfrak{L}}[u]=0$, tenendo presente che $\{\varphi_k\}$ è un sistema completo (nel senso specificato) la U (P , Q) potrà essere approssimata uniformemente su D mediante combinazioni lineari delle φ_k. Dette $\psi_1,\psi_2,\cdots$, tali combinazioni, fissato un dominio D_1 interno a D, del tipo già considerato al n. 1, per un opportuno r si ha, qualunque sia Q in D_1,

$$\psi_k(Q)=\frac{1}{2\sqrt{\pi}r^8}\int_{\mathfrak{D}(Q,r)}\psi_k(P)\,\mathfrak{L}[V(P,Q)]\,dP.$$

Di qui segue

$$\frac{\partial\psi_k}{\partial\xi}=\frac{1}{2\sqrt{\pi}r^8}\left[\int_{\mathfrak{D}(Q,r)}\psi_k(P)\frac{\partial\mathfrak{L}[V(P,Q)]}{\partial\xi}dP+\int_{\mathfrak{C}(Q,r)}\psi_k(P)\,\mathfrak{L}[V(P,Q)]\,d\nu\right]$$

avendo indicato con $\mathfrak{C}(Q,r)$ la semicirconferenza $(\xi-x)^2+(\eta-y)^2=r^2$, $y\geqq\eta$. Pertanto se $\{\psi_k\}$ converge uniformemente su D_1, altrettanto si può dire di $\{\partial\psi_k/\partial\xi\}$. In base a ciò, dalla (7) si deduce

$$(8)\qquad 0=\begin{cases}\displaystyle\int_{MABN}\left[\left(U\frac{\partial\omega}{\partial\xi}-\omega\frac{\partial U}{\partial\xi}\right)d\eta+\omega U\,d\xi\right]+\int_{D_y}\Phi U\,dQ & \text{per } y\leq b\\ \displaystyle\int_{\mathfrak{F}D}\left[\left(U\frac{\partial\omega}{\partial\xi}-\omega\frac{\partial U}{\partial\xi}\right)d\eta+\omega U\,d\xi\right]+\int_{D}\Phi U\,dQ & \text{per } y>b.\end{cases}$$

Per studiare il comportamento al contorno di v e di $\partial v/\partial x$ potremmo servirci di note proprietà dell'integrale di Poisson e dei semplici e doppi strati. Più semplicemente si osserverà che, avendosi

$$\omega(P)=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_{MABN}\left[U\left(\omega d\xi+\frac{\partial\omega}{\partial\xi}d\eta\right)-\omega\frac{\partial U}{\partial\xi}d\eta\right]-$$

$$-\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_{D_y}\mathfrak{L}[\omega]\,U\,dQ\qquad\text{per P interno a D}$$

e

$$\left.\begin{array}{l} \int_{MABN}\left[U\left(\omega d\xi+\frac{\partial\omega}{\partial\xi}d\eta\right)-\omega\frac{\partial U}{\partial\xi}d\eta\right] \\ \int_{\mathfrak{F}D}\left[U\left(\omega d\xi+\frac{\partial\omega}{\partial\xi}d\eta\right)-\omega\frac{\partial U}{\partial\xi}d\eta\right] \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{l} \int_{D_y}\mathfrak{L}[\omega]\,U\,dQ \\ \int_{D}\mathfrak{L}[\omega]\,U\,dQ \end{array}\right. \quad \text{per P esterno a D e} \quad \left\{\begin{array}{l} y\leq b \\ y>b \end{array}\right.$$

la (6) e la (8) si scriveranno in ogni caso

$$(6') \qquad v(P)=\omega(P)+\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_D(\mathfrak{L}[\omega]+\Phi(Q))\,U(P,Q)\,dQ \qquad \text{per P interno a D}$$

$$(8') \qquad 0=\int_D(\mathfrak{L}[\omega]+\Phi(Q))\,U(P,Q)\,dQ \qquad \text{per P esterno a D.}$$

Ricordiamo ora che, estendendo un classico risultato di Young–Hausdorff-Riesz, Marcinkiewicz e Zygmund [6], sulla base di un teorema di convessità di M. Riesz, hanno provato che se $\{\varphi_n(x)\}$ è un sistema di funzioni ortonormali sull'intervallo J, ivi sommabili con le potenze ν–esime, $\nu \geq 2$, se

$$\left(\int_J|\varphi_n|^\nu dx\right)^{1/\nu}\leq M_n,$$

posto $1/\mu+1/\nu=1$, se p e q sono due numeri positivi tali che $1\leq p\leq 2$, $(2-\mu)/p+\mu/q=1$, se entrambe le serie $\sum_1^\infty{}_n M_n^{2-p}|c_n|^p$ e $\sum_1^\infty{}_n c_n^2$ sono convergenti, allora $f\sim\sum_1^\infty{}_n c_n\varphi_n$ è di q-esima potenza sommabile su J e riesce

$$\left(\int_J|f|^q dx\right)^{1/q}\leq\left(\sum_1^\infty{}_n M_n^{2-p}|c_n|^p\right)^{1/p}.$$

Questa proposizione si trasporta senza alterazioni a un sistema ortonormale di funzioni di più di una variabile.

Allora, per le ipotesi fatte, la funzione Φ riesce sommabile su D con una sua potenza di esponente >3. Ora le funzioni U e $\partial U/\partial x$ sono sommabili su D con ogni loro potenza di esponente rispettivamente <3 e $<3/2$. Tanto basta per assicurare la continuità dappertutto degl'integrali

$$(9) \qquad \int_D(\mathfrak{L}[\omega]+\Phi(Q))\,U(P,Q)\,dQ\ ,\ \int_D(\mathfrak{L}[\omega]+\Phi(Q))\,\frac{\partial U(P,Q)}{\partial x}\,dQ,$$

e con ciò il teorema è provato.

(6) MARCINKIEWICZ–ZYGMUND, *Some theorems on ortogonal system.* « Fundamenta Mathematicae », *28* 309–335, (1937).

Astronomia. — *Osservazioni di variabili ad eclisse* (*). Nota di ALFONSO FRESA, presentata (**) dal Socio G. ABETTI.

All'Osservatorio astronomico di Capodimonte in Napoli sono state rimesse in programma osservazioni di stelle variabili, già iniziate e portate avanti per circa un ventennio dal compianto prof. Azeglio Bemporad, con l'ausilio di fotometri a cuneo.

Attualmente esse vengono eseguite con un fotometro fotoelettrico preparato dall'attuale Direttore prof. A. Colacevich (1). Il fotometro, applicato al rifrattore di Fraunhofer di cm. 17,5 di apertura e di cm. 302 di focale, fornisce le intensità luminose delle stelle, che vengono registrate su di un apposito apparecchio registratore, dopo opportune amplificazioni. La fotocella è del tipo 1 P 21.

In generale la variabile viene confrontata con una stella possibilmente vicina e di colore non molto diverso. Ogni osservazione consiste di una misura, all'inizio ed alla fine, dello splendore luminoso del cielo, e della intensità della stella di confronto, ripetuta, o triplicata nei casi incerti, ed analogamente per la variabile; e così di seguito. L'errore probabile di una singola osservazione è di $\pm$ 0,01 grandezze. Le osservazioni vengono ridotte per l'effetto di estinzione atmosferica e di quello del colore, con i procedimenti più appropriati.

Messo a posto lo strumento nella primavera del 1952, il prof. Colacevich iniziò un saggio, osservando la variabile *V 451 Ophiuchi*; nello stesso tempo mi incaricò di collaborare in questo campo di ricerche, già da me coltivato all'Osservatorio di Torino però con un fotometro a cuneo. Tra le variabili messe in programma fu scelta un'altra pure della costellazione di Ofiuco (la *V 566*), entrambe segnalate dal *Draft report* dell'Unione Astronomica Internazionale del 1952, per essere osservate con fotometri fotoelettrici.

In questa Nota riporto i risultati provvisori di 3 variabili ad eclisse, da me osservate a Capodimonte.

Giova notare che gli elementi di queste variabili, compresa la *V 451 Oph.*, sono tutti sostanzialmente diversi da quelli ottenuti da altri autori, con osservazioni non fotoelettriche. Ma di questo si parlerà in seguito e dettagliatamente per ogni variabile.

Essendo deboli le stelle osservate, non è stato adoperato il filtro, per cui la lunghezza d'onda effettiva è di circa 4400 A, corrispondente quindi, con approssimazione, a quella fotografica.

(*) Lavoro eseguito all'Osservatorio Astronomico di Capodimonte-Napoli.

(**) Nella seduta del 9 maggio 1953.

(1) A. COLACEVICH, *Il fotometro fotoelettrico dell'Osservatorio di Capodimonte. Elementi provvisori di V 451 Oph.* «Mem. Soc. Astron. Ital.», vol. XXIII, 2-3 (1952).

V 566 OPHIUCHI

Questa variabile, del tipo β *Lyrae*, fu presa in esame da Hoffmeister [2] e da Tsesevich [3], i quali trovarono, rispettivamente, un periodo $P = 0^d,51518$ e $P = 0,515194$. Da 280 osservazioni, eseguite in 15 serate, sono risultati dalla curva di luce — i cui punti normali accusano un errore probabile dell'ordine di ± 0,004 grandezze – i seguenti nuovi elementi

$$Max_I = 7^m,58 \text{ , } Max_{II} = 7^m,59 \text{ ; } min_I = 8^m,07 \text{ , } min_{II} = 8^m,02.$$

$$\text{T.U.elioc.} = \text{D.J. } 2434226,351 + 0^d,409658 \text{ E.}$$

La determinazione del periodo è stata fatta in base a sei minimi principali; si è tenuto conto anche di tre minimi secondari.

Si noti la breve escursione tra i due minimi.

La variabile è del tipo spettrale F_5. È stata adoperata per confronto la stella BD + 4° 3556 = HD 163592 di tipo B_9, la quale a sua volta è stata confrontata con le stelle HD 163697 (F_5) e HD 164045 (A_2); ne è risultato, come grandezza fotografica, il valore 8.01, che è stato adottato.

V 805 AQUILAE

Questa variabile, BD–11° 4871 = HD 177708 (A_2) appartiene al tipo Algol. Fu scoperta su lastre fotografiche, e gli elementi precedenti, dovuti a Bakos [4], dànno un periodo $P = 1^d,20409$.

Numerose osservazioni sono state eseguite a Capodimonte in 23 serate, adoperando, come stella di confronto, la BD–12° 5278 = HD 177758 (F_8). Partendo dalla grandezza fotografica $7^m,60$ nel sistema di Harvard, dalla curva di luce, che si presenta rettilinea fuori eclisse, sono risultati i seguenti elementi:

$$Max = 7^m,81 \text{ ; } min_I = 8^m,48 \text{ , } min_{II} = 8^m,10$$

$$\text{T.U. elioc. } Min_I = \text{D.J. } 2427927 \text{ , } 847 + 2^d,408230.$$

Da quanto precede risulta che il periodo dato da Bakos è metà di quello trovato a Capodimonte; la causa di questa diversità dipende dal fatto che non fu rilevata la diversità tra i due minimi, come può arguirsi dall'annotazione del Bakos sulla considerevole deformazione delle immagini fotografiche situate ai bordi delle lastre.

V 548 CYGNI

Quest'altra variabile, BD + 54° 2255 = HD 189371 (A_0), fu assegnata da Asarnova [5] al tipo RR Lyrae, con periodo $P = 0^d,33298$. Le osserva-

(2) « K. V. Berl. Bab. », *28* (1943).
(3) « Astron. Circ. USSR », *100* (1950).
(4) « Annal. Leiden », XX, 188 (1950).
(5) « I.A.U. », *47th name-list of variable stars 1951* (pp. 24, 62).

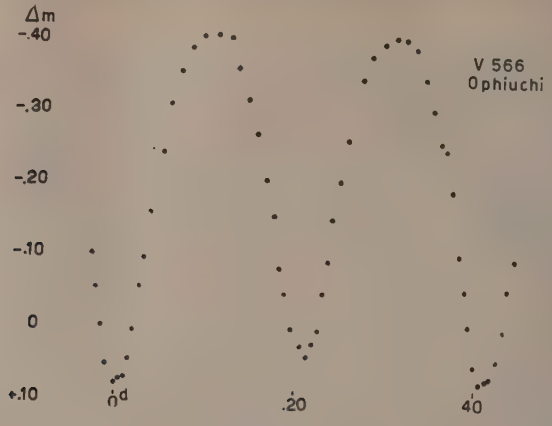


Fig. 1.

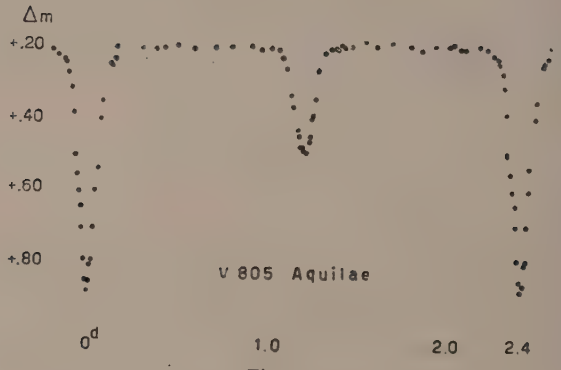


Fig. 2.

Fig. 3.

Variabili ad eclisse osservate col fotometro fotoelettrico dell'Osservatorio Astronomico di Capodimonte in Napoli.

zioni fotoelettriche, di questa variabile, iniziate a Capodimonte nell'ottobre del 1952, adoperando per confronto la stella BD + 54°2277 = HD 190464 (F_o) di grandezza fotografica $8^m,6$ (Harvard), subirono dopo pochi giorni un arresto di alcuni mesi, avendo dovuto, l'Osservatorio, restituire l'apparecchio registratore avuto in prestito. Acquistato un nuovo registratore, le osservazioni fotoelettriche si son potute ripristinare solo nel marzo del corrente anno, nel qual mese, intensificando le osservazioni, si son potuti dedurre i seguenti elementi, ancora suscettibili di miglioramento per ulteriori osservazioni:

$$\text{Max} = 8^m,91 \; ; \; \text{min}_I = 9^m,71 \; , \; \text{min}_{II} = 9^m,00.$$

$$\text{T.U. elioc.} = \text{D.J. } 2434298,390 + 1^d,80529 \; E.$$

Dalle nostre osservazioni questa variabile è risultata del tipo Algol.

Astronomia. — *Fotometria fotografica dell'eclisse totale di luna del 29 gennaio 1953 e la luminescenza del suolo lunare per la radiazione ultravioletta solare.* Nota di MASSIMO CIMINO e TERESA FORTINI, presentata (*) dal Socio G. ARMELLINI.

1. INTRODUZIONE. – L'eclisse totale di Luna del 29 gennaio 1953, presentandosi in condizioni favorevoli per le osservazioni fotometriche, è stata da noi osservata a Roma con l'astrografo Petzvall dell'Osservatorio.

È ben nota l'importanza delle osservazioni fotometriche delle eclissi lunari per lo studio dell'alta atmosfera terrestre. Da questo punto di vista la teoria (1) dimostra che la zona del cono d'ombra più interessante è quella che cade in vicinanza dell'orlo dell'ombra. I fenomeni fotometrici di questa zona sono infatti strettamente dipendenti dai fenomeni dell'*alta* atmosfera terrestre e, in modo particolare, dallo strato dell'ozono e da altri strati assai elevati e sottili di natura non ben precisata (2). Invece la zona centrale del cono d'ombra è piuttosto influenzata dai fenomeni della bassa atmosfera, e presenta perciò scarso interesse.

Ma non meno interessante di quello dell'ombra è lo studio della *penombra*, specialmente per la fisica solare e lunare. Infatti, nella luce solare che illumina un determinato punto del suolo lunare tendono a prevalere, mano a mano che l'eclisse progredisce, i raggi che provengono dal bordo del Sole, anzi, ad un certo punto, finiranno col prevalere addirittura le radiazioni cromosferiche e coronali.

(*) Nella seduta del 9 maggio 1953.

(1) Cfr. F. LINK, *Théorie photométrique des éclipses de lune*. « Bull. Astr. », *8*, pp. 77-108 (1933). Ivi anche la bibliografia sui lavori anteriori.

(2) Cfr. BAUER et DANJON, *Absorption atmosphérique au Mont Blanc*. « L'Astronomia », juin 1923; F. LINK, *L'absorption atmosphérique etc.* « Bull. Obs. de Lyon », t. XI (1929).

Specialmente notevole sarebbe, secondo il Link [3], l'effetto della radiazione ultravioletta. Questa, come è noto, è fortemente assorbita dalla atmosfera terrestre; invece essa raggiunge quasi integralmente il suolo lunare, eccitando in esso una luminescenza che, sempre secondo il Link, può superare il 10 % della brillanza totale. La luminescenza del suolo lunare può essere provocata anche dalle radiazioni corpuscolari (solari e cosmiche). Complessivamente si osserva, durante la fase di penombra e via via che le radiazioni cromosferiche e coronali prevalgono sulla radiazione fotosferica, un *eccesso di brillanza* del suolo lunare su quella calcolata per la radiazione normale. Il fenomeno varia però da zona a zona e da eclisse ad eclisse a causa del diverso potere luminescente del suolo lunare [4] e per le variazioni nel tempo della componente ultravioletta e corpuscolare solare. In generale, si può dire che l'eccesso di brillanza tende ad aumentare fortemente in vicinanza dell'orlo dell'ombra geometrica, ed è interessante notare come dall'altra parte di tale limite, cioè nell'ombra, si ha pure un eccesso di illuminazione su quella teorica, determinato però dalla diminuzione della massa di ozono atmosferico che i raggi solari debbono attraversare allorché ci si avvicina all'orlo dell'ombra. Questo eccesso di illuminazione è infatti sensibile nel rosso e nel verde, e tende a scomparire nel bleu [5].

2. Strumento e metodo di osservazione. – L'obbiettivo a 4 lenti dell'astrografo Petzvall ha *16* cm. di apertura e *85* cm. di distanza focale e può essere diaframmato in modo da coprire una escursione di circa *8* grandezze stellari *senza cambiare* il tempo di posa. È stato così possibile effettuare quasi tutte le pose col tempo unico di esposizione di 15^s. Soltanto nella totalità e per alcune lastre il tempo è stato portato a 60^s. Sarà bene però avvertire fin da ora che il metodo differenziale da noi seguìto per disegnare le curve di densità dell'ombra e della penombra è largamente indipendente sia dai valori del diaframma e dei tempi, sia dalla variazione dell'assorbimento atmosferico ed eventualmente degli sviluppi. Per la calibrazione, su ciascuna lastra è stato impresso un cuneo fotometrico esposto per 15^s alla luce di una lampadina.

Non potendo, per varie ragioni, sovracaricare il programma d'osservazione, si è preferito scegliere una sola zona spettrale attorno a $\lambda\, 6300$, che è assai interessante sia per l'ombra – in quanto è notevole in essa l'assorbimento da parte dell'ozono atmosferico – sia per la penombra, essendo per essa più sensibile il fenomeno di luminescenza del suolo lunare. Inoltre,

(3) F. Link, *Théorie photométrique de la penombre pendant les eclipses de lune.* « Jon. Soc. Math. Phys. Théque », *72*, p. 65 (1947).

(4) Il potere luminescente del suolo lunare sarebbe in media (secondo il Link) dell'ordine di 2–3 *stilb per watt*, e particolarmente forte in certe zone (per esempio il cratere *Limneus*). Cfr. anche: F. Link, *Rayonnement solaire de courtes longueurs d'onde*, « 7me Rapport de la Comm. pour l'étude des phénomènes solaires et terrestres », 1951.

(5) Cfr. per esempio F. Link, loc. cit. alla nota (1), pp. 97–98.

molte serie di misure attorno a $\lambda\,6000$ sono state discusse dal Link e da altri [6].

3. CARATTERISTICHE DELLE LASTRE E CONDIZIONI METEREOLOGICHE. – Diamo le caratteristiche delle lastre misurate:

TABELLA I.

Caratteristiche delle lastre misurate.

N.	Ora T.M.E.C.	Esposizione	Diaframma(*)	*Note*	N.	Ora T.M.E.C.	Esposizione	Diaframma(*)	*Note*
2	$21^h\ 40^m.0$	15^s	1		14	$23^h\ 36^m.9$	15^s	2	
3	21 34. 3	15	1		15	23 50. 6	60	5	Sviluppo D–25. Inizio totalità: $0^h\ 04^m.0$
4	21 46. 0	15	1	Contatto penombra: $21^h\ 40.^m0$	18	0 08. 0	15	4	
5	22 00. 8	15	1		19	0 54. 7	60	5	Ha inizio il peggioramento del tempo.
6	22 14. 5	15	1		20	1 02. 3	47	5	
7	22 29. 4	15	2		21	1 12. 5	60	5	
8	22 30. 9	15	1		22	1 14. 7	15	5	
12	23 18. 8	15	2	Contatto ombra: $22^h54^m.0$	23	1 26. 6	15	5	
13	23 34. 8	15	3		—	1 30. 0	—	–	Interrotte le osservazioni.

(*) *L'aumento di una unità nel diaframma equivale ad una diminuzione di* DUE *grandezze stellari nella intensità trasmessa alla lastra.*

Per quanto riguarda le condizioni metereologiche, la serata ebbe inizio calma e serena, con leggera nebbia diffusa e bassa sulla città. In seguito la nebbia sembrò diffondersi insensibilmente un po' verso l'alto, ma in modo uniforme e lasciando il cielo sereno e senza veli apparenti. Si alza un po' di vento da nord, ma successivamente ($23^h\ 35^m$) comincia a passar qualche nuvola leggera spinta da un vento *alto* da SW. Queste nuvole, prima in

(6) Abbiamo adoperato lastre *Ferrania Superex antialo* (pancromatiche) con un filtro rosso *Agfa* piuttosto denso poco discosto dalla lastra. In pose stellari fatte per controllo del fuoco non si notò alcuna aberrazione cromatica residua dell'obbiettivo. Il sistema *filtro-lastra* è stato tarato nel Laboratorio Fisico del Ministero dell'Aeronautica, con uno spettrografo a reticolo di HILGER, con lampada a filamento rettilineo e a basso voltaggio. La banda di trasmissione risulta compresa tra $\lambda\,5900$ e $\lambda\,6700$, con due massimi attorno a $\lambda\,6200$ e $\lambda\,6600$, ed un minimo a $\lambda\,6350$, secondario determinato dalla sensibilità cromatica della lastra e non dal filtro).

numero irrilevante, si fanno poi più frequenti con l'avanzare della notte, perturbando le osservazioni durante la totalità, pur senza impedirle del tutto. Infine portano un annuvolamento generale che costringe ad interrompere il programma ($1^h\ 30^m$).

Complessivamente, giudichiamo *buone* le pose fatte dall'inizio fino al principio della totalità, cioè durante tutta la penombra, che maggiormente interessava gli scriventi. Le osservazioni fatte durante la totalità sono invece da assumersi con qualche riserva.

4. Misura delle lastre. Curva di densità della penombra e dell'ombra. – Per la misura delle densità fotografiche sulle lastre è stato adoperato un microfotometro Fabry–Busson, particolarmente adatto a questo tipo di misure. Furono scelte *14* zone lunari, alcune su mari, altre in zone ricche di crateri, eseguendo su ciascuna zona e per ogni lastra *4* misure indipendenti. Il diametro del forellino del diaframma del microfotometro, proiettato sulla lastra, equivaleva a 30″ circa. Per ciascuna lastra fu tracciata la curva di calibrazione; queste presentano un andamento perfettamente lineare attorno alle densità misurate ed hanno praticamente la stessa pendenza. Per *ciascuna* lastra si sono ottenuti in tal modo i Δm (differenze di grandezze stellari) tra i vari punti prescelti ed un punto scelto come riferimento (nel Mare Crisium), che era l'ultimo ad entrare in eclisse.

Le curve di densità della penombra (fig. 1) e dell'ombra (fig. 2) sono state tracciate col seguente metodo differenziale:

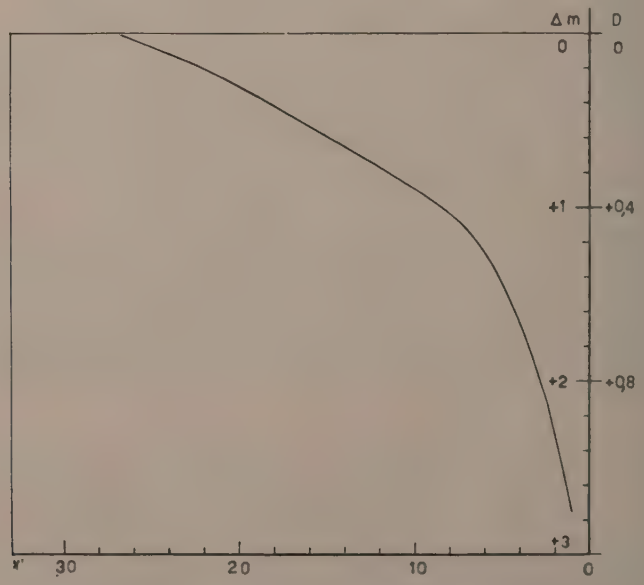


Fig. 1. – Curva di densità della penombra per λ 6300 in funzione della distanza γ' (in primi d'arco) dall'orlo dell'ombra.

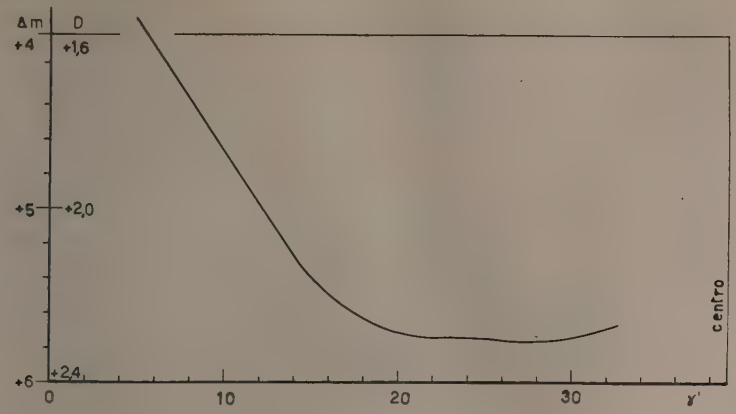


Fig. 2. – Curva di densità dell'ombra per λ 6300 in funzione della distanza γ' (in primi d'arco) dall'orlo dell'ombra.

a) *Curva di penombra.* – In due lastre impressionate *fuori eclisse* si sono determinati i Δm dei punti prescelti a quello di riferimento, come è stato spiegato. La concordanza delle misure tra le due lastre risultò *ottima*. Utilizzando allora altre 5 lastre in eclisse (penombra), *ma col punto di rifemento ancora fuori*, si è potuto tracciare agevolmente e con sicurezza la prima parte della curva di densità della penombra, fino a circa 15' dal bordo dell'ombra [7]. Poiché per le altre 4 lastre di penombra il punto di riferimento cadeva sempre ad una distanza dall'orlo nella quale la densità era già stata determinata dal gruppo di lastre precedenti, è stato così possibile completare la curva fino a circa 1' dall'orlo dell'ombra. Presumendo che le differenze di assorbimento atmosferico su punti lunari della *stessa* lastra siano trascurabili, *e supponendo la simmetria della penombra attorno al centro*, la curva trovata può ritenersi largamente indipendente dalle variazioni atmosferiche nel corso della serata, dall'assorbimento per la differente altezza della luna sull'orizzonte, e, sostanzialmente, anche dalla luce diffusa [8] del cielo, trattandosi sempre di determinazioni differenziali entro un campo di circa 30'.

b) *Curva dell'ombra.* – Per tracciare questa curva si è approfittato del fatto che in gruppo di 5 lastre la distanza dal centro dell'ombra del punto lunare di riferimento rimaneva praticamente *stazionaria* (entro 2'). Applicando allora lo stesso metodo differenziale adoperato per la curva di penombra, si è ottenuta una curva di densità *relative*. Per stabilire allora il collegamento tra un punto della penombra ed uno dell'ombra, abbiamo utiliz-

(7) Le distanze dal centro dell'ombra delle zone lunari sono state determinate con un procedimento grafico.

(8) È da osservare che le lastre posate per la penombra non presentano traccia sensibile d'alone lunare.

zato la lastra n. *15*, sulla quale si era riusciti ad avere contemporaneamente una zona in penombra ed una in ombra, ambedue con densità misurabili. Scelto sulla lastra un allineamento normale all'orlo dell'ombra, è stato eseguito un tracciato con un microfotometro registratore di Zeiss, assieme al corrispondente tracciato sulla lastra fuori eclisse. Il tracciato sulla lastra n. *15* ha permesso pure di misurare il *velo* atmosferico che la zona più densa (in penombra) dava fuori dell'orlo lunare. Tenendo conto del velo, il salto tra un punto della penombra situato a 1'.7 dall'orlo dell'ombra e un punto situato dall'altra parte a 16' potè essere valutato a *3.0* grandezze stellari.

Diamo nella seguente Tabella le densità dell'ombra e della penombra, espresse in differenze Δm di grandezze stellari, in funzione della distanza γ' (in primi d'arco) dall'*orlo dell'ombra*.

TABELLA II.

Densità della penombra (p) e dell'ombra (o) **(λ 5900-6700)** *in funzione della distanza dall'orlo dell'ombra.*

γ'	Δm		γ'	Δm		γ'	Δm		γ'	Δm	
	p	*o*		*p*	*o*		*p*	*o*		*p*	*o*
1'	2.78	—	9'	0.96	4.51	17'	0.48	5.57	25'	0.08	5.75
2	2.32	—	10	0.90	4.67	18	0.42	5.64	26	0.04	5.76
3	1.94	—	11	0.84	4.83	19	0.36	5,68	27	—	5.76
4	1.64	—	12	0.77	4.98	20	0.31	5.72	28	—	5.76
5	1.42	3.92	13	0.71	5.12	21	0.26	5.73	29	—	5.75
6	1.24	4.06	14	0.65	5.26	22	0.21	5.74	30	—	5.74
7	1.12	4.21	15	0.59	5.40	23	0.18	5.74	31	—	5.72
8	1.03	4.36	16	0.54	6.50	24	0.16	5.74	32	—	5.68

5. DISCUSSIONE DEI RISULTATI E DEDUZIONI TEORETICHE. – Come si è detto, il metodo differenziale adottato per tracciare le curve di densità dell'ombra e della penombra evita, nei limiti degli errori, di portare correzioni alle densità osservate per l'assorbimento atmosferico, luce diffusa del cielo, ecc. Il collegamento tra la densità dell'ombra e quella della penombra, fatto con una sola lastra disponibile, e le peggiorate condizioni metereologiche durante la totalità, ci impongono di avanzare qualche riserva sui risultati ottenuti per l'ombra, e specialmente per i valori assoluti delle densità osservate. Invece, i risultati per la penombra (che sono poi i più interessanti) devono ritenersi esenti da critiche essenziali.

Per quanto riguarda la dispersione dei singoli valori delle densità osservate dalla curva media, un'idea è data dalla fig. 3, che dà gli O–C con le densità teoriche, come ora vedremo. Si osserverà che nella penombra, eccettuati rari punti, lo scarto delle singole misure dalla media è sempre contenuto entro $0.^m3$, mentre la *media degli scarti* è dell'ordine di $0.^m1$. Un po' maggiore è la dispersione per l'ombra. Non sarà però inutile osservare che parte di tali scarti va attribuita al diverso angolo di posizione in cui i punti vengono a trovarsi allorché passano alla stessa distanza dal centro dell'ombra, nonché (specialmente per la penombra) alla differenza del potere luminescente del suolo lunare tra zona e zona. Ma il materiale raccolto era insufficiente per una discussione in questo senso.

Il confronto dei risultati ottenuti è stato fatto con le ben note teorie del Link, esposte nelle opere citate e alle quali rimandiamo per i particolari.

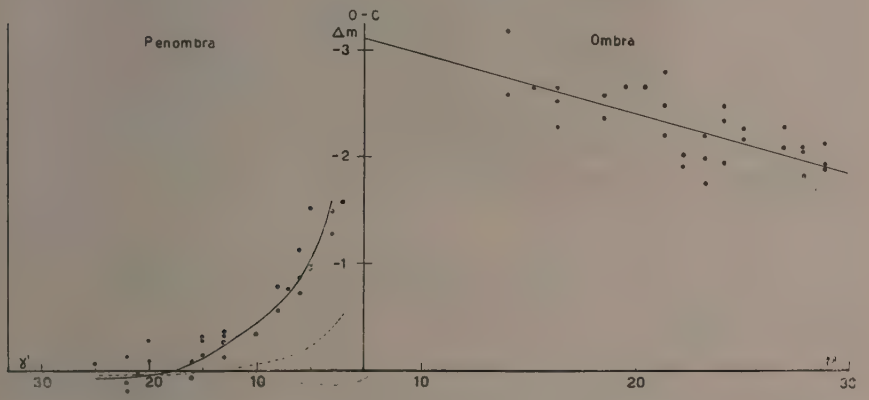


Fig. 3. – Confronto delle densità osservate per l'ombra e la penombra con le teorie del Link. γ' = distanza dall'orlo dell'ombra; M = masse d'aria.

a) *Confronto per la penombra.* – Nel calcolo delle densità secondo la cosidetta *teoria semplificata* si fa completamente astrazione dalle lievi influenze dell'atmosfera terrestre (9), ma si tiene conto dell'oscuramento al bordo solare. La brillanza di un punto del disco solare posto alla distanza R dal centro si può porre con buona approssimazione nella forma:

$$b(R) = 1 - \chi + \frac{\chi}{R_\odot}\sqrt{R_\odot^2 - R^2}.$$

Assumendo per la nostra zona spettrale: $\chi = 0.5$, si dimostra che la densità della penombra calcolata con la teoria semplificata dà un *estremo inferiore* per la densità della penombra, e perciò gli O–C *negativi* non possono

(9) Nella penombra, l'influenza dell'atmosfera terrestre è trascurabile in prima approssimazione. Essa è dovuta all'assorbimento degli ultimi strati di ozono e alla rifrazione.

essere in alcun modo spiegati con le trascurate influenze atmosferiche terrestri. Nell'eclisse da noi osservata gli O–C nella penombra sono rappresentati nella fig. 3 dalla curva a tratto pieno; essi dimostrano un *eccesso d'illuminazione* che aumenta in vicinanza dell'orlo dell'ombra, mentre si ha una (lieve) diminuzione a partire dai 18′ verso il limite della penombra. Resta così confermato, anche per questa eclisse, il fenomeno messo in luce dal Link nella curva tratteggiata, ottenuta dall'esame di *10* eclissi. Il notevole eccesso di illuminazione sull'orlo dell'ombra fa classificare l'eclisse del 29 gennaio 1953 come *molto chiara*.

Abbiamo già ricordato nell'introduzione l'ipotesi avanzata dal Link sulla luminescenza del suolo lunare eccitato dalla radiazione ultravioletta e corpuscolare solare. L'eccesso di illuminazione in vicinanza dell'orlo dell'ombra dato dalla curva tratteggiata della fig. 3 può spiegarsi ammettendo che la percentuale di brillanza del punto lunare dovuta alla luminescenza sia dell'ordine del 10 % della brillanza normale. Nella presente eclisse tale percentuale sembra essere alquanto maggiore, circa il 30 %. Questo può essere spiegato o assumendo un maggiore potere luminescente del suolo lunare, o più verosimilmente supponendo un aumento della componente ultravioletta e corpuscolare della radiazione solare, e specialmente della radiazione cromosferica e coronale, *che tende fortemente a prevalere in vicinanza dell'orlo dell'ombra*.

b) *Confronto per l'ombra.* – Il confronto per l'ombra è stato fatto soltanto fino ad una distanza di 20′ dall'orlo, poiché per la zona più vicina al centro intervengono le masse d'aria troposferiche, che sono sempre fortemente perturbate.

Nella sua teoria il Link tiene conto sia dell'assorbimento, sia della rifrazione di una certa *atmosfera tipica*. Rappresentando (fig. 3) gli O–C dell'ombra in funzione delle *masse d'aria* M attraversate dai raggi, si vede che la loro retta di compenso forma un angolo (acuto) di circa 30° sull'asse delle ascisse, mentre essi tendono ad aumentare verso il centro. Questo fatto sta ad indicare (come la teoria dimostra) un *aumento* all'epoca dell'eclisse del coefficiente di assorbimento atmosferico per la radiazione λ *6300*. Mancando le osservazioni nella vicinanza dell'orlo, nulla è possibile dire sul comportamento degli alti strati di ozono.

Si osservi che la ascissa della retta di compenso per $\gamma' = 0$ (orlo) è *negativa*. Non è possibile far scomparire questo spostamento di insieme degli O–C con una modifica del coefficiente di assorbimento (che influenza solo l'inclinazione della retta), e bisognerebbe supporre una diminuzione di assorbimento in *strati sottili ed estremamente elevati* [10], già messi in luce in altre eclissi e con altri generi di osservazioni. Ma data l'incertezza del collegamento tra la densità dell'ombra e della penombra, si tralascia ogni deduzione quantitativa.

(10) Sicuramente oltre i 30 km. dal suolo; generalmente tra i 150 e i 200 km.

Fisica matematica. — *Sopra una questione di ottica geometrica.* Nota di GIUSEPPE COLOMBO, presentata (*) dal Corrisp. A. TONOLO.

Come è noto gli unici mezzi ottici isotropi nei quali i raggi risultano piani sono quelli in cui le superficie di ugual indice di rifrazione sono piani paralleli o sfere concentriche (1).

A tali mezzi appartengono anche quelli nei quali i raggi sono a flessione costante.

In questa Nota ci proponiamo di dimostrare *l'inesistenza di mezzi ottici isotropi in cui i raggi hanno torsione costante lungo ognuno di essi e non tutti nulla.*

Precisamente dimostreremo che, ponendosi una tale ricerca, si ricade nel caso sopra segnalato dei raggi piani.

La dimostrazione viene condotta per via geometrica, date le notevoli difficoltà che si presentano, se si segue una via analitica.

Implicitamente resterà provato, in base alla nota analogia dinamica, che *non esistono campi di forze conservative per i quali il fascio di traiettorie dinamiche corrispondenti ad un prefissato valore dell'energia totale sono curve a torsione costante, non tutte piane.*

1. Premettiamo alcune considerazioni di carattere geometrico che ci saranno molto utili nel seguito.

Siano x_1, x_2, x_3 coordinate cartesiane di un punto di un mezzo isotropo e siano:

$$n(x_1, x_2, x_3) = \text{cost.} \tag{1}$$

le superficie di ugual indice di rifrazione.

Indicheremo con $\boldsymbol{\nu}$ il versore della normale ν ad una di tali superficie nel suo generico P. L'equazione classica dei raggi è, come è noto la seguente

$$\frac{d}{ds}(n\mathbf{T}) = \frac{\partial n}{\partial \nu}\boldsymbol{\nu}, \tag{2}$$

ove s è la lunghezza d'arco e $\mathbf{T}$ il versore della tangente al raggio. Chiameremo, come è d'uso, *piano di propagazione* il piano per $\boldsymbol{\nu}$ e $\mathbf{T}$, ed *angolo di propagazione*, i, l'angolo $\widehat{\boldsymbol{\nu}\mathbf{T}}$.

Siano: σ la superficie di ugual indice per P, l_ν la traiettoria per P ortogonale alle superficie di ugual indice, $\mathbf{N}_\nu$ il versore della normale principale ad l_ν in P, ρ_ν il suo raggio di curvatura, $\mathbf{T}'$ il versore del componente $\mathbf{T}_\pi$ di $\mathbf{T}$ secondo il piano π tangente in P a σ, ψ l'angolo che $\mathbf{T}' \wedge \boldsymbol{\nu}$ forma con

(*) Nella seduta del 9 maggio 1953.

(1) A. SIGNORINI, *Lezioni di Fisica matematica dell'anno accademico 1949-50 compilate da G. Tedone*, p. 81 e sgg.

$\mathbf{N}_\nu$, $1/\tau$ la torsione del raggio generico in P e $1/\tau_g$ la torsione della geodetica di σ tangente a $\mathbf{T}'$ in **P**. È [2]

$$\frac{1}{\tau} = \frac{1}{\tau_g} - \frac{\cot i \cos \psi}{\rho_\nu}, \tag{3}$$

e si riconosce che il secondo membro di (3) dipende solo dalla direzione del raggio e dalla configurazione della superficie di ugual indice e non dalla legge di distribuzione di n.

Conviene per quel che segue introdurre le linee di curvatura l_1, l_2 per P su σ. Denoteremo con $\boldsymbol{i}_1, \boldsymbol{i}_2$ i versori delle tangenti in P alle linee l_1, l_2, orientati in modo che il triedro $\boldsymbol{i}_1, \boldsymbol{i}_2, \boldsymbol{\nu}$ risulti levagiro, e con φ l'angolo che $\boldsymbol{i}_1$ forma con $\mathbf{N}_\nu$, angolo che ovviamente dipenderà soltanto dalla configurazione di σ.

Infine con θ indicheremo l'angolo di $\mathbf{T}'$ con $\boldsymbol{i}_1$.

Sarà ovviamente:

$$\psi = \varphi - \theta + \frac{\pi}{2}. \tag{4}$$

Il legame tra la torsione della geodetica per P tangente e $\mathbf{T}'$ e le due curvature principali $1/r_1$, $1/r_2$ è espresso dalla relazione [3]

$$\frac{1}{\tau_g} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) \operatorname{sen} 2\theta. \tag{5}$$

La (3) diviene di conseguenza:

$$\frac{1}{\tau} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) \operatorname{sen} \theta + \frac{\cot i \operatorname{sen} (\varphi - \theta)}{\rho_\nu}. \tag{6}$$

Una prima interessante conseguenza delle (6) si trae subito ed è la seguente: *Le direzioni dei raggi che hanno in* P *la stessa torsione appartengono ad un cono quadrico.*

Assunti come assi x, y, z di una terna intrinseca, rispettivamente le rette di versori $\boldsymbol{i}_1, \boldsymbol{i}_2, \boldsymbol{\nu}$ per P, la (6) porge come equazione del cono, che diremo di torsione costante, la seguente:

$$\frac{1}{\tau}(x^2 + y^2) = \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) xy + \frac{z}{\rho_\nu}(x \operatorname{sen} \varphi - y \cos \varphi). \tag{7}$$

È da osservare che per ogni valore di $1/\tau$ il cono di equazione (7) passa per l'asse z. La direzione di tale asse è però singolare per la torsione perché il raggio per P avente la direzione di $\boldsymbol{\nu}$ ha nulla la flessione in P.

Per $1/\tau = 0$ tale cono passa per tutti e tre gli assi.

Se $1/\rho_\nu \neq 0$ il cono è sempre reale e inoltre mai degenere se $|1/\tau| > > 1/2\,|1/r_1 - 1/r_2|$. Per $1/\tau \to \infty$ esso tende, restringendosi, a ridursi all'asse z.

(2) Vedi loc. cit. in (1), p. 75.

(3) Cfr. per esempio L. BIANCHI, *Lezioni di Geometria differenziale*. 2ª ed., vol. I (1902), Pisa, p. 200.

2. Ci proponiamo ora di dimostrare *che il raggio uscente da un punto* P *del mezzo con direzione normale a* σ, *se la torsione è costante per ciascun raggio, coincide con la traiettoria normale alle* σ *per* P [4].

Ne segue che *le superficie di ugual indice sono parallele e le loro traiettorie ortogonali costituiscono di conseguenza un sistema* ∞^2 *di rette formanti una congruenza normale.*

In tutto un certo campo $\mathfrak{C}$, per le ipotesi, implicitamente ammesse, di regolarità della $n(x_1, x_2, x_3)$, sarà:

$$\rho_v > R \quad , \quad \frac{1}{2}\left|\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right| < b, \tag{8}$$

con R, b, costanti positive.

Da (6), per $\operatorname{sen}(\varphi - \theta) \neq 0$, segue:

$$\cot i = \frac{\rho_v}{\operatorname{sen}(\varphi - \theta)} \left\{ \frac{1}{\tau} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) \operatorname{sen} 2\theta \right\} \tag{9}$$

donde, per ogni valore di $1/\tau$ soddisfacente alla

$$\left|\frac{1}{\tau}\right| > b, \tag{10}$$

risulta

$$|\cot i| > \left(\left|\frac{1}{\tau}\right| - b\right) \mathfrak{R}. \tag{11}$$

Da (11) si deduce che per ogni τ soddisfacente a (10) i raggi che hanno in $\mathfrak{C}$ torsione $1/\tau$ devono avere in ogni loro punto P un angolo di propagazione, i, per il quale, detto $\bar{i}$ l'angolo acuto soddisfacente alla:

$$\cot \bar{i} = \left(\left|\frac{1}{\tau}\right| - b\right) \mathfrak{R}, \tag{12}$$

risulti verificata una delle due disuguaglianze:

$$|i| < \bar{i} \quad , \quad |i - \pi| < i. \tag{13}$$

Da (12) si ha immediatamente:

$$\lim_{1/\tau \to \infty} \bar{i} = 0. \tag{14}$$

Premesso ciò, si consideri il raggio r_0 che passa per un qualunque punto prefissato P_0, di $\mathfrak{C}$, e che ha ivi angolo di propagazione nullo. Sia P' un qualunque punto di r_0 diverso da P_0 e interno a $\mathfrak{C}$ e si supponga per ora possibile che in P' sia $i = \alpha \neq 0$.

(4) La circostanza che il raggio considerato esca da P con direzione normale a σ è caratterizzata dall'uguaglianza $i = 0$, e, per tale valore di i, la funzione $1/\tau$ ha un comportamento singolare che non può non presentarsi – data la costanza di τ – lungo tutto il raggio. La proprietà enunciata può pertanto ritenersi intuitiva, ma le considerazioni che seguiranno mirano a darne una dimostrazione rigorosa.

Sia I' un intorno sferico di P' di raggio q, tale che in un suo generico punto P l'angolo $\widehat{\nu_P \nu_{P_1}}$ [5], sia minore od uguale ad $\alpha/3$. Per la regolarità di $n(x_1, x_2, x_3)$ per ogni $\alpha \neq 0$ esisterà certamente qualche $\mathfrak{I}'$. Denoterò con I_ε un cono rotondo di asse ν_{P_0} e con δ_ε la sua semiampiezza.

Sia $\bar{s}$ il valore di s relativo al punto P', essendo s computata su r_0 a partire da P_0 nel verso $P_0 P'$, e siano $x_1 = x_1^0(s)$, $x_2 = x_2^0(s)$, $x_3 = x_3^0(s)$ le equazioni del raggio r_0. A causa della dipendenza continua dalle condizioni iniziali delle soluzioni di (2), si potrà scegliere δ_ε in modo che, per ogni soluzione di (2) a cui corrisponde un raggio r uscente da P_0 in una direzione formante con ν_{P_0} un angolo minore di δ_ε, risultino soddisfatte le relazioni:

$$(15)\qquad \begin{cases} \sum_1^3{}_i \left(x_i(\bar{s}) - x_i^0(\bar{s})\right)^2 \leq q, \\ \sum_1^3{}_i \left(\dot{x}_i(\bar{s}) - \dot{x}_i^0(\bar{s})\right)^2 \leq 2\left(1 - \cos\frac{\alpha}{3}\right). \end{cases}$$

Sia ora r^* un raggio uscente da P_0 con angolo di propagazione, minore di δ_ε e con una direzione corrispondente e valori di i e θ siffatti che la torsione $1/\tau^*$, in P_0, risulti tale che, in relazione ad essa, la (12) dia un valore di $\bar{i}$ minore di $\alpha/3$. La (14) assicura che tale r^* esiste sempre, comunque piccoli siano δ_ε ed $\alpha/3$.

Il raggio r^*, per la maniera in cui è stato scelto avrà qualche punto Q interno ad I'. Denotati con $\mathbf{T}_Q^{r^*}$ e $\mathbf{T}_P^{r_0}$, i versori delle tangenti ai raggi r^* in Q ed r_0 in P', per la (15_2) si ha:

$$(16)\qquad \widehat{\mathbf{T}_Q^{r^*}\mathbf{T}_P^{r_0}} \leq \frac{\alpha}{3},$$

mentre, appartenendo Q ad I', è anche:

$$(17)\qquad \widehat{\nu_Q \nu_{P'}} \leq \frac{\alpha}{3}.$$

Ne segue che essendo α l'angolo di $\mathbf{T}_{P'}^{r^*}$ e $\nu_{P'}$, l'angolo di propagazione $\widehat{\mathbf{T}_Q^{r^*}\nu_Q}$ è certamente maggiore od uguale ad $\alpha/3$. Ma ciò è in contraddizione col fatto che, essendo la torsione di r^* costante, l'angolo di propagazione deve essere minore di $\alpha/3$, per quanto detto sopra (vedi (11), (12), (13)).

Si deduce da ciò che il raggio uscente da P_0 nella direzione ν_{P_0} deve coincidere con la traiettoria ortogonale che passa per P_0, c. d. d. Ciò comporta naturalmente che tale traiettoria ortogonale sia *rettilinea* [6] e, poiché le considerazioni svolte sono valide qualunque sia P_0 in $\mathfrak{C}$, si deduce che le superficie di uguale indice sono parallele.

3. Supponiamo dunque che le superficie di ugual indice di rifrazione siano parallele e, non volendo concludere sin da ora che esse siano sfere concentriche o piani paralleli (il che implica raggi piani) facciamo l'ipotesi, che dimostreremo assurda, che in tutto un intorno $\mathfrak{C}$ di P_0 sia $1/r_1 - 1/r_2 \neq 0$.

(5) D'ora in poi specificheremo, quando sarà necessario, con ν_P il versore ν nel punto P.

(6) Se il raggio ha la direzione di grad n in ogni suo punto la sua curvatura risulta necessariamente nulla.

Si consideri la superficie σ_0 per P_0 e su di essa il sistema di linee di curvatura. I raggi che escono da P_0 con un generico i nei piani paralleli ad $i_1 \nu_0$ ed $i_2 \nu_0$ hanno torsione nulla, come risulta da (6), tenuto conto che $1/\rho_\nu = 0$, e quindi, per l'ipotesi che tutti i raggi siano a torsione costante, risulteranno piani. Poiché i raggi che escono da P_0 su ognuno di questi due piani riempiono tutte e due le regioni R_1, R_2 che essi piani hanno in comune con $\mathcal{C}$, in ogni punto di R_1 (R_2), ν è parallelo al piano $i_1 \nu_0$ ($i_2 \nu_0$). Siano l_1', l_2' le intersezioni di R_1, R_2 con σ_0, linee che risulteranno piane. Poiché, in ogni punto di l_1', l_2', ν risulta contenuta nel piano della linea, si deduce che l_1', l_2' saranno geodetiche e linee di curvatura nello stesso tempo, cioè coincideranno con l_1, l_2.

Queste considerazioni si possono ripetere per ogni P di σ_0. Si viene così a concludere che le linee di curvatura di σ_0 sono geodetiche piane. Si riconosce allora senz'altro che σ_0 non può che essere un cilindro. Basta, per esempio, pensare alla indicatrice sferica di Gauss della superficie, per riconoscere che una almeno delle due serie di piani, che contengono una delle due serie di linee coordinate, sono tra di loro paralleli. D'altra parte, se si considera un qualunque piano dell'altra serie e la linea di curvatura che esso contiene, questa linea non può che essere una retta. Se non lo fosse la normale in un suo generico punto Q a σ_0 non sarebbe parallela al piano della prima serie che passa per Q.

Poiché il punto P_0 è un punto generico di $\mathcal{C}$, risulta provato che le superficie σ non possono differire da una famiglia di cilindri.

Dimostreremo, per concludere, che tali cilindri devono degenerare in piani paralleli.

Riprendiamo l'equazione (6) che diviene, supponendo di assumere come linee l_2 le generatrici del cilindro, e tenuto conto che è sempre $1/\rho_\nu = 0$,

$$\frac{1}{\tau} = \frac{1}{2}\,\frac{1}{r_1}\,\operatorname{sen} 2\theta\,, \tag{18}$$

ove r_1 è il raggio di curvatura delle sezioni normali. Sia, se è possibile, $1/r_1 \neq 0$, da (18) segue che i raggi di *massima torsione*, che escono da P_0, sono quelli il cui piano di propagazione, π, forma un angolo di $\pi/4$ con le generatrici del cilindro. Se consideriamo uno qualunque di questi raggi e su di esso la funzione $1/r_1(s)$ si vede senz'altro che essa deve avere un minimo in P_0, cioè per $s = 0$.

Se infatti fosse $1/r_1(s)$ crescente per $s = 0$, nei punti di un intorno sinistro di $s = 0$ sarebbe $1/r_1(s) < 1/r_1(0)$, e quindi $1/\tau$ non potrebbe essere costante lungo il raggio, perché $\operatorname{sen} 2\theta$ non può superare l'unità, ed è uguale ad 1 per $s = 0$. Analogamente si prova che $1/r_1(s)$ non può avere in P_0 né un massimo, né essere decrescente.

Dunque la derivata di $1/r_1$, in un generico punto P_0 nel mezzo, secondo le direzioni parallele al piano π, è sempre nulla, e, così pure, essa è nulla nella direzione (non parallela a π) delle generatrici.

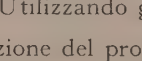
Tanto basta per dire che $1/r_1$ è costante in tutto $\mathcal{C}$. I cilindri devono quindi avere sezioni normali circolari e tutti con lo stesso raggio e, dovendo essere superficie parallele, non possono che degenerare in piani paralleli.

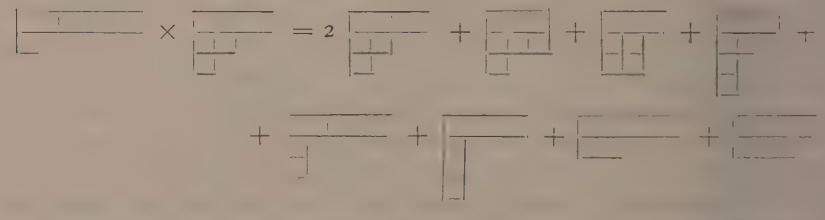
Fisica teorica. — *Sopra un teorema per la riduzione di talune rappresentazioni del gruppo simmetrico.* Nota di AUGUSTO GAMBA e LUIGI A. RADICATI, presentata (*) dal Corrisp. G. WATAGHIN.

In talune applicazioni della teoria dei gruppi alla fisica nucleare (1) si presenta il problema di ridurre il prodotto di due rappresentazioni irriducibili del gruppo simmetrico S_n di ordine $n!$ in rappresentazioni irriducibili dello stesso gruppo (l'« inner product » del rif. (1)). Tale operazione si esegue facilmente utilizzando la tabella dei caratteri, ma il procedimento risulta alquanto laborioso.

Assai comodo sarebbe un procedimento « grafico » analogo a quello introdotto da Littlewood (2) per la riduzione del prodotto di due rappresentazioni irriducibili dei gruppi S_n e S_m in rappresentazioni irriducibili del gruppo S_{n+m} (l'« outer product » del rif. (1)).

Nella presente Nota vogliamo indicare tale metodo, limitandoci al caso in cui una delle rappresentazioni irriducibili sia definita dalla partizione $\{n-1, 1\}$: caso di maggior interesse dal punto di vista fisico.

Utilizzando gli schemi di Young, la regola si può enunciare così: Nella riduzione del prodotto dello schema di Young  (schema 1) per un altro schema qualunque (schema 2), lo schema 2 compare $N-1$ volte, dove N è il numero di righe (o colonne) diverse (contenenti cioè un numero differente di caselle) nello schema 2; compaiono una volta sola tutti gli schemi ottenuti spostando una sola casella dallo schema 2 (sempreché, naturalmente, lo schema risultante sia regolare, cioè il numero di caselle nelle righe successive decresca o resti costante); tutti gli altri schemi sono assenti. Per esempio:

1) 

2)

3)

(*) Nella seduta del 9 maggio 1953.

(1) A. GAMBA, R. MALVANO, L. A. RADICATI, « Phys. Rev. », *87*, 440 (1952).

(2) LITTLEWOOD, *Theory of Group Characters*, 2nd ed. Clarendon Press, Oxford p. 94 (1950).

Dimostrazione: Cominciamo a ricordare che il carattere corrispondente alla partizione $\{\mu_1, \mu_2, \mu_3, \cdots\}$ $(\mu_1 \geqq \mu_2 \geqq \mu_3 \geqq \cdots)$ per la classe contenente α_1 cicli di ordine 1, α_2 cicli di ordine 2, ... è una funzione

$$\chi_n(\mu_1, \mu_2, \mu_3, \cdots ; \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \cdots) \tag{1}$$

dove si è voluto esplicitamente porre in rilievo l'indice $n = \mu_1 + \mu_2 + \mu_3 + \cdots$ La (1) si può calcolare esplicitamente come funzione delle variabili α, una volta assegnati i μ [3]. Per esempio, per $\mu_1 = n - 1$, $\mu_2 = 1$, $\mu_3 = \mu_4 = \cdots = 0$

$$\chi_n = \alpha_1 - 1 \qquad (n \text{ intero positivo qualunque}).$$

Introduciamo per comodità di notazione alcuni operatori, che operano sulle funzioni (1), definiti nel modo seguente:

$$D\chi_n(\mu_1, \mu_2, \mu_3, \cdots ; \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \cdots) \begin{cases} = \chi_n(\mu_1, \mu_2, \mu_3, \cdots ; \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \cdots) \\ \text{se } \mu_1 \geqq \mu_2 \geqq \mu_3 \geqq \cdots \text{ (partizione regolare)} \\ = 0 \text{ se la condizione precedente non è soddisfatta (partizione non regolare)} \end{cases}$$

$$\Delta^-_{\mu_k} \chi_n(\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_{k-1}, \mu_k, \mu_{k+1}, \cdots ; \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \cdots) =$$
$$= \chi_n(\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_{k-1}, \mu_k - 1, \mu_{k+1}, \cdots ; \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \cdots)$$

$$\Delta^+_{\mu_k} \chi_n(\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_{k-1}, \mu_k, \mu_{k+1}, \cdots ; \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \cdots) =$$
$$= \chi_n(\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_{k-1}, \mu_k + 1, \mu_{k+1}, \cdots ; \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \cdots)$$

$$B\chi_n(\mu_1, \mu_2, \mu_3, \cdots ; \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \cdots) = \chi_n(\mu_1, \mu_2, \mu_3, \cdots ; \alpha_1 - 1, \alpha_2, \alpha_3, \cdots)$$

$$A^- = \Delta^-_{\mu_1} + \Delta^-_{\mu_2} + \Delta^-_{\mu_3} + \cdots$$

$$A^+ = \Delta^+_{\mu_1} + \Delta^+_{\mu_2} + \Delta^+_{\mu_3} + \cdots$$

Tali operatori sono manifestamente lineari e inoltre

$$D^2 = D \qquad \text{(idempotente)}$$

$$DA^+ DA^- = DA^- DA^+$$

B commuta con A^+, A^- e D.

Con queste notazioni, il noto teorema che permette di esprimere i caratteri di una rappresentazione del gruppo simmetrico S_n di ordine $n!$ in funzione dei caratteri delle rappresentazioni del gruppo S_{n-1} per tutte le classi aventi un ciclo di ordine 1 in meno (Littlewood, op. cit., p. 140) si può scrivere:

$$DA^- B = 1. \tag{2}$$

(3) F. D. MURNAGHAN, « Proc. Nat. Ac. Sc. U.S.A. », *37*, 55 (1951); A. GAMBA, « Rend. Acc. Lincei », XII, 167 (1952).

La (2) non è una relazione identica, ma vale tutte le volte che gli operatori a primo e secondo membro sono applicati ad una funzione χ, per valori di $\alpha_1 \neq 0$. Cioè più esattamente

$$(2') \qquad DA^- B\chi_n = \chi_n \quad \text{se } \alpha_1 \neq 0.$$

Con queste notazioni, dimostrare il nostro teorema equivale a dimostrare che

$$(3) \qquad \chi_n(n-1, 1; \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \cdots)\,\chi_n(\mu_1, \mu_2, \mu_3, \cdots; \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \cdots) =$$

$$= (\alpha_1 - 1)\,\chi_n(\mu_1, \mu_2, \mu_3, \cdots; \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \cdots) =$$

$$= (DA^+ DA^- - 1)\,\chi_n(\mu_1, \mu_2, \mu_3, \cdots; \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \cdots).$$

Dimostreremo la (3) con il procedimento dell'induzione completa. Ammessa vera la (3) per i gruppi simmetrici $S_1, S_2, \cdots, S_n$ la dimostreremo per S_{n+1}.

Cominciamo a dimostrare la (3) per quelle classi che contengono almeno un ciclo di ordine 1 ($\alpha_1 \neq 0$). Si ha, utilizzando la (2')

$$\chi_{n+1}(n, 1; \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \cdots)\,\chi_{n+1}(\mu_1, \mu_2, \mu_3, \cdots; \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \cdots) =$$

$$= [DA^- B\chi_{n+1}(n, 1; \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \cdots)]\,[DA^- B\chi_{n+1}(\mu_1, \mu_2, \mu_3, \cdots; \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \cdots)] =$$

$$= [B\{\chi_n(n; \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \cdots) + \chi_n(n-1, 1; \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \cdots)\}] \cdot$$

$$\cdot [DA^- B\chi_{n+1}(\mu_1, \mu_2, \mu_3, \cdots; \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \cdots)] =$$

$$= [B\{1 + \alpha_1 - 1\}]\,[DA^- B\chi_{n+1}(\mu_1, \mu_2, \mu_3, \cdots; \alpha_1, \alpha_2, \alpha_2, \cdots)] =$$

$$= [B\alpha_1]\,[DA^- B\chi_{n+1}(\mu_1, \mu_2, \mu_3, \cdots; \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \cdots)] =$$

$$= [\alpha_1 - 1]\,[DA^- B\chi_{n+1}(\mu_1, \mu_2, \mu_3, \cdots; \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \cdots)].$$

Ora, poiché $\alpha_1 - 1$ per la (3) equivale a $(DA^+ DA^- - 1)$ quando è applicato a una χ_n e poiché $DA^- B\chi_{n+1}$ è proprio una somma di χ_n, ricordando la linearità di $DA^+ DA^-$ segue:

$$\chi_{n+1}(n, 1; \alpha_1 \alpha_2, \alpha_3, \cdots)\,\chi_{n+1}(\mu_1, \mu_2, \mu_3, \cdots; \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \cdots) =$$

$$= (DA^+ DA^- - 1)\,\chi_{n+1}(\mu_1, \mu_2, \mu_3, \cdots; \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \cdots).$$

La dimostrazione per le altre classi ($\alpha_1 \neq 0$) si conduce in maniera del tutto analoga, utilizzando il corrispondente teorema (Littlewood, op. cit., p. 142) che permette di esprimere i caratteri delle rappresentazioni irriducibili del gruppo S_{n+k} in funzione di quelli delle rappresentazioni irriducibili del gruppo S_n per tutte le classi che contengono un ciclo di ordine k in meno.

Con ciò risulta provato il nostro teorema, manifestamente valido per i gruppi simmetrici di ordine più basso come è facile verificare direttamente.

Fisica. — *Sopra una variante cinematica dell'esperimento di Sagnac*. Nota I di MARIO GALLI, presentata (*) dal Socio G. ABETTI.

1. – È generalmente ammesso che tanto l'esperimento di Sagnac quanto altri esperimenti ottici da esso derivati con l'introduzione di opportune varianti non siano realmente idonei a discriminare tra cinematica classica e relativistica. Ma esiste un esperimento, per ora solamente progettato, suggerito da F. Prunier (1) e da A. Dufour (2), sul cui valore probativo illustri fisici dissentono.

Poiché talune proposizioni che dànno origine al dissenso sono importanti e poiché l'incertezza ad esse relative può proiettare molta ombra anche su principî fondamentali della relatività, ci sembra opportuno un esame delle argomentazioni contrapposte (3).

La tesi sostenuta con questa Nota è la seguente: il dispositivo escogitato da Dufour e Prunier non è idoneo, né praticamente né teoricamente, a discriminare tra cinematica classica e relativistica. Se apparentemente le due teorie non sono concordi il divario dipende unicamente dallo stabilire norme convenzionali diverse circa la sincronizzazione di orologi lontani, non già da leggi diverse aventi un effettivo contenuto empirico (4).

2. – Presumiamo che l'esperienza di Sagnac sia nota, almeno nelle linee generali. Per conseguenza passiamo senz'altro all'esposizione del ragionamento di Prunier. Sia dato un disco D capace di rotare uniformemente con velocità angolare ω rispetto al sistema inerziale Oxy. Sia L una circonferenza qualsiasi concentrica del disco rotante. Ciò posto, supponiamo che, essendo inizialmente il disco fermo, si facciano partire da P due particelle materiali M_1 ed M_2 con velocità uguali ed opposte e tangenti alla circonferenza. Supponiamo parimenti che, incurvando opportunamente la traiettoria, esse percorrano la circonferenza in senso inverso. È ovvio che, se il

(*) Nella seduta del 9 maggio 1953.

(1) La possibilità di realizzare una esperienza discriminatrice è stata concepita originariamente da F. PRUNIER, «C.R.», *200*, p. 46 (1935).

(2) Il dispositivo sperimentale idoneo è stato escogitato da A. DUFOUR, «C.R.», *200*, p. 894 (1935).

(3) La necessità di una chiarificazione al riguardo è ammessa esplicitamente da A. METZ: « Finora queste questioni sono state trattate da un punto di vista relativistico assai rapidamente, da scienziati preoccupati soprattutto di andare avanti e che talvolta lasciavano nell'ombra dei punti delicati. Sembra venuto il momento di introdurre il massimo di chiarezza e di rigore in un campo finora alquanto trascurato. » Journal de Physique », *13*, p. 224 (1952).

(4) Alcuni sostengono in linea di massima questa tesi, ma poi pongono qualche riserva, cioè l'esperienza sarebbe discriminatrice se eseguita sotto condizioni che peraltro devono ritenersi praticamente irrealizzabili. Si vedrà che questa riserva non è necessaria.

disco è quiescente, le due particelle M_1 ed M_2 tornerebbero contemporaneamente al punto di partenza P. Indicando con t_1 e t_2 i tempi di ritorno in P si ha manifestamente:

$$\Delta t = t_1 - t_2 = \frac{l}{v_1} - \frac{l}{-v_2} \tag{1}$$

se, come abbiamo supposto, vale parimenti la relazione:

$$v_1 = -v_2 . \tag{2}$$

Volendo considerare le cose in modo molto schematico, possiamo dire che con ciò realizziamo una esperienza analoga a quella di Sagnac, nella quale

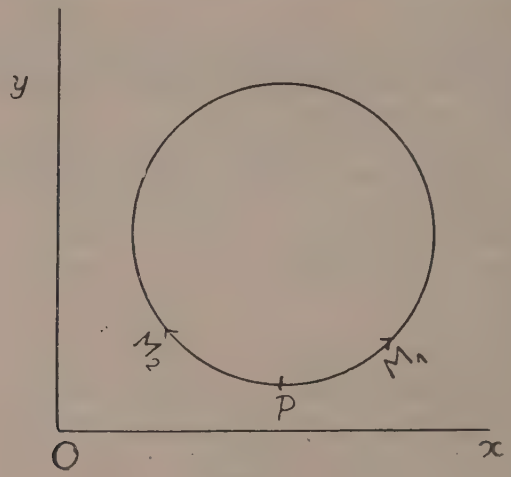


Fig. 1.

sostituiamo ad un flusso di fotoni un flusso di particelle materiali, la cui velocità può essere molto minore di c.

Se ora, ferme restando tutte le altre condizioni, imprimiamo al disco una rotazione uniforme, l'equazione (2) continuerà a valere, secondo la cinematica classica. « In questa teoria si è condotti a prevedere che la rotazione non introduca una differenza nei tempi di percorso tra i due flussi di particelle » [5]. Nel caso dell'esperienza di Sagnac si avrebbe invece, come è ben noto:

$$\Delta t \cong \frac{4S\omega}{c^2} \tag{3}$$

indicando con S l'area racchiusa dalla circonferenza L.

Questo risultato peraltro è previsto tanto dalla cinematica classica quanto da quella relativistica. Ma l'accordo non sussiste, secondo Prunier,

(5) A. Dufour, « C.R. », *200*, p. 46 (1935).

se al flusso di fotoni sostituiamo un flusso di particelle materiali. Se infatti applichiamo la formola relativistica di trasformazione delle velocità, ed indichiamo con v_1 e $\bar{v}_2$ le velocità dei punti M_1 ed M_2 misurate dall'osservatore K solidale con sistema inerziale Oxy, la formola (3) è sostituita dalla:

$$\Delta t = \frac{l}{\bar{v}_1 - u} - \frac{l}{u - \bar{v}_2} \tag{3'}$$

e dovendo essere:

$$\bar{v}_1 = \frac{v_1 + u}{1 + \frac{u v_1}{c^2}} \quad ; \quad \bar{v}_2 = \frac{v_2 + u}{1 + \frac{u v_2}{c^2}} \tag{4}$$

si avrebbe infine:

$$\Delta t = \frac{l}{\frac{v_1 + u}{1 + (v_1 u/c^2)} - u} - \frac{l}{u - \frac{v_2 + u}{1 + (v_2 u/c^2)}} \cong \frac{4 S u}{c^2} . \tag{5}$$

Ossia, adottando la cinematica relativistica siamo indotti a prevedere un risultato analogo a quello dell'ordinaria esperienza di Sagnac. Classicamente dovremmo avere:

$$\Delta t = 0 . \tag{5'}$$

Ciò posto, qualora potessimo costruire un dispositivo capace di realizzare un moto di due particelle materiali M_1 e M_2 aventi velocità uguali e contrarie rispetto all'osservatore K' (solidale col sistema rotante) e percorrenti una circonferenza concentrica in senso contrario, avremmo la possibilità di discriminare tra cinematica classica e relativistica, osservando quale delle due formole (5) e (5') è verificata, osservando cioè se la coincidenza M_1P è simultanea alla coincidenza M_2P.

A. Dufour [6] pensa che tale dispositivo si potrebbe realizzare nel modo seguente. Sia dato un disco materiale D capace di rotare con velocità angolare ω costante intorno ad un asse OZ, ad esempio verticale. Il disco trascini con sé un motore M che fa rotare intorno ad un asse orizzontale con esso solidale un pignone dentato E. Questo ingrana con i suoi denti con due corone dentate orizzontali e che sono solidali con due dischi D_1 e D_2 mobili intorno al medesimo asse del disco D. In queste condizioni Dufour pensa che due punti solidali con i dischi D_1 e D_2 e posti alla medesima distanza dall'asse di rotazione si sposteranno rispetto al disco centrale con velocità uguale ed opposta. In conseguenza di ciò il loro incontro dovrebbe verificarsi in concomitanza di un punto variabile del disco centrale, secondo la cinematica relativistica, mentre dovrebbe verificarsi in concomitanza di due punti fissi e diametralmente opposti secondo la cinematica classica.

(6) A. DUFOUR, «C.R.», p. 894 (1935).

Dufour aggiunge che la realizzazione pratica di tale dispositivo deve ritenersi difficile ma non impossibile.

P. Langevin [7] esaminata criticamente la Nota di Dufour, giunge alla conclusione che il dispositivo ora descritto non permette di conseguire il fine voluto. Il suo giudizio si fonda essenzialmente nel prendere in considerazione lo spessore degli ingranaggi delle corone dentate associate ai dischi D_1 e D_2 e le alterazioni che essi subiscono in virtù della contrazione di Lorentz. Peraltro egli è incline a credere che qualora si realizzasse il contatto tra il pignone E ed i dischi D_1 e D_2 mediante semplice rotolamento, il dispositivo potrebbe essere efficace. L'argomentazione è molto sottile, ma nonostante l'alta autorità del sommo fisico, essa non ha convinto i sostenitori della tesi contraria.

È stato subito osservato [8] che il contatto per ingranaggi dovrebbe al limite, cioè al tendere a zero dello spessore degli ingranaggi, identificarsi con il contatto per semplice rotolamento; onde non si vede bene la ragione della distinzione. Inoltre riesce alquanto difficile pensare che un effetto di second'ordine, quale è la contrazione di Lorentz, possa annullare una previsione di un effetto di prim'ordine, quale è l'effetto Sagnac. Per conseguenza Dufour e Prunier sono rimasti della loro opinione.

Noi riteniamo con Langevin e Metz che il dispositivo non sia idoneo al conseguimento degli scopi prefissi, ma giustificheremo la tesi con un argomento che ci sembra molto più appropriato ed efficace.

3. – L'argomentazione di Prunier si fonda essenzialmente nel ritenere che la formola (2), cioè $v_1 = -v_2$, sia vera, rispetto all'osservatore solidale col disco, tanto se egli è in quiete quanto se egli è in moto rispetto al sistema Oxy.

L'ammissione consegue senz'altro dal principio di relatività. Facciamo però osservare che questo principio non è ammesso generalmente nella fisica classica, e che, quando si ammette, esso è considerato, più che un principio, una conclusione dedotta da leggi dinamiche. Per conseguenza, volendo controllare tale asserzione, la controversia si sposterebbe fatalmente nel campo della dinamica.

A questo riguardo conviene osservare tuttavia che, già molto prima che Einstein fondasse una teoria rigorosamente relativistica, era stato riconosciuto, con la teoria elettromagnetica della massa, che la dinamica newtoniana doveva essere riveduta. Ora è evidente che, se si vuole discriminare tra teoria classica e relativistica, sarebbe inutile indugiarsi nella confutazione di teorie classiche che erano ritenute superate anche indipendentemente dall'accettazione delle nuove concezioni spazio–temporali.

Tuttavia, volendo attribuire alla teoria classica la duplice affermazione che la velocità delle particelle materiali, proiettate ad esempio da una

(7) P. Langevin, «C.R.», *200*, p. 1151 (1935).
(8) A. Dufour, «C.R.», *200*, p. 1283 (1935).

sostanza radioattiva, non è influenzata, rispetto all'osservatore mobile, dal moto attraverso l'etere, mentre ne è influenzata la propagazione delle onde elettromagnetiche, il controllo si eseguirebbe più agevolmente in modo diretto, evitando le complicazioni di ordine pratico derivanti dalla necessità di operare in sistemi rotanti. Indicando con V e con w rispettivamente la velocità delle particelle materiali e della radiazione luminosa, il rapporto V/w dovrebbe dipendere, eseguendo un esperimento comparativo sulla piattaforma terrestre, dalla direzione. Tale dipendenza, poiché V e w differirebbero al prim'ordine, sarebbe praticamente (per quanto non agevolmente rilevabile.

Quanto allo speciale dispositivo sopra descritto, è necessario rivolgere l'attenzione alle norme convenzionali di sincronizzazione.

4. – Per intendere la distinzione che vogliamo sottolineare conviene prendere le mosse della relatività ristretta

$$\begin{array}{ccccc} (-l', \frac{u}{c^2}l') & & & & (l', -\frac{u}{c^2}l') \\ \hline \mathrm{R} & & \mathrm{O}' & & \mathrm{Q}' \end{array} x'$$

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{R} & & \mathrm{O} & & \mathrm{Q} \\ \hline (-l, 0) & & & & (l, 0) \end{array} x .$$

Siano Ox ed $O'x'$ due regoli rigidi rettilinei e sovrapposti, lunghi quanto ci occorrerà considerare, scorrenti l'uno sull'altro con velocità costante u. $O'x'$ si sposti rispetto ad Ox secondo il verso positivo. Consideriamo i due sistemi all'atto della coincidenza delle origini O ed O', mentre gli orologi α ed α' ivi collocati segnano entrambi zero. Siano Q ed R due punti del sistema Ox la cui coordinata x è uguale rispettivamente ad l e $-l$. Siano Q' ed R' i punti del sistema $O'x'$ i quali coincidono, per l'osservatore K, solidale col sistema Ox, con i punti Q ed R all'istante zero. I punti Q' ed R' avranno per coordinata (rispetto a K' beninteso) $l' = \frac{l}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$, $-l' = -\frac{l}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$, e gli orologi α_1 ed α_2 ivi collocati, sincroni per K' con l'orologio originario posto in O', segnano all'atto della coincidenza QQ' ed RR' rispettivamente $-\frac{ul'}{c^2}$ e $\frac{ul'}{c^2}$. **Essi cioè non sono sincroni per l'osservatore K.**

Queste stesse considerazioni valgono ancora quando consideriamo, invece dei sistemi rettilinei Ox ed $O'x'$, due circonferenze sovrapposte o scorrenti l'una sull'altra, a condizione naturalmente che le relazioni tra le misure spazio-temporali degli osservatori K e K' rimangano le stesse. Però nel caso attuale si verifica necessariamente un fatto nuovo che non può verificarsi nella relatività ristretta. Allontanandoci progressivamente dalle origini O ed O' in entrambi i sensi i punti generici Q e Q' possono coincidere **con le origini ed altrettanto si può dire dei punti R ed R'.**

In questo caso gli orologi α_1 ed α_2 collocati in Q' ed R' (si faccia bene attenzione a questo fatto) non sarebbero d'accordo tra loro né con l'oro-

logio originario. Se α segna ad esempio t', gli altri due segnano rispettivamente $t' - ul'/c^2$, $t' + ul'/c^2$. L'orologio α_1' che segna $t' - ul'/c^2$, è sincrono con l'orologio α' che segna t', in quanto, inviando all'istante t_0 (segnato da α') un segnale luminoso da O' lungo la circonferenza l', esso torna in O' quando α_1' segna $t_0 + l'/c$. Ciò nonostante i due orologi, stando al senso comune, ed anche secondo la nozione che Einstein accetta nella relatività ristretta per orologi collocali, non dovrebbero essere giudicati sincroni. Peraltro, se dicendo che essi sono sincroni, intendiamo dire che sono nella relazione predetta, possiamo farlo, stando alle esigenze della logica pura, a condizione di non fare equivoci.

Da qui emerge irrefutabilmente una conclusione. Quando si parla di velocità relativa ad osservatori solidali con sistemi rotanti bisogna fare attenzione al fatto che il significato fisico del termine velocità è legato logicamente al criterio di sincronizzazione di orologi lontani. Per conseguenza, quando diciamo che il dispositivo di Dufour realizza l'uguaglianza (2'), ossia $v_1 = -v_2$, dobbiamo tenere presente che ciò può essere vero o falso secondo il criterio di sincronizzazione che vogliamo adottare. Insomma la risoluzione della questione dipende dal distinguere rettamente tra ciò che corrisponde ad un dato obbiettivo a ciò che dipende da convenzioni arbitrarie.

Un dato obbiettivo, dipendente dalla struttura del dispositivo di Dufour, è il seguente: I punti mobili M_1 ed M_2 dovranno necessariamente incontrarsi nel punto P, e ciò è vero tanto per l'osservatore classico quanto per l'osservatore relativistico, ossia le coincidenze M_1P ed M_2P sono simultanee, ma a condizione di determinare la contemporaneità con un solo orologio, come del resto vorrebbe il senso comune.

È chiaro peraltro, che, se l'osservatore mobile K' determina il tempo delle due coincidenze di M_1 con P e di M_2 con P con due orologi sfasati tra loro, questo gli permette di dire che i due eventi non sono contemporanei, ma con ciò non si cambia e non si può cambiare il contenuto empirico delle leggi di natura.

Per comprendere intuitivamente questa distinzione ed eliminare anche l'ombra del dubbio circa la conclusione finale supponiamo di avere tre dischi sovrapposti D_1, D e D_2 rotanti intorno all'asse comune OZ passante per O. Inizialmente i punti M_1 ed M_2 associati rispettivamente a D_1 e D_2 coincidano con P. Sostituiamo i tre punti con tre fori infinitesimi ed immaginiamo che un fascio di luce investa dall'alto i tre dischi. È chiaro che si avrà passaggio di luce attraverso i tre dischi solo quando i tre fori M_1, P, M_2 sono coincidenti. Ad un nuovo incontro di M_1 con P si avrà passaggio di luce solo se contemporaneamente (nel senso ordinario della parola) anche M_2 coincide con P. Il fatto che la luce passi o non passi dall'alto verso il basso è un dato obbiettivo, indipendente da ogni convenzione, che tanto K' che K dovranno riconoscere, anche se conformemente a certe convenzioni potranno descriverlo in modo diverso.

Ora, se l'osservatore K' ragiona con mentalità classica, dal fatto che la luce passi nella seconda coincidenza di M_1 con P, arguirebbe che le velo-

cità $|v_1|$ e $|v_2|$ di M_1 e M_2, da lui determinate, sono uguali. Ma è anche vero che l'osservatore classico determinerebbe il sincronismo di due orologi lontani (nel caso attuale) attribuendo alla luce, se questa percorre una circonferenza concentrica una velocità $c - v$ oppure $c + v$, secondo il verso. Se invece vuole adottare il criterio di sincronizzazione relativistico, l'osservatore K', per rispettare la coerenza logica, nonostante l'aspetto paradossale della cosa, sarà costretto a dire che le coincidenze di P con M_1 e di P con M_2, non sono simultanee, perché egli determina i tempi di esse mediante due orologi sfasati tra loro di $4S\omega/c^2$ e di $2S\omega/c^2$ rispetto all'orologio originario, pur essendo in presenza dello stesso fatto obbiettivo che la luce passa attraverso i tre fori allineati M_1, P, M_2.

Riassumendo, quando Dufour sostiene che con il suo dispositivo realizza l'uguaglianza delle velocità v_1 e v_2 per l'osservatore classico K', rispondiamo che ciò è vero, ma a condizione che l'osservatore classico adoperi procedimenti classici, cioè, nel caso attuale, sincronizzi orologi lontani attribuendo alla luce una velocità rispettivamente $c - v$ o $c + v$. Ma quando si fa così, allora non è più lecito nel calcolo di $\overline{V}_1$ e $\overline{V}_2$ usare la formola relativistica di trasformazione delle velocità, poiché essa presuppone implicitamente che il criterio di sincronizzazione sia diverso.

Se invece l'osservatore K' determina v_1 e v_2 con procedimento relativistico allora, ammesso che si verifichi il fatto obbiettivo di cui sopra, le velocità v_1 e v_2 sono date rispettivamente dalle formole:

$$(6) \qquad v_1 = \frac{l'}{t' - \frac{2S\omega}{c^2}} \quad ; \qquad (6') \qquad v_2 = -\frac{l'}{t' + \frac{2S\omega}{c^2}}$$

essendo t' il tempo segnato, all'atto della coincidenza di M_1 ed M_2 con P, dall'orologio originario.

Ponendo tali valori nella (5) si ha:

$$\Delta t = \frac{l\left|\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2}\right| + \frac{2lu}{c_2}}{1 - \frac{u^2}{c^2}} = 0.$$

poiché:

$$\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2} = -\frac{2u}{c^2}.$$

Il dissenso sparisce quando i rapporti tra le misure di K e K' sono stabiliti coerentemente.

Si conclude quindi che il dispositivo esaminato non permette di discriminare tra cinematica classica e relativistica, neppure qualora (cosa praticamente impossibile) si realizzasse il contatto del pignone E con i dischi D_1 e D_2 mediante semplice rotolamento e con la debita precisione.

Chimica. — *Polarografia anodica con microelettrodi di platino rotanti* (*). Nota I di Mario Dolcetta e Pietro Lanza, presentata (**) dal Corrisp. G. Semerano.

La ricerca polarografica in campo anodico, che giustifica in primo luogo la sostituzione dell'elettrodo a goccia, ormai classico per la riproducibilità delle sue indicazioni, con elettrodi solidi generalmente di platino, risulta seriamente limitata ed ostacolata dalle vicende che la superficie di questo metallo subisce nel corso della polarizzazione a potenziali positivi.

Sono noti i lavori di vari sperimentatori che si sono cimentati in questo campo della polarografia e hanno ottenuti gradini ben sviluppati di ossidazione di ioni inorganici come Fe^{++}, $Fe(CN)_6^{4-}$, [1], oppure di sostanze organiche quali l'idrochinone [1], la pirocatechina e l'acido ascorbico [2] il galattosio, il destrosio [3], ecc.

Tuttavia il numero di sostanze passibili di ossidazione reversibile con procedimento elettrochimico primario e come tale controllabile per via polarografica, è assai limitato: molte sostanze non presentano alcuna azione depolarizzatrice mentre altre dànno luogo ad un'onda anodica definita ma deformata ben presto da minimo di corrente.

Così per l'acido ossalico, la resorcina, l'alcol metilico ed etilico, l'aldeide acetica, formica [2], e inoltre per l'ossidazione dello ione bromidrico a bromo e dell'iodio elementare a ione ipoiodito.

In tali casi la curva di polarizzazione registrata a potenziali positivi decrescenti (curva inversa) non mostra affatto l'onda della sostanza elettrossidabile presente. Ripetendo la registrazione diretta immediatamente dopo, ricompare l'onda di ossidazione sempre deformata da minimo, tuttavia con corrente anodica nettamente meno intensa: l'intensità di corrente in corrispondenza del gradino non è costante nel tempo ma tende a diminuire, dapprima rapidamente e poi sempre più lentamente.

Se si prepolarizza catodicamente l'elettrodo con breve scarica di idrogeno, l'onda anodica nella successiva registrazione diretta (a potenziali positivi crescenti) appare magnificata: il gradino è ancora tuttavia deformato da minimo e la corrente ha sempre maggiore tendenza a decadere nel tempo di mano in mano che il potenziale tende verso il valore di scarica dell'ossigeno. Ancora, nella curva inversa l'onda non si manifesta.

Si deve escludere che la deformazione del gradino polarografico in parola sia causata dal lento stabilirsi del regime di diffusione perché queste nostre

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica fisica e Centro di Polarografia del C.N.R. di Padova.

(**) Nella seduta del 9 maggio 1953.

(1) H. A. Laitinen e J. M. Kolthoff, « J Phys. Chem., », *45*, 1061 e 1080 (1941).

(2) E. M. Skobets e N. N. Atamanenko, « Zavodskaya Lab. », *15*, 1291–9 (1949).

(3) W. M. Mac Nevin e M. Levitsky, « Anal. Chem. », *24*, 973–5 (1952).

osservazioni si riferiscono da un lato ad elettrodi rotanti a velocità dell'ordine di 750 giri al minuto, e in tali condizioni il gradiente di concentrazione interessa strati di elettrolita di spessore così limitato che il regime di diffusione si stabilisce in modo praticamente istantaneo, e d'altra parte le misure sono state effettuate con apparecchiatura manuale con possibilità di attendere a volontà dopo ogni conferimento di potenziale.

Si deve piuttosto prendere in considerazione la polarizzazione chimica che subisce la superficie elettrodica ad elevati potenziali positivi, praticamente oltre 1,0 V (contro E.C.S.); questa alterazione è stata discussa nel tentativo di dare una interpretazione alle onde deformate da minimo ad opera di Skobets [2], Herasymenko [4], ecc. i quali hanno fra l'altro invocato un adsorbimento dei prodotti di reazione sulla superficie del platino, che avrebbe luogo colle sostanze passibili di ossidazione distruttiva.

Sono d'altra parte da tenere in massima considerazione i lavori di Autori quali Butler [5], Armstrong [6], Beans e Hammett [7], Grubitsch [8] ed altri sul meccanismo di ossido-riduzione di ossigeno e di idrogeno su elettrodi di metalli nobili.

Gli Autori mettono in evidenza con eleganti esperienze la formazione e la distruzione di strati di ossido che precedono l'evoluzione dell'ossigeno e dell'idrogeno.

Non c'è praticamente nessuna zona di potenziale in cui tali elettrodi si possano dire indifferenti; sia nel corso della polarizzazione anodica che catodica, tutto un susseguirsi di processi rendono assai complicato il comportamento dell'elettrodo anche in una semplice soluzione di un elettrolita indifferente, in presenza di aria o di idrogeno, e priva di altre sostanze passibili di ossidazioni o riduzioni elettrolitiche.

Sono particolarmente interessanti a questo riguardo i lavori di Pearson e Butler [5] che mettono bene in evidenza le vicende degli elettrodi nel corso del loro spostamento dal potenziale di equilibrio ai potenziali di scarica dell'ossigeno o dell'idrogeno gassoso, e portano alla distinzione di varie fasi caratterizzate, per la polarizzazione anodica, dai processi $H_2 \rightarrow 2H^+$ (idrogeno sciolto nella soluzione), carica del doppio strato, adsorbimento di ossigeno e scarica di ossigeno, mentre si distinguono nella polarizzazione catodica la rimozione dell'ossigeno adsorbito, che viene sostituito da idrogeno adsorbito e la fase di sviluppo di idrogeno gassoso.

In un nostro lavoro sperimentale, sul quale riferiremo in una prossima Nota, abbiamo cercato di tracciare un quadro per quanto possibile completo delle irregolarità osservate nella registrazione delle curve corrente-

(4) P. HERASYMENKO, « Ukrain. Khem. Zhur. », *4*, 439-55 (1929).

(5) J. A. V. BUTLER, *Electrocapillarity*, p. 174. Methuen e Co. Ltd., London 1940.

(6) BUTLER e ARMSTRONG, « Proc. Roy. Soc., », *137* A, 604 (1932); ARMSTRONG, HIMSWORTH e BUTLER, ibid., *143* A, 89 (1933).

(7) BEANS e HAMMETT, « J. Am. Chem. Soc. », *47*, 1215 (1925); HAMMETT, ibid,. *46*, 7 (1924).

(8) H. GRUBITSCH, « Monatshefte für Chemie », *83*, 549 (1952).

tensione in campo anodico, irregolarità che si presentano sia in assenza di depolarizzatori, sia, in modo quasi generale, con molte sostanze.

Benché non sia facile trarre delle considerazioni conclusive dall'insieme piuttosto complesso dei vari dati sperimentali, ci sembra molto probabile che le fasi distinte messe in evidenza dai lavori ora citati, possano coincidere con tali irregolarità tanto più che esse hanno permesso di definire empiricamente certi « intervalli critici » che corrispondono proprio a valori di potenziali in cui intervengono alterazioni definite dell'elettrodo.

Per esempio nella zona di potenziale in cui il polarogramma, caratteristico di ossidazione dell'acido ossalico in acido solforico 2 N, è alterato dal minimo di corrente che si estende da $+1{,}1$ V alla scarica dell'ossigeno, si avrebbe secondo gli Autori citati, un adsorbimento di ossigeno all'elettrodo.

Le irregolarità che si riscontrano invece, specialmente nelle curve inverse, nelle zone di potenziali meno positivi di $+0{,}5$ V, ci sembrano essere in stretta relazione coi processi di riduzione dell'ossigeno adsorbito.

Non vogliamo entrare ora in dettagli nella discussione di tale argomento e nemmeno indagare il motivo della diversità di comportamento delle due categorie di sostanze che offrono o meno una corrente di diffusione normale e costante in tutto il campo dei potenziali fino al valore di scarica dell'ossigeno.

Desideriamo piuttosto mettere in evidenza come il comportamento dell'elettrodo di platino, soggetto alle azioni chimiche brevemente accennate, costituisca un grave ostacolo al suo impiego polarografico; con questa tecnica infatti il processo elettrochimico di ossidazione della sostanza in esame viene sempre studiato su una base assai incerta: le correnti in gioco nei fenomeni prima visti, assai scarsamente riproducibili, si sovrappongono a quelle caratteristiche del depolarizzatore falsandone i risultati e già il problema di riportare l'elettrodo in condizioni iniziali identiche si presenta difficile.

Risulta chiaro da quanto precede che già ci si troverebbe in condizioni vantaggiose se si potesse lavorare escludendo o attenuando il più possibile il contributo dovuto alle « correnti di fondo » originate dalle varie alterazioni elettrochimiche seguite dall'elettrodo, in modo da poter registrare solamente la corrente che compete al solo processo elettrolitico preso in esame.

A tale scopo ci siamo orientati verso una tecnica di misura differenziale secondo lo schema generale proposto da Semerano e Riccoboni [9], ripreso da Stankoviansky [10], da Smelik e Käs [11] e Nesvadba [12].

Come è noto, tale tecnica prevede l'uso di due celle e due elettrodi il più possibile uguali inseriti in due rami simmetrici di un ponte di Wheatstone.

Quando nelle due celle sono contenute due soluzioni di identica composizione (soluzione base), con opportuni aggiustamenti di resistenze, sarà

(9) G. Semerano e L. Riccoboni, « Gazz. Chim. Ital. », *72*, 297–304 (1942).

(10) S. Stankoviansky, « Chem. Zvesti », *2*, 133 (1948) e *3*, 266–75 (1949).

(11) J. Smelik e H. Käs, « Prakt. Chem. » (Vienna), *1*, 149–51 (1950).

(12) O. Nesvadba, Collection XV, n. 12, 1950, of Czechoslovak Chemical Communications.

possibile portare il ponte nella condizione di equilibrio caratterizzata da corrente nulla attraverso il galvanometro della diagonale.

Con un'ideale compensazione della corrente residua offerta dalle due celle, la curva corrente–tensione dovrebbe in teoria essere costituita da una semplice retta orizzontale prolungantesi oltre i protenziali di scarica dell'elettrolita di fondo ossia, in soluzione acquosa, dell'ossigeno.

L'aggiunta di una sostanza elettrossidabile ad una delle celle provoca il passaggio di una corrente nella diagonale galvanometrica che noi rileviamo visualmente costruendo la curva corrente tensione per punti: anche questa corrente, che è una frazione della corrente di diffusione della specie chimica interessata, dovrebbe teoricamente rimanere costante oltre il potenziale di scarica dell'ossigeno.

In pratica noi abbiamo eseguito le nostre prime esperienze con l'idrochinone ed abbiamo anzitutto ottenuta una buona compensazione della corrente residua usando elettrodi lisci.

Con l'idrochinone in una delle celle in concentrazione pari a $2,2 \cdot 10^{-3}$ M, abbiamo avuto un gradino differenziale regolare con corrente costante dell'ordine di 0,57 μA.

I dettagli della tecnica sperimentale e i risultati conseguiti saranno esaurientemente esposti in una prossima Nota.

Farmacologia. — *Proprietà simpatolitiche ed effetti centrali nei glicinammidi e alaninammidi della serie del 2–metil–1,4–benzodiossano* (*). Nota di GIAN LUIGI GATTI e DANIELE BOVET, presentata (**) dal Socio D. MAROTTA.

Le ricerche sui simpatolitici di sintesi hanno suscitato nel corso degli ultimi anni un interesse sempre crescente per il fatto che i prodotti naturali presentano spesso effetti secondari che ne limitano l'applicazione nel campo della terapia. Tra i simpatolitici che sono stati sperimentati in clinica negli ultimi anni vanno ricordati gli eteri fenolici del gruppo del dietil–ammino–metil–benzodiossano (883 F. o Prosimpal e il 933 F. o Benodaïne), i derivati dell'imidazolina (Benzilimidazolina o Priscol e 7337 Ciba o Regitina), della nafticloroetilammina (Dibenamina) e della fenotiazina (Largactil).

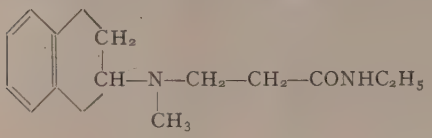
In uno studio recente condotto sui derivati di sintesi sul modello dell'ergotammina, era stato osservato che l'azione simpatolitica era notevole

(*) Lavoro eseguito nei Laboratori di Chimica terapeutica dell'Istituto Superiore di Sanità di Roma.

(**) Nella seduta del 9 maggio 1953.

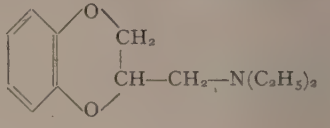
nei derivati del tetraidronaftalene con gruppo β-alaninammide [1]. Fra i numerosi composti sintetizzati secondo questo schema, si erano mostrati più attivi il N–tetraetil–N–metil–N′–etil–β–alaninammide (916 I.S.) (I) e il N–(2–tetraetil)–N′–etil–β–alaninammide (897 I.S.) che invertono l'azione dell'adrenalina sulla pressione arteriosa del cane in narcosi cloralosica.

Le relazioni di isosteria che esistono tra gli anelli della tetralina e del benzodiossano hanno suggerita l'opportunità di studiare, nella serie paral-



(I)

916 I.S.



(II)

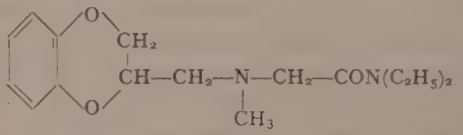
883 F.

lela del 2–amminometil–1, 4–benzodiossano (II) le proprietà farmacologiche dei derivati ammina–ammide che fino ad ora non erano stati oggetto di ricerche.

Riferiremo qui sui dati farmacologici di una serie omogenea di quattordici derivati sulla cui sintesi e sulle cui caratteristiche hanno riferito altrove Marini–Bettolo e Landi–Vittory [2].

Azione simpatolitica sul cane cloralosato. – Le nostre prove sono state condotte sul cane in narcosi cloralosica determinando la dose del prodotto necessaria per ottenere l'inversione dell'azione ipertensiva dell'adrenalina sulla pressione arteriosa.

a) *Derivati della glicinammina e dell'N′–alaninammide.* – I primi risultati ottenuti hanno fatto apparire chiaramente da un lato che l'attività simpatolitica dell'883 F. poteva essere ritrovata nei derivati N–alaninammide (1096 I.S., V) e dall'altro lato la relativa inattività sia dei derivati della N′–alaninammide sia dei derivati della glicinammide.



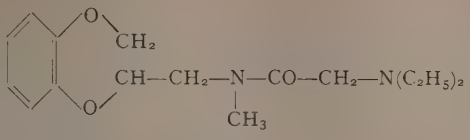
(III)

1097 I. S. – Scarsa attività simpatolitica e diminuzione, senza inversione, della ipertensione adrenalinica [3].

(1) G. B. Marini–Bettolo, S. Chiavarelli e D. Bovet, «Gazz. Chimica Ital.», *80*, 282 (1950); D. Bovet, F. Bovet-Nitti e V. G. Longo, «Rend. Istit. Sup. San.», *15* 924 (1952).

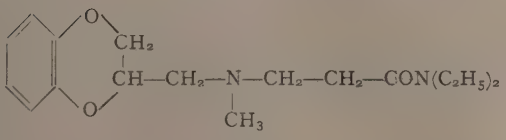
(2) G. B. Marini–Bettolo, R. Landi–Vittory e D. Bovet, «Gazz. Chim. Ital.», *83*, 144 (1953).

(3) Prove sul cane in narcosi cloralosica con registrazione della pressione carotidea: via endovenosa.



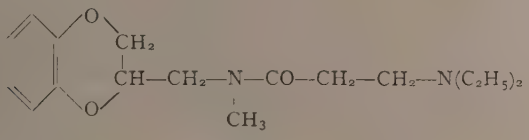
(IV)

1076 I. S. – Inattivo e tossico a 20 mg/kg.



(V)

1096 I. S. – Simpatolitico, inverte l'ipertensione adrenalinica a 5 mg/kg.



(VI)

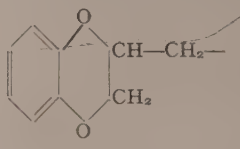
1088 I. S. – Inattivo, tossico a 10 mg/kg.

Risulta infatti da queste prove che la somministrazione del 1097 I.S. (III), provoca solo una diminuzione dell'ipertensione adrenalinica senza invertire l'effetto e i derivati 1076 I.S. (IV) e 1088 I.S. (VI) si sono mostrati tossici senza che vi fosse modificazione dell'azione dell'adrenalina.

b) *Derivati della* N-*alaninammide*. – Nella serie degli N-β-alaninammide del 2-metil-1 , 4-benzodiossano sono stati studiati gli effetti farmacologici delle variazioni di struttura portati sia sull'ammina che sull'ammide riscontrando in tutti i derivati la tipica azione simpatolitica, con maggiore evidenza nel cane in narcosi cloralosica, per i derivati a funzione amminica secondaria (Tab. I).

I vari derivati studiati hanno mostrato oltre ad un antagonismo sull'ipertensione adrenalinica anche un effetto simpatolitico. La somministrazione di piccole dosi (1–5 mg/kg e.v.) non provoca che una transitoria ipotensione o resta senza effetto. L'azione ipertensiva dell'adrenalina sul cane in narcosi cloralosica è diminuita e costantemente invertita a dosi maggiori. Gli effetti dell'eccitazione del nervo splancnico o dell'eccitazione riflessa del simpatico provocate dall'occlusione della carotide o dalla stimolazione dell'estremità centrale del nervo vago sezionato sono ugualmente depressi. Tra i prodotti più attivi si sono rivelati il 1205 I. S. e il 1100 I. S. superiori nella loro azione all'883 F. che inverte l'adrenalina a 1–5 mg/kg, e hanno mostrato un'attività pressapoco uguale a quella del 7337 Ciba.

TABELLA I.

	Numero	R = 	Azione simpat. cane mg/kg e. v.	Tossicità topino e. p. mg/kg	Tachicardia cane sveglio
1	1097 IS	R—N(CH$_3$)—CH$_2$—CO—N(C$_2$H$_5$)(C$_2$H$_5$)	> 20		
2	1205 IS	R—NH—CH$_2$—CH$_2$—CO—NH—CH$_3$	0,5	350	+
3	1100 IS	R—NH—CH$_2$—CH$_2$—CO—N(CH$_3$)(CH$_3$)	0,5	300	+
4	1095 IS	R—NH—CH$_2$—CH$_2$—CO—NH—C$_2$H$_5$	1–2	250	+++
5	1145 IS	R—NH—CH$_2$—CH$_2$—CO—N(C$_2$H$_5$)(C$_2$H$_5$)	2	170	+++
6	1143 IS	R—N(CH$_3$)—CH$_2$—CH$_2$—CO—NH—CH$_3$	5	240	++
7	1098 IS	R—N(CH$_3$)—CH$_2$—CH$_2$—CO—N(CH$_3$)(CH$_3$)	2	200	+++
8	1075 IS	R—N(CH$_3$)—CH$_2$—CH$_2$—CO—NH—C$_2$H$_5$	5	220	+
9	1096 IS	R—N(CH$_3$)—CH$_2$—CH$_2$—CO—N(C$_2$H$_5$)(C$_2$H$_5$)	5	150	+
10	1144 IS	R—N(C$_2$H$_5$)—CH$_2$—CH$_2$—CO—NH—CH$_3$	2	150	+++
11	1099 IS	R—N(C$_2$H$_5$)—CH$_2$—CH$_2$—CO—NH—C$_2$H$_5$	2	220	++
12	1149 IS	R—N(C$_3$H$_7$)—CH$_2$—CH$_2$—CO—NH—CH$_3$	5–10	200	++

AZIONE SIMPATOLITICA NELLA CAVIA E NEL CONIGLIO. – Un'azione simpatolitica si ritrova sulla velocità di perfusione del treno posteriore di cavia. In un preparato che reagisce normalmente con vasocostrizione e diminuzione del flusso all'iniezione di una dose di 0,01 mg. di adrenalina, si osserva l'effetto antagonista alla dose di 0,05 e 0,1 mg. di 1205 I. S.

Sull'utero di coniglia *in situ* si può constatare l'effetto contratturante dell'adrenalina (0,002 mg/kg, e. v.) viene regolarmente diminuito da una dose di 0,5 mg. e abolito completamente con dosi di 1–2 mg. di 1205 I.S.

AZIONE CENTRALE SULL'ANIMALE SVEGLIO. – In rapporto alle osservazioni già fatte nella serie della tetraidronaftilammina, si è stabilito un confronto fra gli effetti centrali dei derivati conosciuti della serie dell'ammino–metilbenzodiossano con i nuovi composti con funzione amminica–ammidica. Nel 1935 Handowsky [4] aveva messo in evidenza il differente comportamento dell'883 F. nel cane in narcosi cloralosica e nel cane sveglio, riscontrando nel primo ipotensione e bradicardia e nel secondo tachicardia ed eccitazione.

Le nostre esperienze sono state condotte sul cane sveglio, famigliarizzato coll'ambiente in modo da poter registrare l'elettrocardiogramma sull'animale lasciato libero nella gabbia e con un ritmo normale di 100–120 pulsazioni al minuto. Dopo le prime prove di orientamento si è provata la serie completa dei derivati su due cani divenuti particolarmente domestici, per un periodo di tre mesi ripetendo più volte gli esperimenti, alternando i prodotti più attivi con quelli meno attivi e controllando lo stesso prodotto sui due animali. La dose usata è di 5 mg/kg s. c. e in un primo tempo sono stati confrontati coi nuovi prodotti l'883 F., la Joimbina e il 7337 Ciba. Nei vari esperimenti si è notato che la tachicardia non si accompagna a nessuna manifestazione motrice persistente persino in animali in apparente stato di sonnolenza.

I prodotti della serie ammina–ammide del benzodiossano provocano effetti molto diversi fra di loro.

a) Una tachicardia massima (+++ Tabella I) è stata osservata nei prodotti che, come la Joimbina e il 7337 Ciba, provocano un costante aumento delle pulsazioni che superano le 300 al minuto. Tra questi derivati sono il 1095 I.S., il 1145 I.S.; il 1098 I.S. e il 1144 I.S.

b) Una forte tachicardia (++) benché meno elevata, è stata riscontrata nei prodotti che si avvicinano all'azione centrale dell'883 F. Tra questi sono il 1143 I.S., il 1099 I.S., il 1149 I.S. e il 1150 I.S. In questo gruppo è stata notata una variazione individuale degli animali in esperimento che non appare alla somministrazione dei prodotti del gruppo precedente. Il ritmo delle pulsazioni, per i prodotti qui ricordati resta tra le 240–260 al minuto.

c) Un effetto molto caratteristico (+), ma sempre restando nell'ordine di un aumento di pulsazioni di 200–220 al minuto, hanno dimostrato i successivi studi sul 1075 I.S. e il 1096 I.S. che invertono l'adrenalina alla dose di 5mg/kg., e il 1100 I.S. e il 1205 I.S. che provocano lo stesso fenomeno a 0,5 mg/kg e. v.

I derivati del diossano non provocano sempre sul ritmo cardiaco degli altri animali di laboratorio, i caratteristici effetti osservati sul cane.

(4) H. HANDOWSKY, «C. R. Soc. Biol.», *118*, 1245 (1935).

Nel coniglio la somministrazione dei prodotti in esame ha provocato solo eccezionalmente tachicardia e comunque non si è potuto dimostrare parallelismo coi dati ottenuti sul cane.

Nella scimmia (*Macacus rhesus* dal peso di 2,5–4,5 kg.) si è notata tachicardia dopo la somministrazione di Joimbina, dell'883 F. e del 7337 Ciba con variazioni del ritmo da 200 a 250 pulsazioni al minuto. Nei derivati ammidici del diossano la tachicardia è stata notata, ma con caratteristiche di minore durata che nel cane. La impossibilità di abituare l'animale all'esperimento e la necessità di tenerlo legato, costituiscono condizioni meno favorevoli allo studio. Altre prove condotte sulla scimmia libera nella gabbia in cui un doppiofondo permetteva la registrazione della attività spontanea hanno dimostrato che la somministrazione della solita dose di 5 mg/kg s. c. di prodotto non ha provocato alcun effetto all'infuori delle prove colla Joimbina che già alla dose di 2,5 mg/kg provoca disturbi motori e stato comatoso.

Dai dati sopra riportati è dunque possibile concludere che una notevole attività simpatolitica è stata osservata nei nuovi derivati del metilbenzodiossano con doppia funzione ammidica e amminica e particolarmente nel 1205 I.S., N–(2–metil–1,4–benzodiossano)–N′–metil–β–alaninammide, nel 1100 I.S., N–(2–metil–1, 4–benzodiossano)–N′ , N′–dimetil–β–alaninammide, nel 1075 I.S., N–(2–metil–1 , 4–benzodiossano)–N–metil–N′–etil–β–alaninammide e nel 1096 I.S. N–(2–metil–1 , 4–benzodiossano)–N–metil–N′ , N′–dietil–β–alaninammide.

L'interesse maggiore dello studio di questo nuovo gruppo pare costituito dalle prove sull'animale sveglio e particolarmente sul cane che ha dimostrato come più derivati hanno scarsa quella attività centrale che fino ad ora ha costituito il maggiore ostacolo per l'uso terapeutico di molti simpatolitici naturali e sintetici.

Paleontologia. — *Primo rinvenimento di un Mammifero terrestre nel Miocene sardo.* Nota preliminare di Ida Comaschi Caria, presentata (*) dal Corrisp. S. Vardabasso.

Nelle marne di Sardara (Campidano), durante lo scavo di un pozzo, a circa dieci metri di profondità, è stata rinvenuta una piccola mandibola con alcuni frammenti d'ossa. Il buono stato di conservazione del materiale, e specialmente dei denti, ha permesso di attribuire i resti fossili in parola all'*Amphitragulus boulangeri*, Pomel. Si tratta di una forma primitiva di Cervo (famiglia *Palaeomerycidae*, superfamiglia *Cervoidea*) di piccola taglia, senza corna anche negli adulti. A giudicare dai denti appuntiti l'individuo, al quale apparteneva la mandibola trovata a Sardara, era abbastanza giovane.

(*) Nella seduta del 9 maggio 1953.

Le marne gialle argillose di Sardara appartengono al Miocene, come ebbi a precisare precedentemente [1]; d'altra parte già il Lamarmora [2] le riteneva tali. Soltanto il Bassani [3,4,5] attribuì allo Stampiano il bacino di Ales–Sardara in base ad incerte determinazioni di una fauna ittiolitica (*Clupea*, *Lepidopus*, *Palaeorhynchus*), che avrebbe perciò bisogno di una revisione; ma l'Autore in parola non l'ha figurata né tanto meno ha dato indicazioni circa la collezione di cui essa fa parte. I resti fossili di Pesci ritrovati sino ad ora da me a Sardara non sono sufficienti per fare uno studio in tal senso.

È, però, ormai comunemente acquisito che per la zona di Ales–Sardara si tratta di Miocene; resta soltanto da stabilire l'attribuzione del piano.

Gli Invertebrati fossili sino ad ora conosciuti per la zona non permettono una sicura determinazione stratigrafica per piani. Prendendo, infatti, in considerazione le specie più caratteristiche riscontrate nel bacino Ales–Sardara è da notare che il *Chlamys northamptoni* è conosciuto dal Tongriano all'Elveziano; in Corsica si ha nell'Elveziano inferiore e secondo Lambert [6] in Sardegna dovrebbe trovarsi nello stesso livello come in effetti capita in altre zone dell'Isola; in Francia, invece, questa specie si trova nel Burdigaliano. L'*Amussium corneum* si riscontra generalmente nel Langhiano e negli strati di passaggio all'Elveziano; il *Pericosmus agassizi* ed il *Pericosmus pedemontanus* sono stati segnalati nell'Elveziano.

Il ritrovamento dell'*Amphitragulus boulangeri* mi pare, invece, possa dare la soluzione del problema.

L'*Amphitragulus boulangeri* va dall'Oligocene superiore al Burdigaliano. Siccome per il bacino Ales–Sardara l'assegnazione al Miocene è, come si è detto, acquisita e poiché l'*A. boulangeri*, per tale periodo, è limitato al Burdigaliano, sono attribuibili a tale piano le formazioni mioceniche della zona in questione.

Il Burdigaliano di Sardara è trasgressivo sul Silurico del Monreale ed è attraversato e coperto a tratti, ora da formazioni trachitiche, ora da formazioni basaltiche, entrambe post–burdigaliane.

Evidentemente la mandibola di *Amphitragulus* di Sardara proviene da un individuo vissuto nelle terre emerse a breve distanza (Monreale).

(1) I. COMASCHI CARIA, *I fossili della Sardegna*. « Istituto per gli Studi Sardi dell'Università di Cagliari » (1949).

(2) A. LAMARMORA, *Voyage en Sardaigne*. Paris 1856.

(3) F. BASSANI, *Avanzi di « Clupea (Meletta) crenata » nelle marne stampiane di Ales in Sardegna*. « Rend. Acc. Sc. Fis. e Mat. di Napoli », VI, 5–7 (1900).

(4) F. BASSANI, *Alcuni avanzi di pesci nelle marne stampiane di Ales in Sardegna*. « Rend. Acc. Sc. Fis. e Mat. di Napoli », VI, 5–7 (1900).

(5) F. BASSANI, *Nuove osservazioni paleontologiche sul bacino stampiano di Ales in Sardegna*. « Rend. Acc. Sc. Fis. e Mat. di Napoli », VII, 7 (1901).

(6) J. LAMBERT, *Description des échinides fossiles des terrains miocéniques de la Sardaigne*. I, II parte. « Mem. Soc. Pal. Suisse », 34–35 (1907–1908).

Le località più vicine alla Sardegna in cui siano stati trovati resti attribuibili all'*Amphitragulus boulangeri* sono situate nella Francia centro-meridionale [7]. È ancora aperto il problema paleogeografico di come questa specie sia venuta in Sardegna: probabilmente attraverso la Corsica.

Premesso che, per quanto consta finora, l'*Amphitragulus boulangeri* è specie estinta nel Miocene inferiore, si può tuttavia ricordare che forme relativamente affini (*Elaphodus*) vivono attualmente nell'Asia [8].

Mineralogia. — *Cella elementare e gruppo spaziale della simonellite.* Nota I di FRANCESCO EMILIANI e RENATO PELLIZZER, presentata [*] dal Corrisp C. ANDREATTA.

In una Nota precedente abbiamo esposto i dati dello studio morfologico ed ottico della simonellite [1]; in base ad essi risultava l'appartenenza di tale minerale al sistema rombico. Conferma di ciò si è avuta dalle ricerche röntgenografiche, anch'esse condotte su cristalli naturali e su cristalli ottenuti per evaporazione spontanea di una soluzione in alcool etilico (ved. fig. 1).

Il presente lavoro è diviso in due parti: nella prima vengono riportati i dati riguardanti la simmetria, le dimensioni della cella elementare ed il numero di molecole in essa contenute; nella seconda quelli riguardanti il gruppo spaziale.

Tali ricerche sono state rese possibili dall'aver avuto a disposizione la camera Weissenberg (della Charles Supper Co.-Newton-Mass.) nell'Istituto di Mineralogia e Petrografia di Bologna; siamo grati al prof. Angelo Bellanca, che ci ha ospitati nell'Istituto di Mineralogia e Petrografia di Palermo, dove abbiamo potuto apprendere la metodologia ed eseguire in parte il lavoro sperimentale.

a) Spettrogrammi di Laue. – Per un ulteriore controllo della simmetria abbiamo eseguito uno spettrogramma di Laue facendo incidere le radiazioni provenienti da un anticatodo di rame normalmente al piano (001). In questo spettrogramma sono ben evidenti le tracce di due soli piani di simmetria fra loro normali. A prima vista si potrebbe rilevare la presenza delle tracce di altri due piani di simmetria normali fra loro e a 45° dai primi; esa-

(7) F. ROMAN, *Sur quelques Mammifère du Miocène du Bordelais.* « Actes Soc. Lin. Bordeaux », 74 (1923).

(8) J. BENINDE, *Zur Naturgeschichte des Rothirsches.* « Monographien der Wildsäugetiere », IV, Leipzig 1937.

(*) Nella seduta del 9 maggio 1953.

(1) F. EMILIANI e R. PELLIZZER, *Studio morfologico ed ottico della simonellite.* Dai « Rend. dell'Acc. Naz. dei Lincei » (Cl. Sc. fis., mat. e nat.), serie VIII, vol. XII, p. 724 (1952).

minando ulteriormente ci si rende conto che si tratta soltanto di una pseudosimmetria tetragonale cui si accennerà anche in seguito (ved. fig. 2).

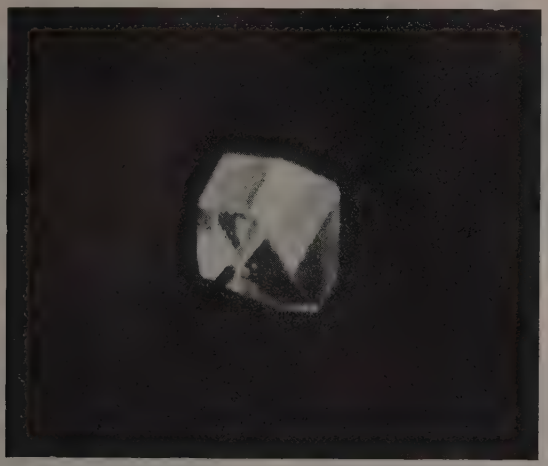


Fig. 1. – Cristallo di simonelite ottenuto da una soluzione in alcool etilico. 32×.

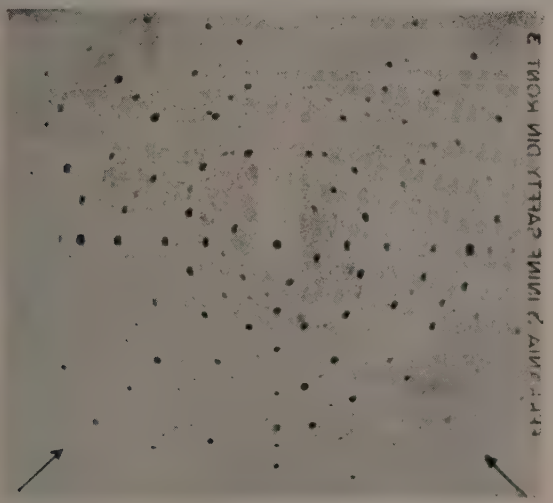


Fig. 2. – Diagramma di Laue secondo (001). Ant. Cu. D = 2,5 cm.
(le frecce indicano le tracce dei due piani di simmetria)

b) *Spettrogrammi di Debye*. – Dagli spettrogrammi ottenuti su polveri di simonellite naturale ed artificiale viene riconfermata la perfetta identità del minerale e del prodotto ottenuto per cristallizzazione (ved. fig. 3).

c) *Spettrogrammi di Polanyi.* – Per determinare le dimensioni della cella elementare, abbiamo eseguito, per la simonellite artificiale, gli spettrogrammi corrispondenti alle rotazioni attorno agli assi [100], [010] e [001];

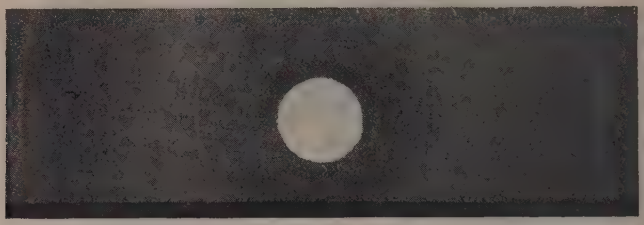


Fig. 3 *a*. – Spettro di polvere di simonellite naturale. Ant. Cu. R = 57,3.

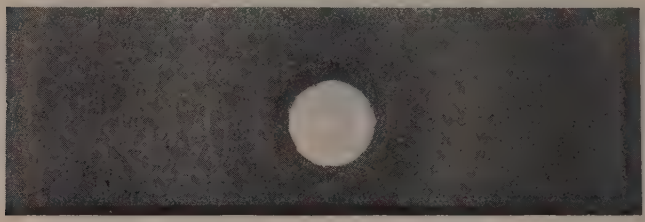


Fig. 3 *b*. – Spettro di polvere di simonellite artificiale. Ant. Cu. R = 57,3.

per la simonellite naturale, una volta provata la sua identità con il prodotto artificiale, il solo spettrogramma corrispondente alla rotazione intorno a [100], che consente di determinare il periodo di identità *a*; *b* e *c* sono calco-

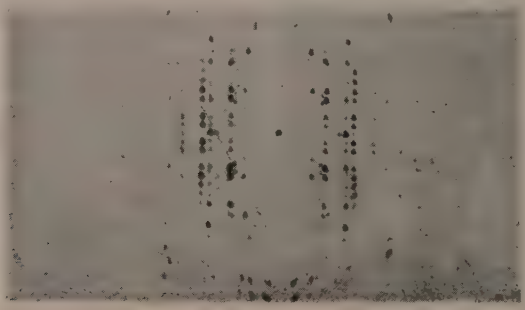


Fig. 4. – Polanyi di simonellite artificiale intorno a [001]. Ant. Cu. R = 28,65.

labili dagli spettrogrammi Weissenberg (ved. Nota II). Tutti gli spettri sono stati effettuati con anticatodo di rame senza filtro, usando una camera del diametro di mm. 57,3. I risultati ottenuti sono riportati nelle tabelle I e II.

TABELLA I.

Simonellite artificiale.

Asse di rotaz.	λ	*n*	2*y* in mm.	sen ν	*t* [*u* , *v* , *w*]	media
[100]	K_α	1	10,00	0,17192	8,95	
	»	2	20,50	0,33684	9,14*	9,12
	»	3	33,75	0,50750	9,10*	
	»	4	52,50	0,67549	9,11*	
[010]	K_α	1	9,75	0,16906	9,10	
	»	2	20,20	0,33246	9,25*	
	»	3	32,85	0,49738	9,28*	
	»	4	51,00	0,66500	9,25*	9,27
	K_β	1	8,75	0,15097	9,20*	
	»	2	18,00	0,29962	9,27*	
	»	3	28,75	0,44850	9,29*	
[001]	K_α	1	2,50	0,04361	35,29	
	»	2	5,00	0,08690	35,42	
	»	3	7,50	0,13023	35,45	
	»	4	10,00	0,17193	35,80*	
	»	5	12,65	0,21559	35,69*	
	»	6	15,25	0,25715	35,90*	35,80
	»	7	18,15	0,30186	35,68*	
	»	8	21,00	0,34421	35,76*	
	»	9	24,00	0,38638	35,85*	
	K_β	5	11,25	0,19268	36,04*	
	»	8	18,75	0,31100	35,73*	

TABELLA II.

Simonellite naturale.

Asse di rotaz.	λ	*n*	2*y* in mm.	sen ν	*t* [*u* , *v* , *w*]	media
[100]	K_α	1	9,75	0,16774	9,17	
	»	2	20,50	0,33684	9,14*	
	»	3	33,75	0,50750	9,10*	
	»	4	52,75	0,67727	9,09*	9,12
	K_β	1	8,75	0,15095	9,20	
	»	2	18,25	0,30348	9,15*	
	»	3	29,50	0,45776	9,10*	

Le dimensioni della cella elementare sono state calcolate facendo la media aritmetica dei valori più probabili (nella tabella contrassegnati con

Fig. 5. – Polanyi di simonellite naturale intorno a [100].
Ant. Cu. R = 28,65.

asterisco) ottenuti dai suddetti spettrogrammi di simonellite artificiale e sono:

$$a = 9{,}12$$

$$b = 9{,}27$$

$$c = 35{,}80;$$

questi valori confermano la già rilevata pseudotetragonalità della simonellite. Il rapporto assiale corrispondente viene ad essere:

$$a : b : c = 0{,}984 : 1 : 3{,}871.$$

Dalle misure goniometriche, avendo, tra le facce di bipiramide, scelto come fondamentale quella più sviluppata nei cristalli naturali, la sola presente in quelli artificiali, risultava [2]:

$$a : b : c = 0{,}987 : 1 : 1{,}935.$$

Perché questo rapporto assiale sia confrontabile col primo è necessario raddoppiare il rapporto parametrico corrispondente all'asse z:

$$a : b : c = 0{,}987 : 1 : 3{,}870.$$

(2) F. Emiliani e R. Pellizzer, loc. cit.

Se ne deduce che la faccia da noi scelta a suo tempo come fondamentale è la (112) e si rileva come talvolta possa essere arbitrario il criterio di scelta basato sulla morfologia.

d) *Numero di molecole nella cella elementare.* – Noto il volume della cella elementare ($V = 3026{,}6\ Å^3$) ed accettando il valore riportato da Boeris [3] per il peso molecolare della simonellite ($M = 200$), abbiamo determi-

Fig. 6. – Polanyi di simonellite artificiale intorno a [010].
Ant. Cu. R = 28,65.

nato il valore del peso specifico ($D = 1{,}08$) allo scopo di calcolare il numero di molecole contenute nella cella elementare.

Ci risulta:

$$z = \frac{V \cdot D}{M \cdot 1{,}64 \cdot 10^{-24}} = 9{,}97 \sim 10 .$$

Nella cella elementare risulterebbero quindi contenute 10 molecole. Ci riserviamo di confermare questo dato, la cui attendibilità è subordinata alla esattezza della determinazione del peso molecolare, quando avremo ultimato le ricerche in corso sulla struttura.

La determinazione del peso specifico è stata eseguita con il metodo dei liquidi pesanti, che si è dimostrato il più adatto, usando una soluzione di KCl.

(3) G. BOERIS, *Sopra un idrocarburo della lignite di Fognano. Nota preliminare.* Dai « Rendiconti dell'Accademia delle Scienze di Bologna », vol. XXIII, p. 83 (1918-19).

Zoologia. — *Sulla forma adulta di un Echinostomide (Trematoda Digenea) ottenuta sperimentalmente nel ratto bianco di laboratorio.* Nota di ROBERT PH. DOLLFUS (*), presentata (**) dal Corrisp. V. PUNTONI.

Durante ricerche elmintologiche eseguite nelle vicinanze di Olbia (sulla costa orientale della Sardegna) E. Biocca e P. L. Le Roux (1) hanno trovato, in alcune *Physa*, *Limnaea* e *Bulinus*, metacercarie incistate di un Echinostomide di cui hanno rinvenuto le redie e le cercarie in alcuni *Bulinus contortus* (Michaud).

L'ospite definitivo di questo trematode (verosimilmente un uccello) non è stato identificato nella natura, ma la forma adulta è stata ottenuta sperimentalmente, 15 giorni dopo l'ingestione delle metacercarie, in ratti bianchi di laboratorio [*Epimys norvegicus* (Erxleben) *albus*] presso l'Istituto di Parassitologia di Roma, da E. Biocca e P. L. Le Roux, i quali hanno avuto la gentilezza di inviarmi alcuni individui, per cui esprimo qui la mia riconoscenza.

Questo Echinostoma, che io colloco nel genere *Echinoparyphium* E. Dietz 1909 (vedere più avanti la discussione su questa attribuzione), presenta caratteri abituali del genere e qualche carattere particolare che permettono di considerarlo come una specie nuova.

DESCRIZIONE. – Corpo circa 5 volte più lungo che largo, conservá a un di presso la stessa larghezza su circa la metà della sua lunghezza e si restringe verso le estremità, più rapidamente davanti all'acetabolo, più lentamente a partire della metà del testicolo posteriore. Le spine della cuticola scompaiono dopo il primo quinto della lunghezza. Ventosa orale piccola, termino–ventrale, circolare o ovale. Spine cefaliche nel numero totale di 43, su due linee, senza interruzione medio-dorsale; quelle della linea aborale sensibilmente più lunghe di quelle della linea orale; spine angolari ineguali tra loro. Acetabolo con apertura anteriore, grande, occupa la parte anteriore del 2° quinto della lunghezza del corpo e deborda un po' sulla fine del primo quinto. Prefaringe assente o estremamente corto, che compare solamente quando l'estremità anteriore del corpo è in estensione. Faringe ellissoidale o piriforme, a un di presso lungo quanto la ventosa orale. Esofago più di 2 volte più lungo del faringe. I ciechi intestinali raggiungono quasi l'estremità posteriore del corpo. I 2 testicoli sono ovali, allungati longitudinalmente nello spazio intercecale immediatamente l'uno dietro l'altro e in contatto; l'anteriore è leggermente più corto del posteriore e raggiunge

(*) Dal Museum National d'Histoire Naturelle, Paris.

(**) Nella seduta dell'11 aprile 1953.

(1) E. BIOCCA e P. L. LE ROUX, *Osservazioni sul ciclo evolutivo di un nuovo Echinostomide*. Comunicazione presentata all'Acc. Naz. Lincei nella seduta dell'11 aprile 1953.

anteriormente presso a poco il livello della metà lunghezza del corpo. L'ovaio con contorno regolarmente circolare o piriforme, situato un po' a cavallo della metà lunghezza del corpo, nella metà della larghezza. *Receptaculum seminis* con contorno regolarmente circolare è situato a destra della linea mediana, nello spazio che separa il testicolo anteriore dall'ovaio. Allo stesso livello si trova il vitellodutto trasverso. I vitellogeni si continuano senza interruzione tra i bordi laterali del corpo e i ciechi intestinali; in contatto con questi ultimi non penetrano nel terzo anteriore del corpo e finiscono ad una certa distanza in dietro all'acetabolo; non si riuniscono posteriormente da un lato all'altro del corpo e terminano allo stesso livello dei ciechi intestinali a una piccola distanza dalla estremità posteriore del corpo, al lato della parte distale della vescica escretrice. La borsa del cirro, un po' fusiforme, relativamente grande, situata obliquamente contro il bordo anteriore destro dell'acetabolo, non supera posteriormente il livello del centro dell'acetabolo; contiene una grande vescicola seminale bipartita e il cirro invaginato. Quest'ultimo è molto lungo e quando è completamente svaginato la sua lunghezza supera la larghezza del corpo. Il poro genitale è leggermente spostato verso sinistra, tra il bordo anteriore dell'acetabolo e la biforcazione intestinale. L'utero è piuttosto corto e le sue sinuosità restano comprese nello spazio intercecale e sono sopratutto sviluppate tra l'ovaio e l'acetabolo. Contiene circa 30–45 uova a guscio sottile; la sua parte distale è differenziata in *metratermo*.

DIMENSIONI. – Lunghezza del corpo: circa 3 mm; larghezza circa 0,55 mm. Ventosa orale: 0,105×0,105 a 0,095×0,125 mm. Spine cefaliche: linea anteriore (orale): 28–31,5×7 μ; linea posteriore (aborale): 38,5–41,6×7,5–8 μ; angolari: 34–37,5×7,5–8 μ e 43–46,8×7,5–8 μ. Faringe: 102×95 μ a 110×95 μ. Ventosa ventrale: 316 a 360 μ. Testicolo anteriore: 410×277 μ a 425×252 μ. Testicolo posteriore: 440×252 a 510×252 μ. Ovaio: 155×155 μ a 210×135 μ. *Receptaculum seminis*: diametro 125 μ. Uova: 83×50 μ; 83,3×52,7 μ; 84,3×46,8 μ; 88×52 μ.

DISCUSSIONE DELL'ATTRIBUZIONE GENERICA. – La più recente revisione degli Echinostomidi è quella di Hans Mendheim [2-3]. I generi vengono raggruppati in una tabella (1940, p. 496; 1943, p. 183) in base a 6 caratteri principali:

1° « Plateau » cefalico con o senza incisura dorsale.

2° Spine cefaliche su una o due file.

3° Interruzione dorsale o continuità della fila o delle due file di spine cefaliche.

(2) H. MENDHEIM, *Beiträge zur Systematik und Biologie der Familie Echinostomatidae (Trematoda)*. « Nova Acta Leopoldina, Halle (Saale), Neue Folge », Bd. VIII, n. 54, pp. 487–588, figg. 1*a*–41 (1940).

(3) H. MENDHEIM, *Beiträge zur Systematik und Biologie der Familie Echinostomatidae*. « Archiv. für Naturgesch. », N. F., Bd. XII, Heft 2, pp. 175–302 (1943).

4° Cirro inerme o spinoso.

5° Borsa del cirro più o meno voluminosa, che si estende posteriormente al di là dell'acetabolo o non.

6° Vescicola seminale non divisa o bipartita.

L'Echinostoma che noi desideriamo identificare presenta i seguenti caratteri, in base alla tabella di Mendheim:

« Plateau » cefalico senza incisura dorsale, spine cefaliche su due linee senza interruzione, cirro non spinoso, borsa del cirro bene sviluppata, che non si estende però posteriormente al di là dell'acetabolo; vescicola seminale bipartita.

La riunione dei caratteri corrisponde nella tabella dei generi solamente a *Paryphostomum* E. Dietz 1909 e, nella chiave delle sottofamiglie (H. Mendheim 1943, p. 213) alla sottofamiglia *Paryphostomatinae* H. Mendheim 1943. Questa attribuzione è inaccettabile, poiché, nel nostro Echinostoma, gli altri caratteri (numero di spine cefaliche, posizione e dimensioni della borsa del cirro, forma dell'acetabolo, forma dei testicoli, posizione dell'ovaio in rapporto ai testicoli e all'acetabolo, separazione posteriore dei vitellogeni ecc.) considerati non isolatamente ma nel loro insieme, sono incompatibili con *Paryphostomum*, come con l'altro genere (*Drepanocephalus* E. Dietz 1909) che costituiscono insieme la sottofamiglia *Paryphostomatinae*.

È necessario dunque apportare una modificazione alla tabella di Mendheim per accordarla con le caratteristiche generiche. Siamo così costretti a verificare se il 6° carattere « vescicola seminale bipartita » sia l'appannaggio solo del *Paryphostomum* tra i nove generi della tabella che presentano in comune i cinque primi caratteri principali. In altri termini, è necessario esaminare se, tra gli otto altri generi indicati come aventi la vescicola seminale non divisa e presentanti tutti quei cinque caratteri, esista qualche genere che abbia delle specie con vescicola seminale bipartita come il 9° genere (*Paryphostomum*). Questi otto altri generi sono *Euparyphium* E. Dietz 1909, *Echinostoma* Rudolphi 1809, *Echinoparyphium* E. Dietz 1909, *Pegosomum* Ratz 1903, *Parechinostomum* E. Dietz 1909, *Petasiger* E. Dietz 1909, *Chaunocephalus* E. Dietz 1909, *Balfouria* R. T. Leiper 1908.

Lasciando di lato il carattere della vescicola seminale, non abbiamo altra scelta per il nostro Echinostoma, che tra i generi della sottofamiglia *Echinostomatinae* (senza H. Mendheim) (per la diagnosi della quale H. Mendheim (1943, p. 215) dice: Samenblase ungeteilt!) (nota 1).

Noi possiamo eliminare quindi subito dagli otto generi precisati i cinque che appartengono a delle altre sottofamiglie; restano così: *Euparyphium*, *Echinoparyphium*, *Echinostoma*.

Nota 1. – *Echinostoma megacanthum* Alex Kotlan 1922, che ha la vescicola seminale bipartita è escluso dalla sottofamiglia *Echinostomatinae* per questa sola ragione da Mendheim (1943, p. 224). A mio avviso questa esclusione non è giustificata e la bipartizione della vescicola seminale non ha, dal punto di vista sistematico, l'importanza che le attribuisce Mendheim.

Confrontiamo il nostro Echinostoma con questi tre generi: nell'*Euparyphium* la cuticola non è spinosa, il corpo è filiforme, i vitellogeni riempiono tutto lo spazio post-testicolare, non esistono più di 27 spine cefaliche e sono eguali fra loro; nell'*Echinostoma* l'utero è molto lungo e le uova numerosissime, cosa che non si accorda con la nostra specie, sebbene gli altri caratteri potrebbero anche corrispondere, qualora si rigettasse dalla diagnosi generica data da H. Mendheim (1943, p. 228) il carattere « spine della linea orale (anteriore) mai più corte di quelle della linea aborale ». Resta *Echinoparyphium* e tutti i caratteri della diagnosi generica (non tenendo conto della vescicola seminale) concordano, da cui la conclusione che ci sembra giustificato riportare il nostro Echinostoma a questo genere piuttosto che al genere *Echinostoma*, ancor più se si osserva la figura originale data da A. Looss (1899, pl. XXV, fig. 18) [4] per *E. elegans* A. Looss, genere tipo dell'*Echinoparyphium*, in cui si constata che la vescicola seminale è figurata bipartita.

Da questa constatazione risulta che il carattere « vescicola seminale non divisa » non deve essere considerata una caratteristica costante del genere *Echinoparyphium*, ma che è solamente un carattere presentato da molte specie del genere.

Un altro carattere della diagnosi generica è incostante, nel senso che alcune specie non lo presentano; è quello della separazione dei vitellogeni dietro ai testicoli. Esistono infatti delle specie in cui tutti i caratteri sono conformi alla diagnosi generica, ad eccezione che i vitellogeni di ogni lato del corpo sono confluenti nello spazio post-testicolare; *Echinoparyphium baculoides* R. Ph. Dollfus 1951 [5] si trova in queste condizioni, come l'*Echinoparyphium recurvatum vanelli* S. Yamaguti 1939 (cfr. R. Ph. Dollfus 1951, pp. 164-165) [6].

Esiste in questo genere una specie già conosciuta che corrisponda al nostro Echinostoma? Cerchiamo di rispondere a questa domanda.

Nota 2. – Sarebbe stato preferibile che i caratteri indicati per i generi nella tabella di Mendheim (1940, p. 496; 1943, p. 183) fossero di accordo con quelli dati nel testo per le diagnosi generiche. Per esempio per *Echinochasmus*, questa tabella indica che la fila di spine cefaliche è interrotta dorsalmente (ciò che si accorda con la diagnosi data da A. Looss e E. Dietz), mentre il testo (1943, p. 238) dice che non esiste interruzione: « nicht unterbrochenen Reihe ». Tali contraddizioni confondono e scoraggiano coloro che non hanno una competenza particolare sugli *Echinochasminae* (cfr. R. Ph. DOLLFUS 1950, p. 64). In realtà l'interruzione non è un carattere comune a tutti gli *Echinochasmus* e non è neppure costante in una stessa specie.

(4) A. LOOSS, *Weitere Beiträge zur Kenntniss der Trematodenfauna Aegyptens*. « Zoolog. Jahrbücher System », XII, Heft 5-6, pp. 521-784 (1899), fig. testo A-B, pl. XXIV-XXXII, figg. 1-90.

(5) R. PH. DOLLFUS, *Trématodes récoltés au Congo Belge par le Professeur Paul Brien* (mai-août 1937). « Annales Musée Congo Belge », (Tervuren), C. Zoologie, série V, vol. 1, fasc. 1, pp. 1-136, figg. 1-104 (1950).

(6) R. PH. DOLLFUS, *Miscellanea helminthologica maroccana. I. Quelques Trématodes, Cestodes et Acanthocéphales*. « Archives Institut Pasteur Maroc. Casablanca », T. IV, Cahier 3, pp. 103-229, figg. 1-62 (1951).

Il numero di specie attribuite, a torto o a ragione, a *Echinoparyphium* sarebbe, secondo H. Mendheim (1943, pp. 219–222) di 23 (nota 2), di cui, solo 11 apparterrebbero con certezza a questo genere e 4 dubitativamente. Secondo E. Baschkirova (1947, pp. 321–322) [7], il numero delle specie (o varietà) sarebbe di 27. Tra queste 27, 4 che erano nella lista di Mendheim non sono citate; *australasianum* (W. Nicoll 1914), *ichthyophilum* H. Mendheim 1940, *flexum* (E. Linton 1892), *paraulum* (E. Dietz 1909), ma ne esistono 16 che non sono ricordate o ammesse da Mendheim. Quest'ultimo ha, infatti, rigettato come non conformi alla diagnosi del genere (o come insufficientemente conosciute) le specie: *brevicauda* Ishii 1935, *contiguum* Barker e Bastron 1915, *oxyurum* S. J. Johnston 1917, *harveyanum* S. J. Johnston 1917, *niloticum* T. Odhner 1910, *volvulus* T. Odhner 1910, *splendens* Verma 1936, *gizzardi* Verma 1936. Su queste otto specie, 6 (le due ultime non essendo prese in considerazione perché troppo male conosciute) sono ammesse nella lista delle 27 di Baschkirova. Nella sua lista Baschkirova non ha incluso *paraulum*, classificandolo nell'*Echinostoma*, mentre ha incluso *emollitum* (W. Nicoll 1914), il quale per Mendheim è un *Echinostoma*. (È probabilmente Mendheim che ha ragione, poiché l'utero di *emollitum* è troppo lungo per un *Echinoparyphium*). Si trovano anche, nella lista di Baschkirova, due specie con 27 spine cefaliche che non sono certamente degli *Echinoparyphium*: *jubilarum* Elperin 1937 (la posizione degli organi in questa specie è incompatibile con *Echinoparyphium*) e *phalacrocoracis* S. Yamaguti 1939. Secondo me, *phalacrocoracis*, per l'estensione anteriore dei vitellogeni, fin verso la metà dell'acetabolo, sembra avvicinarsi piuttosto a *Paryphostomum*, malgrado che i suoi testicoli non siano lobati. Due altri caratteri: riunione post-testicolare dei vitellogeni, costrizione trasversale della vescicola seminale esistono in tutte le specie di *Paryphostomum* e solo in un numero limitato di specie di *Echinoparyphium*.

Se, contrariamente a Baschkirova, noi non ammettiamo che *Parechinostomum* E. Dietz 1909 [1 sola specie: *cinctum* (Rud. 1802)] (nota 3) possa essere sinonimo di *Echinoparyphium* (mentre per Mendheim sarebbe verosimilmente un sinonimo di *Echinostoma*) e se noi tenessimo conto di addizioni giustificate alla lista delle 15 specie di Mendheim, come di addizioni

Nota 3. – La specie descritta come *Parechinostomum cinctum* (Rud. 1802) da I. P. Gorschkov (1937, pp. 200–201, fig. 9) [8] che ha una borsa del cirro stretta e che supera posteriormente l'acetabolo, e dei vitellogeni che raggiungono l'acetabolo, non è evidentemente un *Echinoparyphium*, malgrado l'opinione di E. Baschkirova (1947, p. 321), di K. I. Skrja-

(7) E. Baschkirova, *Famiglia Echinostomatidae Dietz, 1909 in: Trematodi degli animali e dell'uomo. Le basi della trematodologia di K. I. Skrjabin.* « Pubblicazioni dell'Accademia delle Scienze dell'U.R.S.S. ». Mosca, Leningrado, vol. 1, pp. 310–391, figg. 139–170 (1947).

(8) I. P. Gorschkov, *A study of helminthofauna of domestic geese of Omsk and Chelyabinsk Regions.* « Papers on Helminthology published in commemoration of the 30 years jubileum... of K. I. Skrjabin... ». Published by All union Lenin Acad. of Agricult. Sciences. Moscow, pp. 191–202, figg. 1–10 (1937).

e soppressioni giustificate alla lista delle 27 specie di Baschkirova noi arriveremmo a un totale di 23 specie, che sono per ordine alfabetico:

	Numero di spine cefaliche
aconiatum E. Dietz 1909	37
agnatum E. Dietz 1909	33
australasianum (W. Nicoll 1914)	45
baculus (Diesing 1850)	45
baculoides R. Ph. Dollfus 1951	45
clerci K. I. Skrjabin 1915	41
elegans (A. Looss 1899)	43
emollitum (W. Nicoll 1914)	35
flexum (E. Linton 1892)	45
ichthyophilum H. Mendheim 1940	35
japonicum A. Ando e Y. Ozaki 1923	35
koizumii Tsuchimochi 1924	45
mordwilkoi K. I. Skrjabin 1915	45
nordiana Baschkirova 1939	37
paraulum (E. Dietz 1909)	37
politum K. I. Skrjabin 1915	37
recurvatum (O. v. Linstow 1873)	45
recurvatum vanelli S. Yamaguti 1939	45
schulzi Mathevossian 1938	37
sisjakovi Skwortzov 1934	37
syrdariense Burdelev 1937	43
syrdariense aquaticum Baschkirova 1941	43
westsibiricum Issaitschikov 1924	41

È possibile che si debba aggiungere a questa lista *Echinoparyphium macrovitellatum* Oschmarin 1947, del *Phalacrocorax carbo* L. della Mongolia

bin, A. M. Petrov ed E. Baschkirova (1947, p. 427, fig. 188) [9]; non è neppure la specie di Rudolphi (tipo del *Parechinostomum* E. Dietz 1909) per la quale fa fede la descrizione data da E. Dietz (1909, pp. 21–22; 1910, pp. 398–401, 510, fig. testo S1–T1, pl. XII, fig. 35) [10–11]: il vero *cinctum* ha una testa molto piccola, molto stretta (molto meno lunga dell'acetabolo), la tasca del cirro è ovale e posta quasi completamente avanti all'acetabolo, i follicoli dei vitellogeni sono molto grandi e disposti in file longitudinali regolari. Nessuno di questi caratteri esiste nel *cinctum* di Gorschkov.

(9) K. I. SKRJABIN, A. M. PETROV, E. BASCHKIROVA, *Echinostomidi degli uccelli domestici e selvatici dell'URSS*, in *Trematodi degli animali e dell'uomo. Le basi della trematodologia di K. I. Skrjabin*. « Pubblicazione dell'Accademia delle Scienze dell'URSS ». Mosca-Leningrado, vol. 1, pp. 392–489, figg. 171–212 (1947).

(10) E. DIETZ, *Die Echinostomiden der Vögel*. Inaug. Dissertation··· Doktorwürde··· Univ. Königsberg; p. 40, figg. 1–8, Königsberg 1909.

(11) E. DIETZ, *Die Echinostomiden der Vögel*. « Zoolog. Jahrbücher System », XII, Heft 3, pp. 265–512, 78 fig. testo (A. C3), pl. X–XV, figg. 1–59 (1910).

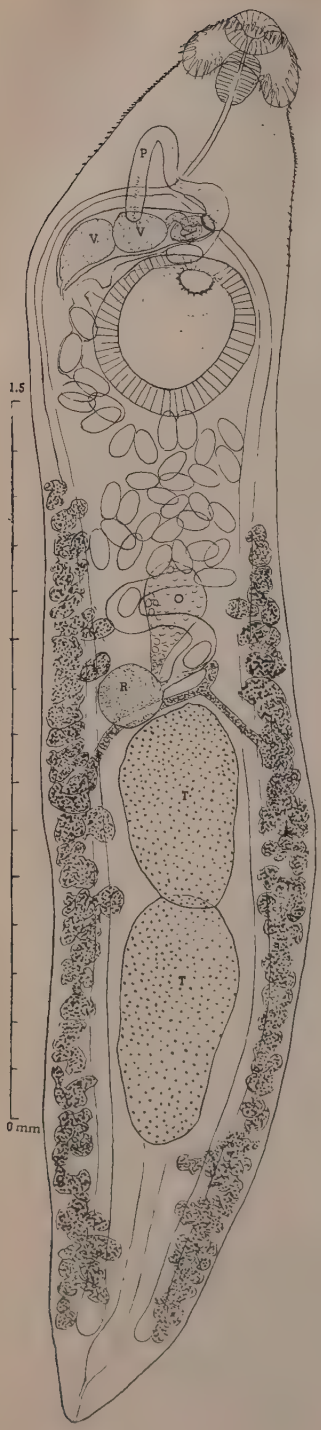


Fig. 1. – *Echinoparyphium Bioccalerouxi* n. sp. Ad
ottenuto sperimentalmente, visto dalla faccia ventr

P: pene in parte svaginato
VV: le due parti della vescicola seminale
O: ovaio
R: receptaculum seminis
TT: testicoli.

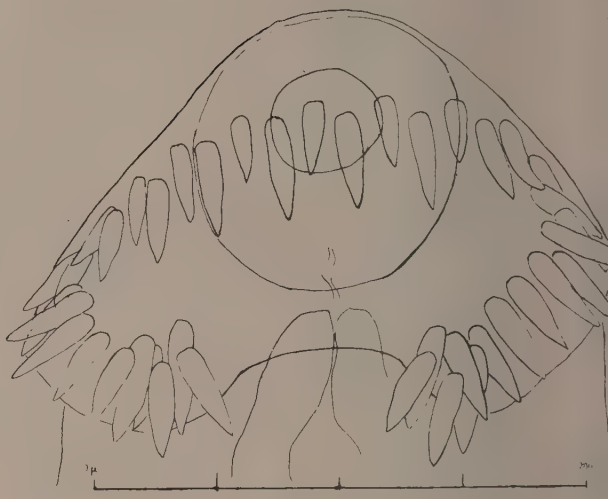


Fig. 2. – *Echinoparyphium Bioccalerouxi* n. sp. Spine cefal
di un altro individuo.

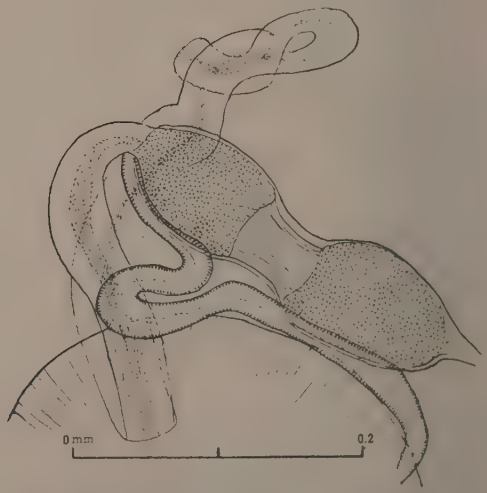


Fig. 3. – *Echinoparyphium Bioccalerouxi* n. sp.
Vescicola seminale bipartita e « matratermo » in
un altro individuo, visti dalla faccia dorsale.

(vedere la descrizione di K. I. Skrjabin 1947, pp. 498–501, fig. 215) [12], che ha solamente 29 spine cefaliche; tuttavia la grandezza dei follicoli dei vitellogeni è difficilmente compatibile con quella che si osserva abitualmente tra gli *Echinoparyphium*.

Il nostro Echinostoma che ha 43 spine cefaliche deve essere confrontato con *elegans*, *syrdariense* e *syrdariense aquaticum*, ammettendo che il numero 43 sia costante per le spine cefaliche di queste specie.

Le dimensioni comparative delle spine cefaliche e delle uova sono indicate in μ nella tabella seguente:

	Spine della linea orale	Spine della linea aborale	Spine angolari	Uova
elegans	43–49 × 9,6	53–63 × 12	62,4–67,2 × 14,4	84 × 55
syrdariense	30 × 9	57 × 16	72 × 18	69–81 × 42–51
syrdariense aquaticum	47 × 12	54 × 12	66,4–73 × 17	90–94 × 60
presente specie .	28–31,5 × 7	38,5–41,6 × 7,5–8	34–37,5 × 7,5–8 e 43–46,8 × 7,5–8	83,3 × 52,7 e 84,3 × 46,8 83 × 50;88 × 52

Il confronto con la descrizione e le figure di *syrdariense* e *syrdariense aquaticum* date da K. I. Skrjabin, A. Petrov e E. Baschkirova (1947, pp. 436–440, figg. 193–194) non mostra differenze importanti con la nostra specie in ciò che si riferisce all'anatomia, le dimensioni delle spine cefaliche e delle uova, salvo che né in *syrdariense* né in *syrdariense aquaticum* (che sembra ben essere una specie indipendente) la vescicola seminale è bipartita; questo carattere è, a mio avviso, assai importante per autorizzare una discriminazione specifica. Il confronto con la descrizione e le figure date per *elegans* da A. Looss (1899, pp. 692–693, pl. XXV, fig. 18) e da E. Dietz (1910, pp. 380–382, fig. testo K 1) non permette neppure di identificare la nostra specie come *elegans* sebbene la vescicola seminale sia anche bipartita. Esistono, nelle dimensioni delle spine cefaliche e delle uova, differenze che potrebbero esser considerate come variazioni fenotipiche, ma il fatto che, da ogni lato, le 4 spine angolari di *elegans* sono uguali tra loro, mentre, nella nostra specie, esse sono nettamente molto ineguali in tutti gli individui, è una differenza costante che non si osserva tra individui cospecifici. Ci sembra dunque che si tratti di una specie particolare per la quale propongo il nome di *Echinoparyphium Bioccalerouxi* n. sp.

(12) K. I. SKRJABIN, *Nuovi materiali per la sistematica e la fauna dei Trematodi della famiglia Echinostomatidae*, in *Trematodi degli animali e dell'uomo. Le basi della trematodologia di K. I. Skrjabin*. « Pubblicazione dell'Accademia delle Scienze dell'URSS ». Mosca-Leningrado, vol. 1, pp. 491–505, figg. 213–218 (1947).

Fisiologia. — *Cellule cianofile e cellule mucoidi dell'adenoipofisi nelle disendocrinie umane e sperimentali.* Nota di Angelo Casarini e Nicola Rossi, presentata (*) dal Socio A. Pensa.

Secondo la distinzione tradizionale, le cellule dell'anteipofisi vengono divise in tre gruppi fondamentali: neutrofile, acidofile e basofile. Queste ultime, per la loro affinità per il blu di anilina, o coloranti equivalenti comunemente usati nei metodi tricromici tipo Mallory–Azan, vengono anche chiamate cianofile. Tra le cianofile Romeis (1940), col metodo Kresazan da lui introdotto, ha potuto distinguere due tipi cellulari che ha rispettivamente chiamato cellule beta e cellule delta. Le une presentano granuli che si colorano con la cresofucsina, oltre che con il blu di anilina; i granuli delle altre assumono, invece, solo quest'ultimo colorante.

Già prima dell'introduzione di più precisi e più sensibili metodi istochimici, si attribuiva alle cellule cianofile la secrezione dell'ormone follicolostimolante; inoltre alcuni dati tratti dalla patologia umana (m. di Cushing, ecc.) facevano prospettare anche un loro intervento nella funzione corticotropa.

I progressi di questi ultimi anni nel campo della chimica degli ormoni e la applicazione di metodi istochimici (reazione PAS) allo studio della ipofisi, hanno portato ulteriori precisazioni al problema dell'istofisiologia ipofisaria. Si è visto, cioè, che alcune cellule preipofisarie contengono granuli glicoproteici (cellule mucoidi di Pearse) e che esse rappresentano la sorgente degli ormoni gonadotropi e del tireotropo. Le cellule mucoidi corrisponderebbero perfettamente alle cianofile secondo Purves e Griesbach (1951), mentre secondo Pearse (1949–50–52) esisterebbe un'aliquota di mucoidi non cianofile.

Un'ulteriore distinzione nell'ambito delle cellule mucoidi tra gonadotrope e tireotrope è stata ottenuta nell'ipofisi di ratto mediante la applicazione del metodo all'aldeide–fucsina di Gomori da parte di Halmi (1950) e di Purves e Griesbach (1951). Questa colorazione corrisponde alla cresofucsina del metodo di Romeis. Pertanto le cianofile che assumono l'aldeide–fucsina vengono chiamate beta secondo la terminologia di Romeis, mentre le altre vengono analogamente chiamate delta. Le beta corrisponderebbero alle PAS positive tireotrope, le delta a quelle gonadotrope.

Al fine di chiarire i precisi rapporti tra cellule mucoidi e cellule cianofile e di accertarne il relativo significato funzionale, è stata condotta una serie di esperienze atte a modificare le secrezioni gonadotropa, corticotropa e tireotropa (castrazione, somministrazione di estrogeni, emiadrenalectomia, emiadrenalectomia ed esposizione al freddo, trattamento con DOCA,

(*) Nella seduta del 9 maggio 1953.

stress acuto con formalina, tiroidectomia, somministrazione di tiouracile e di tiroxina). Le ipofisi di ratti così trattati, venivano studiate mediante conteggi comparativi eseguiti su sezioni contigue colorate con un metodo tricromico tipo Mallory, col metodo McManus–Hotchkiss, e, nelle ricerche sulla funzione tireotropa, anche con l'aldeide–fucsina di Gomori.

I risultati ottenuti hanno anzitutto dimostrato una relativa indipendenza di comportamento tra elementi cianofili ed elementi mucoidi. Tale indipendenza è particolarmente evidente dopo trattamento con dosi massive di estrogeni e dopo adrenalectomia e successiva esposizione al freddo. In tali condizioni, infatti, si nota una prevalenza delle cianofile. A situazioni opposte hanno portato, invece, la castrazione e la tiroidectomia (prevalenza delle mucoidi). I risultati di queste ricerche, inoltre, confermano che gli ormoni gonadotropi e il tireotropo sono secreti dalle cellule mucoidi e giustificano l'ipotesi che alcune cellule della serie cianofila non siano dotate di granuli PAS positivi e possano essere interessate nella secrezione dell'ormone corticotropo.

Nel gruppo delle cellule mucoidi è possibile differenziare gli elementi gonadotropi dai tireotropi. Tale distinzione sarebbe valida solo in condizioni poco discoste dalle fisiologiche, in quanto stimoli eccessivi possono agire sulla totalità delle cellule di questo gruppo. Ne sono prova, in forma particolare, la scomparsa subtotale di tali cellule dopo somministrazione di estrogeni a forti dosi o di tiroxina in piccole dosi per un tempo prolungato. Questo fatto sottolinea l'affinità degli elementi di questo gruppo e induce a ritenere che in particolari condizioni tutti gli elementi possano assumere l'una o l'altra secrezione.

L'aldeide–fucsina di Gomori, infine, si è dimostrata specifica per le cellule tireotrope dell'ipofisi di ratto solo in condizioni di normalità. Variando le dimensioni o lo stato di dispersione dei granuli cellulari, cessa la loro affinità per il colorante. Questo fatto limita molto il valore del metodo, la cui applicazione, d'altronde, incontra sovente notevoli difficoltà tecniche.

Un'analoga metodologia è stata applicata allo studio dell'ipofisi umana in alcune disendocrinie tiroidee e surrenali (m. di Basedow, gozzi non tireotossici, m. di Addison, lesioni distruttive del parenchima surrenale, ipercorticalismi, iperplasia semplice del surrene), per un totale di 47 osservazioni. È stato così constatato che il quadro ipofisario si modifica nel corso di queste endocrinopatie in forma quasi costante ed in misura talora sensibile. Tuttavia se in determinate sindromi le modificazioni ipofisarie sembrano relativamente costanti, numerosi sono i fattori che possono interferire nel modificare il quadro ipofisario e dei quali si deve tener conto nella interpretazione dei vari reperti. Così il m. di Basedow si accompagna in genere ad un innalzamento delle mucoidi e delle cianofile che presentano aspetti da accumulo ormonale. Se, però la sindrome tireotossica è stata in precedenza trattata con tireoinibitori, il quadro può all'opposto modificarsi nel senso di una diminuzione dei suddetti tipi cellulari, che presenteranno inoltre caratteri morfologici da aumentata eliminazione. Un altro fattore

che interferisce sicuramente sull'entità della risposta ipofisaria è rappresentato dalla gravità della lesione e quindi della disfunzione della ghiandola periferica. Quando, ad esempio, il m. di Addison è sostenuto da una distruzione subtotale del parenchima surrenale, le mucoidi e le cianofile sono notevolmente ridotte; ciò non avviene se una relativa porzione di parenchima permane indenne. Nelle varie sindromi anatomo-cliniche da ipercorticalismo, il quadro ipofisario è apparso piuttosto mutevole. Più spesso, però, le cianofile e soprattutto le mucoidi sono aumentate di numero, e presentano caratteri morfologici da accumulo ormonale (corticotropo e probabilmente gonadotropo). Altre volte i due tipi cellulari sono normali o diminuiti di numero; in questo ultimo caso essi presentano segni di aumentata eliminazione ormonale, fatto questo che giustifica il sospetto di una lesione primitiva dell'ipofisi. Si danno infine casi di iperplasia del surrene, disgiunti da segni di disfunzione della ghiandola, nei quali il reperto ipofisario è contenuto nei limiti della norma.

L'aldeide-fucsina di Gomori applicata allo studio dell'ipofisi umana ha presentato notevoli difficoltà tecniche, fornendo risultati incostanti. Dai casi più favorevoli, si è dedotto che il colorante dimostra affinità per le stesse strutture evidenziabili col PAS. Ne deriva che la aliquota di cianofile non PAS positive (e non aldeide-fucsinofile) corrisponde alle cellule delta di Romeis. Si prospetta pertanto la possibilità che a queste cellule sia da attribuire la secrezione di corticotropina.

Fisiologia. — *Osservazioni sui riflessi miotatici nell'uomo* (*). Nota di PIETRO PERUZZI e MARIANO ZANGHI, presentata (**) dal Corrisp. I. SPADOLINI.

Con le presenti ricerche sono stati studiati nell'uomo alcuni meccanismi coi quali una postura degli arti, volontariamente assunta, viene mantenuta in via riflessa di fronte a sollecitazioni che tendono a modificarla.

L'interesse di tale studio ci sembra determinato dal fatto che di recente sono state prospettate nuove nozioni sulla funzione dei propriocettori muscolari: è infatti possibile che i fusi neuromuscolari siano prevalentemente responsabili delle reazioni di accorciamento, mentre gli organi muscolo-tendinei sarebbero interessati nelle reazioni di allungamento (1). Le reazioni posturali nelle loro componenti toniche e fasiche debbono essere considerate, in definitiva, come risposte a continue sollecitazioni modificatrici.

Abbiamo studiato su di un grande numero di soggetti giovani, di ambo i sessi, il mantenimento della postura dell'arto destro, nella quale l'avam-

(*) Dal Laboratorio di Fisiologia umana diretto dal prof. I. Spadolini.
(**) Nella seduta del 9 maggio 1953.
(1) C. C. HUNT, « J. Physiol. », *117*, 359 (1952).

braccio fa un angolo di 90° sul braccio; l'individuo è in posizione eretta. Onde limitare la nostra ricerca alla sola articolazione del gomito, gli spostamenti passivi verso il basso vengono provocati dalla caduta di un peso di 1 kg da una certa altezza, il quale trasmette la sua forza viva all'arto a mezzo di un piccolo bracciale di cuoio posto attorno al polso. Gli spostamenti verso l'alto sono determinati invece dall'improvvisa remozione del peso.

I movimenti eseguiti dall'avambraccio sono registrati con penna ad inchiostro su di un cilindro a mezzo di una trasmissione a filo. Onde eliminare incontrollabili movimenti sull'articolazione della spalla da parte del braccio, questo viene fissato a mezzo di cinghie ad un sostegno verticale.

In ogni individuo si è esaminato il comportamento posturale dell'arto: 1° quando in posizione di « attenti » con lo sguardo rivolto innanzi esso non è in grado di controllare con la vista la posizione assunta dall'arto stesso in conseguenza degli spostamenti subìti; 2° quando, nella stessa posizione, può essere esercitato un controllo visivo; 3° quando con la testa fortemente inclinata a destra, a sinistra, in avanti o indietro si fanno entrare in gioco i recettori del collo o i recettori maculari.

Il complesso dei risultati ottenuti ha messo in evidenza quanto segue:

1° quando non intervengono fenomeni di fatica da prove ripetute e prolungate non è possibile riconoscere caratteristiche individuali rispetto a questa prova e tanto meno è possibile sorprendere modificazioni di comportamento dello stesso individuo con il ripetersi della prova;

2° l'influenza del controllo visivo è in pratica senza effetto sul mantenimento della postura del braccio, in quanto la correzione volontaria delle modificazioni da spostamento dell'arto avviene con notevole ritardo su quella puramente riflessa;

3° senza influenza appare pure la posizione della testa e quindi la partecipazione dei recettori surricordati;

4° il successo nel mantenimento della postura ad angolo retto dell'avambraccio sul braccio dipende dal grado di contrazione volontaria nel quale sono mantenuti i muscoli agonisti ed antagonisti dell'arto prima che si inizi lo spostamento di questo. Ad una postura ottenuta per fissazione rigida dell'avambraccio da contrazione massimale o submassimale dei gruppi muscolari corrispondono riflessi di allungamento i quali non sembrano possedere la capacità di ripristinare la posizione che l'arto aveva prima di spostarsi; il ripristino di tale atteggiamento è invece preciso e rapido quando la postura considerata è mantenuta con una modesta contrazione degli agonisti e dagli antagonisti che è espressa nel tracciato da escursioni rapide dirette una volta in alto e una volta in basso.

Tali risultati ci permettono alcune considerazioni sui meccanismi propriocettivi muscolari. Nel mantenimento di una certa postura la massima importanza sembra spettare ai fusi neuro-muscolari; nello stato di fissazione rigida da contrazione massimale o submassimale, infatti, il meccanismo fusale si può considerare spuntato in massima parte, essendo tali strutture

in parallelo con le fibre muscolari. Secondo recenti indagini [2] [3] [4], esisterebbe un meccanismo di contrazione graduata dei muscoli fusali del Weiss-

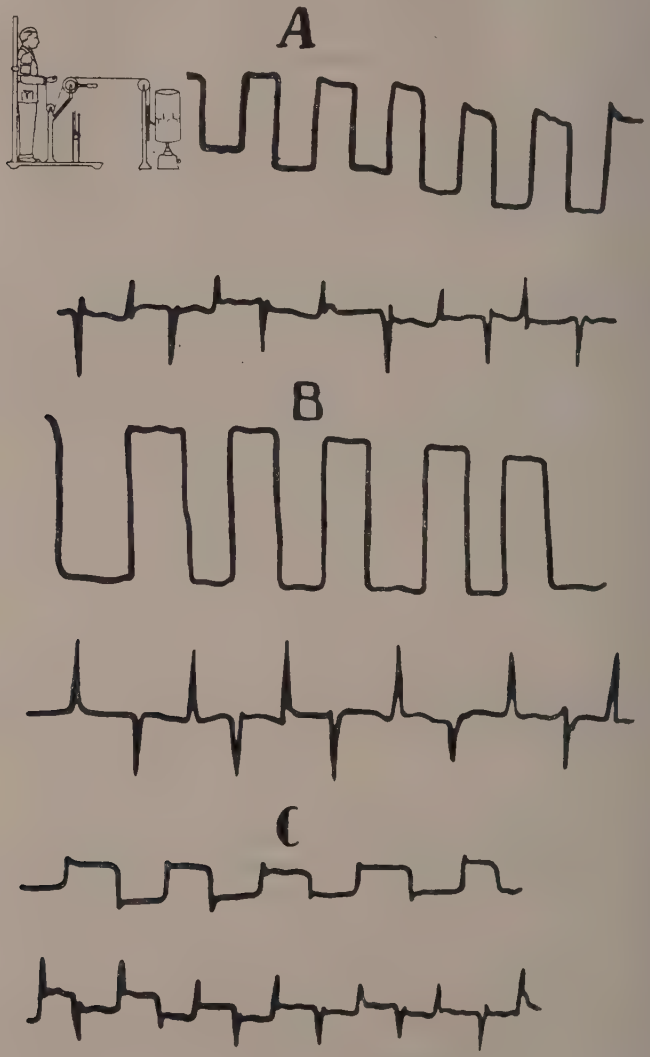


Fig. 1. – Tracciati ottenuti in tre individui differenti A, B, C.

In A e in B è evidente la diversa maniera di rispondere alle sollecitazioni verso l'alto e verso il basso in funzione del grado di contrazione dei muscoli agonisti ed antagonisti. (Il mantenimento della postura ad angolo retto dell'avambraccio sul braccio si constata solo nel tracciato inferiore di ciascun individuo ed è rappresentato dalla orizzontale del grafico). In C l'individuo ha volontariamente diminuito nel decorso della prova la contrazione iniziale dei muscoli dell'arto. In alto: schema del dispositivo sperimentale, descritto nel testo, per lo studio dei riflessi miotatici nell'uomo.

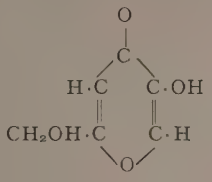
(2) S. W. Kuffler, C. C. Hunt, A. J. P. Quilliam, « J. Neurophysiol. », *14*, 29 (1951).
(3) C. C. Hunt, « J. Physiol. », *116*, 456 (1951).
(4) C. C. Hunt, S. W. Kuffler, « J. Physiol. », *113*, 298 (1951).

mann per il quale tale shuntaggio avverrebbe a valori differenti e variabili di tensione del muscolo.

Queste nostre ricerche sembrano appoggiare la veduta che i riflessi di accorciamento siano imputabili al meccanismo fusale, mentre i riflessi di allungamento sarebbero dovuti all'azione prevalente dei recettori muscolo-tendinei; infatti, alla posizione rigidamente fissata dell'arto per contrazione massimale o submassimale dei muscoli agonisti ed antagonisti corrisponde la messa fuori funzione dei fusi, restando attivi solamente gli organi muscolo-tendinei nel determinismo del riflesso di allungamento.

Microbiologia. — *Qualche ricerca sull'azione antibiotica dell'acido cogico* (*). Nota di ONORATO VERONA e MARIO AGELLI, presentata (**) dal Socio A. CHIARUGI.

L'acido cogico fu rinvenuto la prima volta da Saito nel 1907 tra i prodotti di fermentazione, dovuta ad *Aspergillus oryzae*, di decotto di riso [1]. Il nome gli fu dato più tardi da Yabuta [2] che ne studiò anche la composizione chimica [3]. Risultò trattarsi del 5-idrossi-2-idsossimetil-y-pirone:



In seguito fu visto che l'acido cogico può essere prodotto oltre che da *Asp. oryzae* anche da numerosi altri funghi nonché, in condizioni favorevoli, da molte specie di Acetobatteri.

Per quanto è oggi noto le specie microbiche capaci di produrre acido cogico sono:

Acetobacter spp. [4]
Aspergillus sp. [8]
» *albus* [4, 6]
» *alliaceus* [7]
» *awamori* [4]
» *candidus* [4, 6]
» *clavatus* [4]
» *effusus* [4; 6]
» *flavus* [4, 6]
» *fumigatus* [4]
» *giganteus* [4]
Aspergillus glaucus [4, 9]
» *gymnosardae* [4]
» *luteo-virescens* [5]
» *nidulans* [4, 6]
» *oryzae* [4, 6]
» *parasiticus* [4, 6]
» *tamarii* [4, 6]
» *wentii* [7]
Penicillium chrysogenum [5]
» *dalae* [4, 6]

(*) Dall'Istituto di Patologia vegetale e Microbiologia agraria dell'Università di Pisa.
(**) Nella seduta del 9 maggio 1953.

Da tempo è noto che l'acido cogico esercita una qualche azione antibatterica, peraltro molto limitata qualora, forse, si faccia eccezione per alcune specie di *Leptospira*. Queste infatti vengono inibite nello sviluppo alle concentrazioni di 1/100.000-1.000.000, mentre la maggior parte degli altri germi è sensibile solo a concentrazioni ben più elevate (1/500–1/2.000). È il caso di sottolineare che questa pur debole attività antibiotica si ha verso germi sia gramnegativi sia grampositivi e che non è inibita da siero [10, 6].

Nulla è noto, tuttavia (come risulta dall'allegato spettro), quale sia l'azione esercitata dall'acido cogico sui lieviti e sui funghi, massime sui funghi fitopatogeni. Ond'è che abbiamo ritenuto opportuno dar corso a qualche ricerca in tal senso pur non tralasciando di indagare, preliminarmente, l'azione antibatterica con riferimento, tra l'altro, ad *Agrobacterium tumefaciens*, noto batterio fitopatogeno.

SPETTRO DELL'ACIDO COGICO.

	conc. inibente
Aërobacter aërogenes	1 : 500–1 : 1.000 [5]
Alcaligenes fecalis	1 : 500 [5]
Bacillus anthracis	1 : 500–1 : 1.000 [5]
Bac. megaterium	1 : 1.000 [5]
Bac. mesentericus	1 : 500 (parziale) [5]
Bac. mycoides	1 : 500–1 : 400 [5, 11]
Bac. novus	1 : 1.000 [5]
Bac. subtilis	1 : 500 (parz.)–1 : 1.700 [5, 11]
Brucella abortus	1 : 4.000 [5]
» *melitensis*	1 : 2.000 [5]
» *suis*	1 : 4.000 [5]
Chromobact. indicum	1 : 500 [5]
» *violaceum*	1 : 2.000 [5]
Clostridium botulinum	1 : 500 (parziale) [5]
» *histoliticum*	no inibizione a 1 : 500 [5]
» *novyi*	1 : 500 [5]
» *perfringens*	no inibizione a 1 : 500 [5]
» *sporogenes*	no inibizione a 1 : 500 [5]
» *tetani*	no inibizione a 1 : 500 [5]
Corynebact. diphtheriae	no inibizione a 1 : 500 [5]
» *xerosis*	1 : 500 (parziale) [5]
Diplococcus pneumoniae	1 : 500–1 : 2.000 [5]
Escherichia sp.	1 : 400–1 : 800 ; 1 : 2.000 [6, 5]
Gaffkya tetragena	1 : 500–1 : 1.000 [5]
Klebsiella pneumoniae	1 : 500–1 : 1.000 [5]
Leptospira canicola	1 : 1.000.000 [5]
» *icterohemorrhagiae*	1 : 100.000 [5]

	conc. inibente
Micrococcus aurantiacus	1 : 500 (parziale) [5]
» *roseus*	1 : 500 [5]
Mycobacterium phlei	1 : 4.000 [11]
» *smegma*	1 : 3.300 [11]
Neisseria catarrhalis	1 : 2.000–1 : 4.000 [5]
» *gonorrhoeae*	no inibizione a 1 : 2.000 [5]
» *intracellularis*	no inibizione a 1 : 2.000 [5]
» *perflava*	no inibizione a 1 : 2.000 [5]
» *sicca*	no inibizione a 1 : 2.000 [5]
Pasteurella avicida	no inibizione a 1 : 4.000 [5]
» *boviseptica*	no inibizione a 1 : 4.000 [5]
» *caviae*	no inibizione a 1 : 4.000 [5]
» *equiseptica*	no inibizione a 1 : 4.000 [5]
» *oviseptica*	no inibizione a 1 : 4.000
» *pestis*	1 : 4.000 [5]
Photobacterium fischeri	1 : 4.000 [11]
Proteus sp.	1 : 400 -1 : 800 [11]
» *mirabilis*	1 : 500 [5]
» *vulgaris*	1 : 500 [5]
Pseudomonas aeruginosa	1 : 500 [5]
» *fluorescens*	1 : 2.000 [5]
Salmonella aertrycke	1 : 1.000 [5]
» *cholerae-suis*	1 : 500 [5]
» *enteritidis*	1 : 400–1 : 800 ; 1 : 500 [6 , 5]
» *parathyphi*	1 : 500–1 : 1.000 [5]
» *pullorum*	1 : 1.000 [5]
schottmuelleri	1 : 500 [5]
» *typhi*	1 : 500–1 : 1.000 [5]
Sarcina lutea	1 : 1.000 [5]
Serratia marcescens	1 : 500 [5]
Shigella dysenteriae	1 : 500–1 : 2.000 [5]
» *paradysenteriae*	1 : 500 [5]
Spirillum rubrum	1 : 1.000 [5]
Staphylococcus albus	1 : 500 (parziale) [5]
» *aureus*	1 : 800–1 : 1.600 ; 1 : 500 [6 , 5]
» *citreus*	1 : 500 (parziale) [5]
Streptococcus fecalis	no inibizione a 1 : 500 [5]
Vibrio comma	1 : 2.000 [5]
» *metchnikovii*	1 : 2.000 [5]
» *proteus*	1 : 4.000 [5]
» *schuykilliensis*	1 : 2000 [5]

1. AZIONE DELL'ACIDO COGICO SU DI ALCUNI SCHIZOMICETI. – Lo spettro che abbiamo riportato comprende già così tante specie per cui le poche

ricerche eseguite non hanno che valore complementare. Come prima ricerca fu saggiato il comportamento di *Staphylococcus aureus*, *Escherichia coli*, *Agrobacterium tumefaciens*, *Bac. subtilis*, *Bac. vulgatus*, *Bac. mesentericus* in brodo nutritivo assente o presente acido cogico[1] aggiunto al mezzo in quantità seriate entro i limiti dello 0.1–1 %. Al 10° giorno di coltura si ebbe

	acido cogico %						
	—	0.1	0.2	0.4	0.6	0.8	1.–
Agrobact. tumefaciens	+	+	+	+·	—	—	—
Bac. mesentericus	+	+	+·+	—	—	—	—
Bac. subtilis	+	+	+·+	—	—	—	—
Bac. vulgatus	+	+	+·+	—	—	—	—
Escherichia coli	+	—	—	—	—	—	—
Staphyloc. aureus	+	+	+	+	+·	—	—

(· sviluppo assai scarso; + sviluppo ritardato)

All'osservazione microscopica nelle colture di Stafilococco fu notato, nelle più alte concentrazioni, cellule meno rotonde, forse un po' più grosse, meno tingibili. Nelle colture di *Agrobact. tumefaciens* qualche anomalia morfologica fu anche accompagnata da minore tingibilità. In *Bac. subtilis*, appena notando come in presenza dello 0.2 % del composto lo sviluppo non fosse accompagnato da velo, fu osservato che le cellule, invece di essere disposte, come lo sono normalmente, in fili o ammassi, si presentavano per la massima parte isolate.

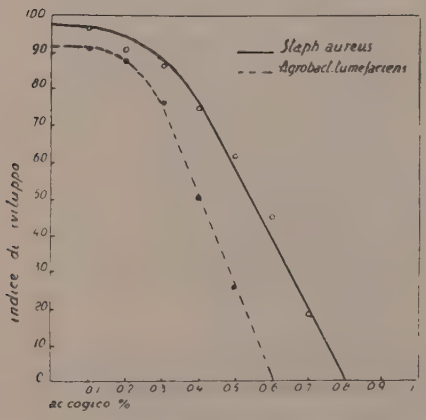


Fig. 1. – Sviluppo di *Staph. aureus* e *Agrobact. tumefaciens* in presenza di quantità crescenti di acido cogico.

Di seguito si è voluto meglio apprezzare lo sviluppo di *Staphyloc. aureus* e di *Agrobact. tumefaciens* attraverso l'intensità di intorbidamento del liquido colturale, apprezzata a mezzo di colorimetro a cella fotoelettrica. Fu ottenuto:

(1) L'acido cogico usato ci fu fornito dalla L. Light e Co., Ltd. di Colnbrook (Inghilterra).

acido cogico	% di luce assorbita	
%	Stafilococco	Agr. tumefac.
—	98	93
0.1	96	92
0.2	90	87
0.3	86	75
0.4	74	50
0.5	61	24
0.6	45	—
0.7	18	—
0.8	—	—

Nel confermare, per *Staphyloc. aureus*, *Escherichia coli* e *Bac. subtilis*; e nel rilevare, per *Agrobact. tumefaciens*, questa debole azione antibiotica dell'acido cogico non abbiamo escluso, in analogia ad altri casi, un'influenza della carica d'inoculum. Epperò si sono allestite altre prove, limitatamente allo Stafilococco, *Agrobact. tumefaciens*, *Bac. subtilis*, consistenti nel seguire lo sviluppo di queste specie in colture inficiate con masse diverse di inoculo.

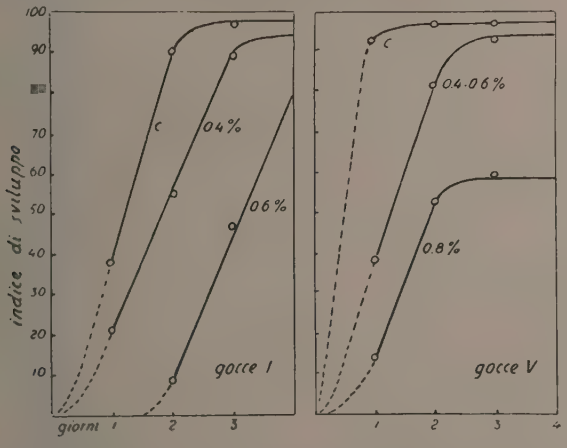


Fig. 2. – Sviluppo di *St. aureus* in rapporto alla concentrazione nel mezzo di ac. cogico e alla massa d'inoculo.

Questo era rappresentato da gocce I–II–III–IV–V di una sospensione omogenea in acqua distillata sterile di germi provenienti da colture in agar di 48 h. Lo sviluppo fu apprezzato macroscopicamente indicando con 0.5–1 quello più scarso e con 5 quello massimo; per alcune colture (che allo scopo ripetemmo) lo stesso sviluppo si volle apprezzare con più esattezza per mezzo dell'indice dell'intorbidamento.

Sviluppo di *St. aureus*, *Agrobact. tumefaciens*, *Bac. subtilis* in brodo inficiato con cariche diverse di inoculo (gocce I–V).

		inoculo: gocce I				gocce II				gocce III				gocce IV				gocce V			
dopo giorni:		1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4
Staph. aureus																					
ac. cogico %	—	3	4	5	5	4	5	5	5	4	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5
»	0.1	3	4	5	5	4	5	5	5	4	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5
»	0.2	2	3	4	5	3	4	5	5	3	5	5	5	3	5	5	5	4	5	5	5
»	0.4	2	3	4	5	3	3	5	5	3	4	5	5	3	5	5	5	3	5	5	5
»	0.6	–	2	3	4	1	3	4	5	2	4	5	5	2	5	5	5	2	5	5	5
»	0.8	–	–	–	–	–	–	0.5	1	0.5	1	2	3	1	2	3	3	2	3	3	3
»	1.–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	0.5
Agrob. tumefaciens																					
ac. cogico %	—				5				5				5				5				5
»	0.1				4				5				5				5				5
»	0.2				3				3				5				5				5
»	0.4				2				3				4				5				5
»	0.6				–				–				–				2				2
»	0.8				–				–				–				–				–
Bac. subtilis																					
ac. cogico %	—	3	5	5	5	4	5	5	5	4	5	5	5	4	5	5	5	5	5	5	5
»	0.1	1	4	5	5	2	5	5	5	3	5	5	5	4	5	5	5	4	5	5	5
»	0.2	0.5	1	1	1	1	1	2	2	2	2	3	3	2	3	3	3	3	3	3	3
»	0.4	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	1	2	2	2
»	0.6	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–

Così si osserva che la quantità di inoculo manifesta non trascurabile influenza sullo sviluppo dei germi saggiati. Tanto che qualora l'inoculo sia massivo la stessa percentuale di inibizione si sposta. Influenza si ha, poi, sulla fase di latenza come sulla fase di sviluppo logaritmico.

2. Azione dell'acido cogico sui lieviti. – L'acido cogico non manifesta, nelle quantità sperimentate, nessuna azione inibente sui lieviti. L'affermazione discende dai reperti, sempre positivi, avuti coltivando una serie rappresentativa di lieviti in agar–malto presente ac. cogico fino nelle quantità massime dell'1 %. Le specie coltivate furono: *Sacch. cerevisiae* var. *ellipsoideus* (Hansen) Dekker, *Sacch. chevalieri* Guill., *Sacch. (Zygosacch.) veronae* Lodder et v. Rij, *Hansenula* sp., *Debaryomyces tyrocola* Konokotina, *Rhodotorula* sp., *Candida albicans* (Robin) Berkh., *Candida pulcherrima* (Lidner) Windisch.

Altresì nessuna particolare influenza esercita l'acido cogico sull'andamento del processo fermentativo, sostenuto su mosto da *Sacch. ellipsoideus*, in quanto esso sia presente nella quantità dello 0.5 %.

In via complementare abbiamo quindi voluto controllare una affermazione di Traetta-Mosca il quale, pervenuto all'isolamento dell'acido cogico, trovò che esso è fermentato dal lievito di birra con formazione di an. carbonica ed alcool [9].

A questo scopo abbiamo seminato vari ceppi di lievito ellittico e di altre specie (*Sacch. veronae*, *Hansenula* sp., *Kloeckera apiculata*, *Candida pulcherrima*) in acqua di lievito addizionata dell'1 % di acido cogico conte-

nuta in tubi di Einhörn–Smith. Lo sviluppo fu sempre positivo ed altresì abbondante; ma, anche trascorso molto tempo, non fu mai notato sviluppo di an. carbonica. In più osservammo che l'acido cogico permane nei liquidi colturali, fatta eccezione per *Sacch. veronae* che sembra dunque metabolizzarlo pur senza formare, come si diceva, an. carbonica.

L'osservazione di Traetta–Mosca rimane quindi non confermata sì che vien fatto di pensare – attese le modalità sperimentali da lui seguite – che il registrato reperto positivo fosse dovuto a sviluppo di germi inquinanti il lievito di birra avendo egli usato come materiale d'inoculo lievito di birra del commercio anziché colture pure.

3. AZIONE DELL'ACIDO COGICO SUI FUNGHI A MICELIO. – Abbiamo saggiata una piccola serie di funghi a micelio, incluse specie fitopatogene, su agar–fagiuoli saccarosato contenente acido cogico nelle quantità seriate dello 0.1–0.3–0.5–1 %.

Incubato per molto tempo a 24–26° C fu osservato quanto segue:

	Sviluppo in presenza di ac. cogico (2)			
	0.1 %	0.3 %	0.5 %	1 %
1 *Alternaria porri* (Ell.) Saw. f. sp. *solani* (E. et M.) Neergaard	+	+	±	—
2 *Aspergillus niger* v. Tiegh.	+	+	+	+
3 » *oryzae* (Ahlb.) Cohn.	+	+	+	+
4 *Botrytis cinerea* Pers.	+	+	±	—
5 *Endothia parasitica* (Murr.)	±··	—	—	—
6 *Fus. avenaceum* (Fr.) Sacc.	+	+	+	+··
7 » *lini* Bolley	+	+	+	+·
8 » *solani* (Mart.) App. et Wr.	+	+	+	+
9 » *vasinfectum* Atk.	+	+	+	+·
10 *Pen. brevi–compactum* Dierckx	+	+	+	+
11 » *chrisogenum* Thom	+	+	+	+
12 » *citrinum* Thom	+	+	+	+
13 » *flavidorsum* Biourge	+	+	+	+
14 » *frequentans* Westl.	+	+	±	+
15 » *notatum* Westl.	+	+	+	+
16 » *roqueforti* Thom	+	+	+	+···
17 *Rosellinia necatrix* (Hart.) Berl.	+	+	+	+
18 *Sclerotium Rolfsii* Sacc.	+	+	+	±
19 *Sphaeropsis dalmatica* (Thüm) Gig.	+	+	+·	—
20 » *malorum* Pk.	+	+	+	+
21 *Stachybotris atra* Cda.	+	+	±	—·
22 *Trichoderma* sp.	+	+	+	+
23 *Verticillium albo–atrum* R. et Berth.	+	±	—	—

(2) · sviluppo scarso; ·· sviluppo scarso e lento; ··· forte disturbo nella sporificazione.

L'azione antibiotica dell'acido cogico non appare dunque molto manifesta verso i funghi a micelio. In presenza dell'1 %, in dose cioè da ritenersi notevole, solo 6 specie, su 23 (cioè il 26 %), non hanno infatti sviluppato e solo 5 specie hanno dimostrato svilupparsi scarsamente. In presenza dello 0.5 % le specie incapaci di svilupparsi o di svilupparsi molto male sono scese rispettivamente a due e quattro. A concentrazioni inferiori tutte le specie saggiate si sono sviluppate fatto solo eccezione di *Endothia parasitica* che è risultata la specie più sensibile.

Questa tollerabilità, relativamente alta, presentata dai funghi a micelio verso l'acido cogico, ci ha fatto pensare che il composto potesse essere non solo tollerato, ma anche utilizzato come sorgente alimentare di carbonio. Ciò ci venne suggerito, tra l'altro, da una osservazione di Corbellini e Gregorini [12] che avevano notato come alcuni Aspergilli cogicogenetici appartenenti al gruppo di *Asp. flavus* distruggessero in un secondo tempo l'acido cogico formato.

Per accertare questa possibilità si sono allestite colture di *Asp. oryzae*, *Asp. niger*, *Pen. notatum*, *Botrytis cinerea* in mezzo Czapek–Dox contenente al posto dello zucchero acido cogico 0.25–0.5–1 %.

Incubato in termostato per circa un mese fu notato che solo l'*Aspergillus oryzae* si era sviluppato abbondantemente (fatta eccezione del controllo in cui mancava la sorgente di carbonio) anche in presenza dell'1 % di acido cogico. Il liquido nutritivo, in queste colture, dimostrò di non contenere più acido cogico risultando negativa la tipica reazione con il cloruro di ferro.

In realtà esistono dunque specie che non solo tollerano, ma anche metabolizzano l'acido cogico ed è probabile, che queste specie, siano quelle dotate di proprietà cogicogenetiche. La proprietà di formare e quindi di distruggere determinati composti si riscontra in molti microrganismi; e questo sta a significare che il metabolita che si considera rappresenta solo, in tali casi, il prodotto di una delle fasi intermedie di un processo a catena.

Bibliografia

[1] K. Saito, *Ueber die Säurebildung bei Aspergillus oryzae*. « Botan. Mag. Tokyo », vol. 21, p. 240 (1907).

[2] T. Yabuta, *On Kojic acid, a new organic acid formed by Aspergillus oryzae*. « Jour. Coll. Agr., Tokyo Imp. Univ. », vol. 5, p. 51 (1912).

[3] T. Yabuta, *The constitution of Kojic acid, a γ pyrone derivative formed by Aspergillus oryzae from carbohydrates*. « Journ. Chem. Soc. (Japan) », vol. 125, p. 575 (1924).

[4] S. C. Prescott e C. G. Dunn, *Industrial microbiology*. N. Y., 1949.

[5] H. Morton, W. Kocholaty, R. Junowicz-Kocholaty e A. Kelner, *Toxicity and antibiotic activity of Kojic acid produced by Aspergillus luteo virescens*. « Journ. Bact. », vol. 50, p. 579 (1945).

[6] M. A. Jennings e T. J. Williams, *Production of Kojic acid by Aspergillus effusus*. « Nuture », vol. 155, p. 302 (1945).

[7] D. Gill-Carey, *The nature of some antibiotics from Aspergilli*. « Brit. J. Exper. Path. », vol. 30, p. 119, 1949.

[8] J. L. YUILL, *Production of itaconic acid and Kojic acid by a species of Aspergillus*, « Nature », vol. 161, p. 397 (1948).

[9] F. TRAETTA-MOSCA, *La fermentazione di alcuni zuccheri, mediante l'Asp. glaucus con alcune considerazioni sulla fermentazione alcoolica.* « Ann. Chim. Appl. », vol. 1, p. 477 (1914).

[10] A. H. COOK e M. S. LACEY, *Kojic acid and the antibiotic action of species of Aspergillus.* « Nature », vol. 155, p. 790 (1945).

[11] F. KAVANAUGH, *Activities of twenty-two antibacterial substances against nine species of bacteria.* « Journ. Bact. », vol. 54, p. 761 (1947).

[12] A. CORBELLINI e B. GREGORINI, *La formazione dell'acido cogico dagli idrati di carbonio per azione dell'Asp. flavus.* « Gazz. Chim. Ital. », vol. 60, p. 244 (1930).

Microbiologia. — *Il ciclo di sviluppo del fago nella cellula batterica* (*). Nota preliminare di GIUSEPPE PENSO, presentata (**) dal Corrisp. D. MAROTTA.

Le presenti ricerche sono state condotte con il *Phagus lacticola* (P. e O.) indotto sul *Mycobacterium* sp. ceppo Battaglini, acidoresistente particolarmente adatto allo studio del sistema fago-germe giacché, una volta infettato dal fago, esso diviene trasparente agli elettroni.

Il *Phagus lacticola*, come ogni altro fago, è costituito da una testa e una coda, ambedue circondate da una membrana unica che costituisce l'involucro esterno del fago. All'interno di tale involucro sono nettamente visibili un certo numero di piccoli granuli i quali, dopo che il fago è stato adsorbito dal germe, penetrano in questo, lasciando all'esterno l'involucro membranoso vuoto.

I granuli, una volta penetrati nell'interno del germe, vi si moltiplicano dando luogo a una formazione moruliforme, i cui singoli elementi tondeggianti presentano un minutissimo vacuolo centrale; tale vacuolo si dilata, i singoli elementi s'ingrossano e assumono una configurazione ad anello. I singoli anelli si liberano, sembrano moltiplicarsi, dando luogo alla formazione di una rosetta. Da questa gli anelli si distaccano e in ognuno di essi compare un piccolo ciglio, che si allunga, mentre l'anello – evidentemente un disco biconcavo – si gonfia venendosi così a riavere la formazione di un fago classico il quale, per la rottura del germe, ridiventa libero.

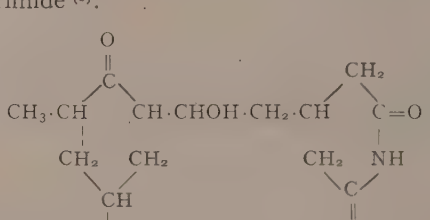
I fagi compiono, dunque, nell'interno della cellula ospite, un ciclo di sviluppo complesso: le varie fasi di tale ciclo, o almeno quelle che abbiamo potuto individuare, si armonizzano con le fasi cicliche di altri microesseri viventi. Questo ciclo di sviluppo, pur essendo il primo descritto per un *virus*, rientra nel quadro dei fenomeni biologici generali e già conosciuti.

P. S. – La documentazione fotografica sarà pubblicata nel lavoro definitivo.

(*) Lavoro eseguito nel Laboratorio di Microbiologia dell'Istituto Superiore di Sanità.
(**) Nella seduta del 9 maggio 1953.

Microbiologia. — *Intorno all'azione inibitrice dell'actidione sui lieviti della fermentazione vinaria* (*). Nota di Onorato Verona e Giovanni Picci, presentata (**) dal Socio A. Chiarugi.

Come è noto l'actidione è un sottoprodotto della fabbricazione della streptomicina (1). Ottenuto puro in forma cristallina da Leach, Ford e Whiffen nel 1947 (2) è stato visto trattarsi del β–[2–(3,5–dimetil–2–ossocicloesil)–2–idrossietil]–glutarimide (3):



All'actidione si riconoscono forti qualità antibiotiche; tuttavia, a differenza della streptomicina, tali azioni antibiotiche interessano più che gli schizomiceti gli eumiceti incluso, in questi, funghi fitopatogeni e lieviti.

Per quanto si riferisce ai lieviti, dei quali qui ci occupiamo, un esteso spettro è stato presentato da Whiffen (op. cit.):

Spettro di azione dell'actidione verso i lieviti

	γ/cc. dose inibente
Nematospora phaseoli	0.17
Pichia membranaefaciens	0.17
Saccharomyces carlsbergensis	0.17
» *ellipsoideus*	0.17
» *fragilis*	0.17
» *pastorianus*	0.17

(*) Dall'Istituto di Patologia vegetale e Microbiologia agraria dell'Università di Pisa.

(**) Nella seduta del 9 maggio 1953.

(1) Devesi tuttavia notare come il rapporto di produzione actidione–streptomicina vari, secondo la composizione del mezzo, spostandosi ad esempio da 49/225 a 232/164 sì che l'actidione può divenire, in certe condizioni, composto principale anziché secondario. (Cfr. A. J. Whiffen, *The production, assay, and antibiotic activity of actidione*. « J. Bact. », vol. 56, p. 283 (1948).

(2) B. E. Leach, H. J. Ford e A. J. Whiffen, *Actidione, an antibiotic from Streptomyces griseus*. « J. Am. Chem. Soc. », vol. 69, p. 474 (1947).

(3) E. C. Kornfeld, R. G. Jones e T. V. Parke, *The structure and chemistry of actidione, an antibiotic from Streptomyces griseus*. « J. Am. Chem. Soc. », vol. 71, p. 150 (1949).

	γ/cc. dose inibente
Schwanniomyces occidentalis	0.17
Sporobolomyces salmonicolor	0.17
Torulaspora fermentati	0.17
Cryptococcus neoformans	0.24
Rhodotorula glutinis	0.31
Hansenia apiculata	0.62
Hansenula anomala	2.5
Saccharomyces cerevisiae	10—
Torula utilis	10—
Asporomyces uvae	25—
Debaryomyces globosus	25—
Schizosacch. pombe	25—
Candida albicans	> 1.000
Endomyces magnusii	> 1.000
Kloeckera apiculata	> 1.000
Mycotorula roseo-corallina	> 1.000
Pityrosporum ovale	> 1.000
Saccharomyces lactis	> 1.000

Nel rilevare la diversa sensibilità delle varie specie, con riferimento a quelle che maggiormente interessano la fermentazione vinaria, abbiamo, tra le più sensibili, inibite cioè nel loro sviluppo per dosi di mg. 0,17/l, il gruppo degli ellittici, mentre tra le meno sensibili, resistenti cioè anche alla dose di gr. 1/l, il gruppo degli apiculati.

Questi reperti di Whiffen sono stati, in epoca recente (e mentre noi si stava per dare inizio alle presenti ricerche) raccolti anche da Ribéreau-Gayon e Peynaud [4] i quali hanno condotto interessanti indagini sugli effetti inibitori dell'actidione sopra mosti inoculati con *Sacch. ellipsoideus*. I ricordati AA. hanno trovato che mezzo milligrammo di actidione per litro di mosto ritarda di due giorni l'inizio della fermentazione; un milligrammo spinge a 4-5 giorni questo ritardo che si fa infine di 12 giorni circa quando l'actidione sia presente nella quantità di 5 mg. per litro. Quantità pari a mg. 7.5/l bloccano completamente la fermentazione sempre in quanto sia dovuta a lieviti ellittici. Per altre specie, in accordo con le prime indagini di Whiffen, occorrono quantità maggiori: almeno mg. 10/l per *Torulaspora Rosei* e le *Hansenula* e mg. 50/l per gli apiculati.

Nell'occuparci dell'argomento noi abbiamo inteso, anzitutto, stabilire l'azione dell'actidione sullo sviluppo di alcuni ceppi di *Sacch. cerevisiae* var. *ellipsoideus* di diversa provenienza. A questo scopo ceppi diversi di

(4) J. RIBEREAU-GAYON e E. PAYNAUD, *Action inhibitrice sur les levures de la vitamine* K_5 *et de quelques antibiotiques*. «Ac. d'Agr. Fr.», 1952.

ellittico sono stati coltivati in adatto liquido nutritivo sintetico [5] addizionato o non di actidione [6] seguendone quindi lo sviluppo attraverso l'intorbidamento del liquido. Dal protocollo delle esperienze togliamo i dati relativi a quattro ceppi etichettati, secondo la provenienza, con i termini di « Asti », « Chianti », Umbria », « Puglie ».

Come era facile pensare non tutti i ceppi di lievito ellittico manifestano lo stesso comportamento di fronte ad uguali dosi di actidione. Tra i ceppi sperimentati una differenza profonda, ad esempio, si è trovata (per limitarci ai casi di cui abbiamo riportato i dati) tra un ceppo proveniente dallo Astigiano dimostratosi sensibilissimo, e un ceppo del Chianti per contro relativamente resistente. La differenza è tale che mentre in presenza di mg. 0,75/l di actidione il ceppo « Asti » non accenna a svilupparsi neppure trascorsi venti giorni, il ceppo « Chianti », in presenza della stessa dose, ritarda lo sviluppo di soli due giorni raggiungendo, sempre in questo caso, il massimo dello sviluppo al 7°–8° giorno. Gli altri ceppi hanno dimostrato comportamento tra loro paragonabile e intermedio ai ricordati casi estremi avendosi ritardo di sviluppo proporzionalmente alle quantità di actidione presenti nel mezzo, ritardo che sale ad 8–9 giorni per la dose massima sperimentata di mg. 0.75/l.

Indipendentemente dalla ricognizione delle curve di sviluppo, per il ceppo proveniente da materiale del Chianti dimostratosi così resistente all'actidione, si è voluto seguire le curve di fermentazione in mosto variamente addizionato del composto fino alla quantità massima di mg. 1,5/l.

(5) Il liquido nutritivo usato aveva la seguente composizione:

glucosio	gr.	50.—					
$(NH_4)_2SO_4$	»	6.—					
KH_2PO_4	»	2.—					
$MgSO_4 \cdot 7H_2O$	»	0.25					
$CaCl_2$	»	0.25					
H_3BO_3 (1 °/oo)	cc.	1	biotina	γ	25	per	1000 cc.
$ZnSO_4$ »	»	1	tiamina	mg.	0.5	»	»
$MnCl_2$ »	»	1	m–inositolo	»	25	»	»
Tl_2SO_4 »	»	1	Ca–pantotenato	»	2.5	»	»
$FeCl_3$ (0.5 °/oo)	»	1	piridossina	»	0.5	»	»
$CuSO_4$ (1 °/oo)	»	1					
KJ (0.1 °/oo)	»	1					
Acqua d. fino a	»	1000					

(Liq. di WILLIAMS, ripreso da T. WIKEN e O. RICHARD. *Untersuchungen über die physiologie der Weinhefen*, I Mitt. « Ant. v. Leeuwenhoek », vol. 17, p. 209 (1951).

(6) Per questa ricerca, come per le altre ricerche, l'aggiunta di actidione ai mezzi colturali è stata eseguita tenendo presenti gli accorgimenti suggeriti da: G. B. PHILLIPS e E. HANEL, *Control of mold contaminants on solid media by the use of actidione*. « J. Bact. », vol. 60, p. 104 (1950).

Quantità sufficienti di actidione ci furono cortesemente offerti da The Upjhon Co. di Kalamazoo (Michigan) che ben vivamente ringraziamo.

Comportamento di alcuni ceppi di lievito ellittico in mezzo sintetico fermentescibile contenente quantità varie di actidione (Indice dell'intensità di sviluppo l'intorbidamento dei liquidi colturali; misurazione a mezzo di colorimetro a cella fotoelettrica).

Ceppo	Dopo giorni	Controllo	Actidione mg/l				
			0.10	0.175	0.25	0.50	0.75
« Asti »	1	7	—	—	—	—	—
	2	25	—	—	—	—	—
	3	84	—	—	—	—	—
	4	95	8	8	—	—	—
	5	97	20	21	—	—	—
	6	97	51	50	—	—	—
	7		76	75	4	—	—
	8		92	94	13	—	—
	9		95	96	30	5	—
	10		97	96	54	19	—
	11				75	29	—
	12				89	44	—
	13				94	57	—
	14				97	72	—
	15					83	—
	16					92	—
	17					96	—
	20						—
« Chianti »	1	30	8	4	—	—	—
	2	81	35	17	12	6	—
	3	94	79	63	40	28	8
	4	97	95	92	85	60	28
	5		97	96	91	88	55
	6			96	96	94	76
	7					97	91
	8						96
« Umbria »	1	22	4	—	—	—	—
	2	70	19	—	—	—	—
	3	91	50	11	—	—	—
	4	95	78	45	4	—	—
	5	97	92	76	16	—	—
	6		95	93	53	tr.	—
	7		96	97	86	13	—
	8				95	55	—
	9				97	87	6
	10					94	22
	11					97	49
	12						79
	13						93
	14						97
« Puglia »	1	11	4	—	—	—	—
	2	58	18	—	—	—	—
	3	91	55	6	—	—	—
	4	96	85	30	tr.	—	—
	5	96	95	68	14	—	—
	6		97	90	48	4	—
	7			94	85	18	—
	8			97	92	62	—
	9				96	93	6
	10					96	24
	11					97	58
	12						84
	13						95
	14						97

L'esperienza, condotta su di un buon mosto contenuto in matracci muniti di valvola ad acido solforico per la periodica determinazione dell'anidride carbonica, ha dato i risultati seguenti:

Sviluppo di CO_2 in gr. per 100 cc. di mosto non contenente o contenente actitidione, inoculato con « Sacch. ellipsoideus » « Chianti » e incubato a 24–25° C.

Giorni	Controllo	Actidione mg/l					
		0.25	0.50	0.75	1	1.25	1.50
1	0.280	—	—	—	—	—	—
2	0.910	0.302	—	—	—	—	—
3	1.890	1.005	0.430	0.318	—	—	—
4	2.960	2.010	1.445	1.320	—	—	—
5	4.305	3.090	2.570	2.360	—	—	—
6	5.417	4.375	3.750	3.575	—	—	—
7	6.515	5.450	4.930	4.780	—	—	—
8	7.602	6.610	6.005	5.690	—	—	—
9	8.710	7.630	7.180	6.750	—	—	—
10	9.506	8.502	8.010	7,750	—	—	—
11	10.080	9.185	8.750	8.504	0.180	—	—
12	10.460	9.704	9.410	9.244	0.397	0.176	—
13	10.602	10.203	9.802	9.650	0.744	0.358	—
14	10.625	10.510	10.136	9.920	0.912	0.680	tr.
15	10.631	10.602	10.221	9.990	1.060	0.891	0.112
16		10.664	10.300	10.004	1.180	1.003	0.184
17		10.680	10.316	10.010	1.220	1.175	0.240
18		10.682	10.318	10.010	1.273	1.214	0.315
19					1.304	1.295	0.378
20					1.312	1.298	0.414
21					1.315	1.300	0.421

Il rilevato andamento del processo fermentativo conferma come questo ceppo resista abbastanza bene alla dose di mg. 0.75/l di actidione. Come si raggiunge, però, la dose di mg. 1/l l'azione antifermentativa del composto appare molto più energica in quanto il mosto rimane muto per 10 11 giorni

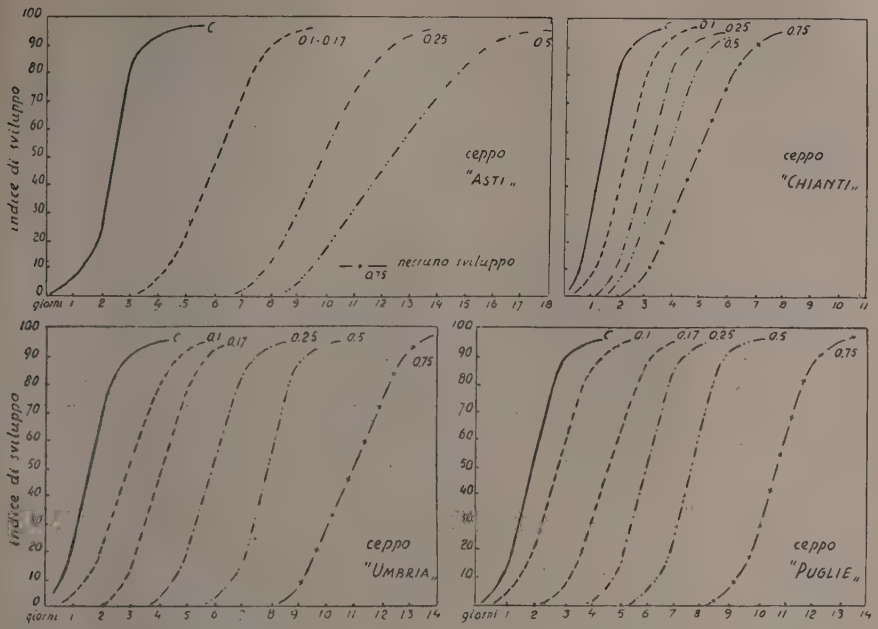


Fig. 1. – Diverso sviluppo di vari ceppi di *Sacch. ellipsoideus* in mezzo contenente quantità diverse di actidione.

mentre la stessa fermentazione procede con grandissima lentezza. In presenza di mg. 1.5/l la fermentazione praticamente si arresta non dosandosi che piccolissime quantità di gas al 21° giorno.

Sempre con riferimento al lievito ellittico si è voluto quindi precisare l'azione microbicida dell'actidione.

A tal uopo abbiamo preparato una sospensione di cellule, numericamente controllata, in acqua distillata e in soluzioni di actidione di mg. 0.5/l,

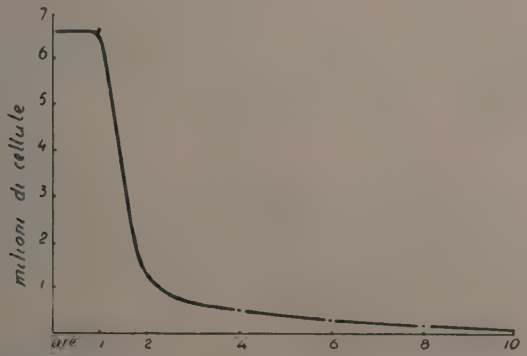


Fig. 2. – Curva di sopravvivenza di cellule di lievito ellittico sottoposte all'azione dell'actidione (mg. 1/l) per tempi diversi.

mg. 0.75/l e mg. 1/l. Di tempo in tempo, e cioè dopo 1–2–3 · · · 10 ore si è proceduto alla conta delle cellule capaci ancora di svilupparsi. La conta si è effettuata inficiando piastre con un volume noto della sospensione cellulare previamente e opportunamente diluita in un determinato volume di acqua sterile. Mezzo di coltura agar–malto; conta dopo 4 giorni di incubazione a 25–26° C.

Sopravvivenza di cellule di « Sacch. ellipsoideus » in acqua contenente actidione, in funzione del tempo (n. di cellule per cc.).

Tempo di azione (ore)	In acqua distill. (controllo)	In acqua dist. contenente actidione mg/litro		
		0.5	0.75	1
inizio	6.450.000	6.050.000	6.710.000	6.500.000
1	6.820.000	6.310.000	6.370.000	6.620.000
2	6.345.000	6.420.000	6.510.000	1.310.000
4	6.510.000	6.160.000	6.160.000	470.000
6	6.770.000	6.200.000	6.050.000	210.000
8	6.390.000	6.330.000	6.680.000	70.000
10	6.455.000	6.020.000	6.330.000	30.000

Una permanenza delle cellule, anche di 10 ore, in mezzo contenente mg. 0.75/l. di actidione non è sufficiente a devitalizzarle. Ove la concentrazione della sostanza salga però a mg. 1/l, nei limiti di tempo di 10 ore la quasi totalità delle cellule non si dimostra più capace di svilupparsi. Ciò comprova, evidentemente, l'azione microbicida del composto.

Finalmente, a complemento di quanto riferito, si è cercato di stabilire le quantità minime di actidione necessarie ad inibire lo sviluppo di altre specie di lieviti, diverse dal lievito ellittico, aventi interesse enologico.

Sono stati raccolti i seguenti risultati:

	dose inibente γ cc.
Kloeckera apiculata (in più ceppi)	> 1000 < 1500
Candida mycoderma (ex *Mycoderma vini*, ecc.) . .	1.5
Pichia membranaefaciens	0.2
Candida pulcherrima (in più ceppi)	10 20
Saccharomyces oviformis	0.8
» *chevalierii*	0.2
» *manginii*	1–1.2

Concludendo: l'actidione dimostra esercitare sui lieviti un potere antibiotico veramente notevole. Tale potere antibiotico varia, peraltro, a seconda le specie e, per quanto qui si è rilevato nei riguardi del lievito ellittico, anche a seconda dei ceppi.

In particolare, per quanto si riferisce ai lieviti di interesse enologico l'azione dell'actidione si porta, in modo del tutto evidente, sul lievito ellittico (come anche su specie minori); azione notevolmente più debole (da γ 1/cc. a $\gamma >$ 1000/cc.) manifesta invece, questo composto, verso i lieviti apiculati.

In conseguenza, il possibile impiego di questa sostanza quale antifermentativo non può essere esteso a quei casi – come nella maggior parte delle applicazioni enologiche – in cui l'attacco del mosto o di altri mezzi fermentescibili possa essere dovuto a lieviti di tipo apiculato. In enologia ne rimane possibile l'applicazione – come suggeriscono Ribéreau-Gayon e Peynaud – quando si vogliano stabilizzare vini dolci provenienti da mosti fermentati in purezza.

Finalmente, il fatto già noto che l'actidione rispetti entro certi limiti la flora batterica può essere considerato come vantaggioso là dove si abbia interesse a non impedire l'attività di alcuni gruppi di germi, come ad esempio, i fermenti malo-lattici; meno vantaggioso nei casi in cui si voglia prevenire lo sviluppo di germi causa di alterazione (f. acetici, f. mannitici, del girato, ecc.).

Microbiologia. — *Densità di popolazione batterica e sviluppo dell'«E. Coli»*. Nota di PIETRO BENIGNO e TITO BERTI, presentata (*) dal Socio E. MENEGHETTI.

Dai classici esperimenti di Henrici (1) risulta che l'aumento di dimensione che si verifica nei germi durante le prime fasi dello sviluppo è tanto più rilevante quanto minore è il numero delle cellule trapiantate. Però anche nel caso in cui si impieghi un *inoculum* elevato, se i microrganismi vengono trasportati in terreno nuovo prima di essere pervenuti alla massima dimensione, essi continuano a crescere raggiungendo un volume superiore a quello massimo osservato nella coltura originaria. Questa costatazione ci ha indotto a studiare alcuni aspetti delle variazioni fisiologiche (rapporto: massa/numero dei germi) e biochimiche (variazioni della concentrazione in fosforo totale – PT – riferita al peso secco dei germi) durante le varie fasi di crescita della *Escherichia coli K 31*, quando si rinnova, a tempi determinati, una parte

(*) Nella seduta del 9 maggio 1953.

(1) A. T. HENRICI, *Morfologic variation and the rate of growth of Bacteria*, Chas. C. Thomas, Springfield, Illinois, 1938.

del terreno di sviluppo. A questo scopo colture di 24 h in brodo vennero centrifugate e i microrganismi furono risospesi in terreno nuovo (brodo semplice) mantenuto a 38°, diluendo fino ad avere un *inoculum* di circa mg. 1,5 di massa protoplasmatica (peso secco) per cc. 100 di liquido nutritivo. Successivamente, a intervalli di 22', metà della coltura venne asportata e sostituita con brodo mantenuto alla stessa temperatura (38°). Si scelse questo tempo sia perché, in alcuni esperimenti preliminari, si era stabilito che in tale periodo la massa protoplasmatica si raddoppia, sia perché, per l'*inoculum* adoperato, esso è inferiore alla durata della fase durante la quale il numero delle cellule rimane costante. In tal modo non solo si rinnova il terreno prima che i microrganismi raggiungano la massima dimensione (condizione analoga a quella realizzata da Henrici), ma, una volta effettuato il cambio, la massa protoplasmatica ritorna uguale a quella di partenza. Della frazione di coltura prelevata ci siamo serviti per determinare il numero e il peso secco dei germi e per stabilire le variazioni di concentrazione in PT della massa protoplasmatica. I particolari tecnici di queste misure sono stati descritti in Note precedenti [2] [3].

Le differenze tra lo sviluppo della coltura in condizioni normali e quello osservato operando il cambio del terreno (in questo caso i dati sperimentali corrispondono alle misure effettuate prima di operare il cambio) risultano dalla fig. 1.

Dall'analisi dei grafici si possono notare i seguenti fatti:

la lunghezza del periodo stazionario iniziale non è praticamente modificata;

più lunga è la fase di accelerazione dello sviluppo; in tale periodo il germe continua ad aumentare di volume, raggiungendo valori considerevolmente superiori a quelli messi in evidenza nei controlli;

quando si accentua la velocità di divisione (fase logaritmica) i germi diminuiscono progressivamente di volume, ma la loro dimensione rimane circa due volte e mezzo superiore a quella delle cellule dell'*inoculum*;

la concentrazione in PT aumenta rapidamente e successivamente rimane costante per tutta la durata dell'esperimento.

Nella valutazione di questi risultati bisogna tener conto del fatto che, in condizioni di sviluppo normali, quando si inoculano nel brodo semplice mg. 1,5 % di massa protoplasmatica (peso secco), questa, dopo 24 h, passa a mg. 22–24 %; ma già dopo circa 70', quando ancora la riproduzione avviene con ritmo logaritmico e la concentrazione è di circa mg. 7 - 8 %, non solo i germi sono ritornati alle dimensioni di partenza, ma si ha anche una diminuzione della percentuale in PT; quest'ultimo fenomeno sta a indicare una sensibile modificazione del metabolismo fosforato. La variazione del PT non ci sembra imputabile a modificazioni biochimiche peculiari della fase logaritmica perché, come uno di noi ha messo in evidenza [3], se,

(2) P. Benigno e T. Berti, «Arch. int. pharmacodyn.», *93*, 466 (1953).

(3) P. Benigno, «Arch. It. Sc. Farmacol.», ser. III, 1953 (in corso di stampa).

in tale periodo, una parte delle cellule è trasportata in terreno nuovo, la moltiplicazione continua con andamento esponenziale, ma la percentuale in PT aumenta raggiungendo i valori massimi osservati nella coltura originaria e poi, col crescere della concentrazione protoplasmatica, torna ad abbassarsi. Né d'altro canto sembra attendibile attribuire la diminuzione in PT all'impoverimento del terreno o all'accumulo in esso dei prodotti intermedi e finali del metabolismo non solo perché le possibilità di accrescimento sono ancora notevoli, ma soprattutto perché, in alcune prove preliminari

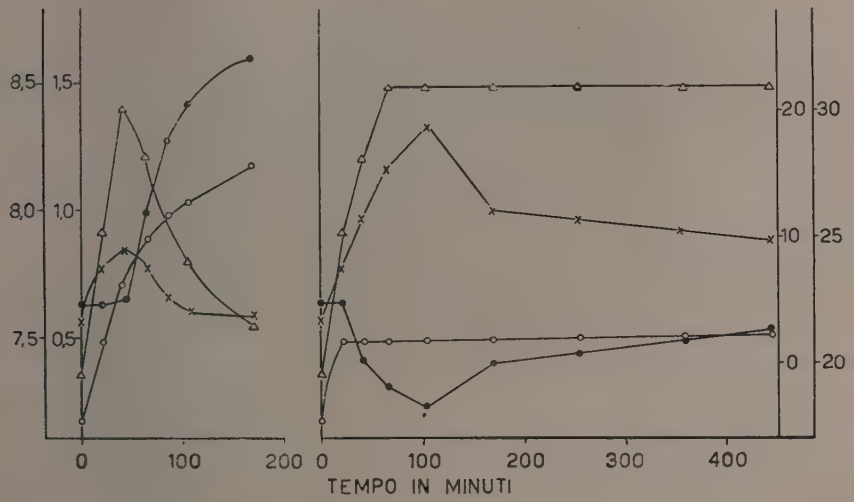


Fig. 1. – *Inoculum* da colture di *E. coli* di 24 h. Grafico di sinistra = controllo. Grafico di destra = sviluppo osservato sostituendo parzialmente il terreno a intervalli di 22' (i dati sperimentali corrispondono alle misure effettuate prima del cambio).

Ordinate. A sinistra: all'esterno, log del numero dei germi per cc ● — ● — ●; all'interno, log del peso secco delle cellule di cc. 100 di brodo o — o — o. A destra: all'esterno, fosforo totale, $^{0}/_{00}$ del peso secco Δ — Δ — Δ; all'interno, peso medio delle cellule ($mg \times 10^{-10}$) x — x — x.

abbiamo potuto osservare che se si trapiantano germi di 24 h (mg. 1,5 % in peso secco) nel filtrato su Seitz, ottenuto da una coltura di 24 h, la concentrazione in PT delle cellule, durante la prime fasi di sviluppo, aumenta. I risultati ottenuti col cambio del terreno dimostrano che, durante la fase logaritmica, è possibile far restare elevata la percentuale in PT mantenendo scarsa la concentrazione protoplasmatica.

A questo proposito è da notare come Wade (4), adoperando un terreno aereato (due litri per minuto e per litro di terreno) in cui la crescita è molto più rigogliosa, abbia osservato che la percentuale in PT rimane alta per un lungo periodo della fase di moltiplicazione esponenziale. Se l'aereazione

(4) H. E. WADE, « J. gen. Microbiol. », 7, 24 (1952).

favorisce i processi di sintesi del fosforo, la caduta della concentrazione del PT da noi osservata quando la concentrazione dei germi è di circa mg. 8 °/₀ potrebbe mettersi in rapporto con la riduzione dello "spazio biologico" e, in particolare, con l'insufficienza dell'ossigeno sciolto nel terreno per tali quantità di massa protoplasmatica (5).

Con la tecnica della sostituzione parziale del terreno, nel brodo si ha un progressivo aumento dei prodotti intermedi e finali del metabolismo. Si può però prevedere che, dopo i primi cambi e cioè proprio all'inizio della fase logaritmica, ciò non si verifica più. Si tenga infatti presente che, in 22', la massa protoplasmatica passa costantemente da mg. 1,5 a mg. 3 °/₀; se si ammette, e questa ipotesi ci sembra verosimile, che durante tale aumento si formi sempre la stessa quantità di prodotti intermedi e finali del metabolismo q, che passano nel liquido nutritivo, una volta effettuato il cambio, la formula che esprime il numero di q che rimane nel terreno, in funzione del numero dei cambi c, è $2^c - 1/2^c$; così se al primo cambio esso sarà $1/2\,q$, al quarto cambio esso sarà $15/16\,q$, valore che rimarrà praticamente costante, e che può quindi essere considerato uguale alla quantità di prodotti intermedi e finali del metabolismo che si è formata tra 0' e 22'.

Concludendo, con la tecnica descritta non solo si modifica, in tutte le varie fasi dello sviluppo il rapporto: massa/numero dei germi, si protrae il periodo di accelerazione della divisione e si possono raccogliere, in tempi ravvicinati, quantità di microrganismi sufficienti per l'analisi di alcune attività biochimiche, ma si può anche prolungare indefinitamente quello stadio di moltiplicazione logaritmica che, in condizioni di crescita abituali e per l'*inoculum* adoperato, interessa solo un breve tratto della curva di sviluppo; inoltre, in tale periodo, la composizione del terreno è poco modificata perché ogni 22' essa ritorna nelle condizioni di partenza.

Noi pensiamo che questo metodo possa essere utilmente impiegato per studiare alcune caratteristiche del metabolismo dei germi e l'azione dei farmaci antibatterici proprio durante i vari stadi dello sviluppo. In particolare ci proponiamo di indagare se quelle variazioni di sensibilità agli agenti chimici, descritte durante il periodo, cui si dà il nome di « physiological youth » si riscontrino anche nella fase di moltiplicazione logaritmica, quando questa venga prolungata col sistema della sostituzione del terreno.

(5) L. CALIFANO, *Crescita e moltiplicazione batterica*, « Accad. Naz. Lincei », Quad. N. 28, 1952.

Microbiologia. — *Osservazioni sulla morfologia del «Penicillium chrysogenum» in cultura sommersa.* – IV. [1)a) b) c)]. *Sviluppo di pallette sclerotiali di «P. chrysogenum Thom» in cultura sommersa* [*]. Nota di M. J. THIRUMALACHAR e K. S. GOPALKRISHNAN [**], presentata [***] dal Socio E. B. CHAIN.

Il tipo di organizzazione del micelio del *Penicillium chrysogenum Thom* è stato, per qualche tempo, oggetto di estese ricerche in questo laboratorio. In cultura sommersa, in beute o palloni agitati, il micelio si sviluppa in forma filamentosa o di pallette, a seconda del numero di conidi presenti nel mezzo e della capacità nutrizionale di questo [1 a)]. Nei fermentatori agitati meccanicamente l'aspetto del micelio dipende, in gran parte, dall'intensità dell'agitazione. In queste condizioni sono stati osservati essenzialmente due tipi di ife: 1° una forma lunga filamentosa che si presenta quando l'intensità dell'agitazione è moderata; 2° una forma corta, fittamente ramificata, in condizioni di vigorosa agitazione [1 c)]. La formazione di pallette nei fermentatori ha luogo solo raramente e le condizioni necessarie per la comparsa di queste non sono state ancora completamente chiarite.

È stato trovato recentemente che è possibile ottenere, in condizioni riproducibili, la formazione di pallette in un fermentatore agitato da 10 l. in acciaio inossidabile [2] [3], quando il mezzo culturale (cornsteep secco 3 per cento, lattosio 3 per cento, carbonato 0,7 per cento) è inoculato con 30.000 conidi (*P. chrysogenum*, ceppo 47.1564, ricevuto dal dott. M. P. Backus, Department of Botany, University of Wisconsin) per c. c.; l'agitazione è moderata (350 rpm., elica a turbina con 8 pale, dal diametro di 65 mm., uguale a $^1/_3$ del diametro del fermentatore, per dettagli vedi [2] e [3]); e la aereazione è ottenuta mediante un diffusore di acciaio inossidabile, con volume d'aria per minuto pari al volume del mezzo culturale.

(1) *a*) Prima parte in questa serie: L. CAMICI, G. SERMONTI e E. B. CHAIN, *Mycelial Growth and Autolysis*. « Bull. Org. Mond. Santé », *6*, 265–276 (1952).

b) Seconda parte: A. TONOLO e E. URBANI, *Cytological and Cytochemical Investigations*. « Bull. Org. Mond. Santé », *6*, 277–285 (1952).

c) Terza parte: W. M. DION, G. SERMONTI, A. CARILLI e E. B. CHAIN, *Mycelial Growth in Stirred Fermenters*. « Rend. ist. super. san. », 1953 (in preparazione).

(*) Lavoro eseguito nel Centro Internazionale di Chimica Microbiologica, Istituto Superiore di Sanità.

(**) Borsisti dell'Organizzazione Mondiale di Sanità.

(***) Nella seduta del 9 maggio 1953.

(2) E. B. CHAIN, S. PALADINO, D. S. CALLOW, F. UGOLINI e J. VAN DER SLUIS, *Studies on Aeration*. – I. *Factors Influencing Aeration Efficiency*. « Bull. Org. Mond. Santé », *6*, 73–97 (1952).

(3) E. B. CHAIN, S. PALADINO, F. UGOLINI, D. S. CALLOW e J. VAN DER SLUIS, *Studies on Aeration*. – II. *Laboratory Fermenter for Vortex and Sparger Aeration*. « Rend. ist. super. san. », 1953 (in preparazione).

Le pallette, di color giallo cannella, avevano un diametro da 1,2 a 2 mm. L'osservazione microscopica ha mostrato che esse differivano, nella

Fig. 1. – Sezione di una palletta scleroziale in cui si osserva la zona centrale compatta (×150).

Fig. 1 *a*. – Parte marginale della fig. 1 *a* ingrandita per mostrare le cellule scleroziali disperse (×420).

loro struttura, dalle pallette formate nelle culture in beute agitate. Esse erano composte da una fitta massa di ife, inframezzate da molte cellule di aspetto sclerozíale con pareti ispessite (fig. 1 e 1 *a*), e nel loro interno non si presentava l'autolisi osservata da Camici e altri (fig. 2).

La presenza di queste cellule suggeriva che le pallette formate nel fermentatore nelle condizioni sopra riferite, a differenza di quelle formate nelle beute agitate, non erano costituite semplicemente di normale micelio vegetativo, ma rappresentano formazioni di riposo di tipo sclerozíale simili a quelle presenti nelle culture su agar di *Rhizoctonia*.

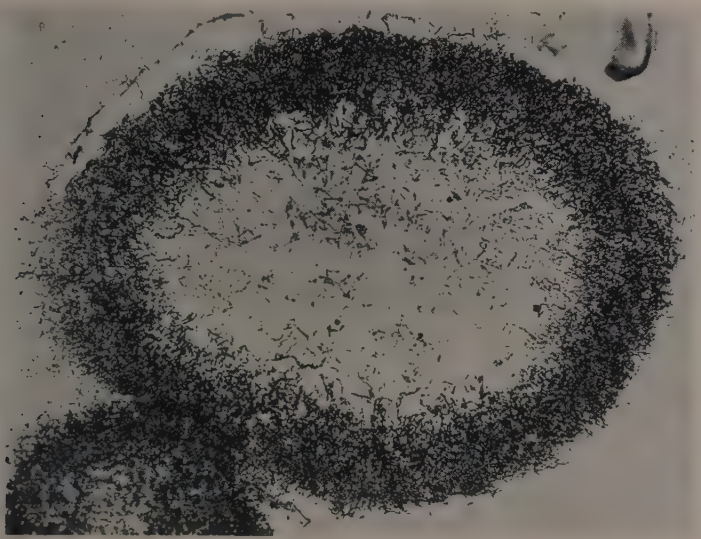


Fig. 2. – Una grossa palletta con uno spazio centrale vuoto in seguito all'autolisi delle ife interne (×85).

La natura sclerozíale delle pallette è stata provata nei modi seguenti: 1° Le pallette sono state fatte sviluppare nel fermentatore per 106 ore. In virtù del loro maggior peso, esse sono state separate dal micelio vegetativo per mezzo di centrifugazione frazionata e poi lavate con acqua. Sono state quindi gelate e disgelate diverse volte, sterilizzate in superficie in una soluzione 0,1 per cento di cloruro mercurico per tre minuti, lavate a fondo con acqua distillata e quindi trasferite in una beuta contenente il terreno culturale di Moyer (KH_2PO_4 1 g., $MgSO_4$ 0,5 g., KCl 0,5 g., $FeSO_4$ 0,01 g., Cornsteep liquido 10 g., Saccarosio 30 g., acqua 1000 cc.). Dopo 24 ore di cultura su agitatore le pallette davano luogo a nuovo sviluppo, producendo una gran quantità di nuove ife. Il normale micelio vegetativo, al contrario, è subito completamente ucciso da un semplice gelo e disgelo e da un trattamento con cloruro mercurico. 2° Le pallette sono state seccate per tre ore

a 50° C e conservate quindi a temperatura ambiente. Dopo una sterilizzazione in superficie con cloruro mercurico al 0,1 per cento da tre fino a cinque minuti e lavaggio con acqua distillata sterile, esse sono state trasferite periodicamente in beute contenenti terreno di Moyer. Le pallette hanno dato luogo a nuova crescita e si sono conservate vitali fino al momento della stesura di questa Nota, cioè per 40 giorni. Il micelio vegetativo è ucciso a 50° C e non sopravvive al disseccamento nelle condizioni surriferite.

La distribuzione delle cellule scleroziali nelle pallette si è potuta osservare chiaramente in sezioni istologiche. Esse presentavano pareti ispessite

Fig. 3. – Sezione di una palletta sclerozíale, colorata con violetto di genziana–iodio di Newton, seguìto da trattamento con acido picrico. Solo le cellule scleroziali sono colorate differenzialmente permettendo di osservare la loro distribuzione entro la palletta (×300).

di color giallo cannella, e il loro contenuto assumeva intensamente i coloranti. Colorate col violetto di genziana–iodio–ioduro di potassio di Newton e lavate in una soluzione diluita di acido picrico in xilolo, le cellule delle ife normali perdevano la colorazione violetta, mentre le cellule scleroziali, simili a clamidospore, la conservavano (fig. 3). L'osservazione microscopica delle pallette scleroziali seccate, dopo trasferimento in terreno di Moyer, ha mostrato chiaramente che la nuova crescita prendeva origine dalle cellule a pareti ispessite.

Da un inoculo di circa 300 pallette scleroziali in 125 ml di terreno di Moyer si è sviluppato uno spesso feltro di micelio vegetativo, consistente

in diverse migliaia di grosse pallette. Alcune di esse misuravano oltre 10 mm. di diametro (fig. 4). Le pallette secondarie erano originate da masse di ife che si distaccavano dal margine delle pallette sclerotiali in rigenerazione (fig. 5). Ogni palletta sclerotiale può dar luogo a diverse pallette vegetative (fig. 5). Di conseguenza, anche se l'inoculo iniziale è piccolo, la crescita di micelio vegetativo può essere rapida e comparabile con quella che si ottiene da un pesante inoculo di spore.

Le pallette sclerotiali si formano in fermentatori sotto condizioni di moderata agitazione meccanica, dopo inoculo di spore. Esse si originano da

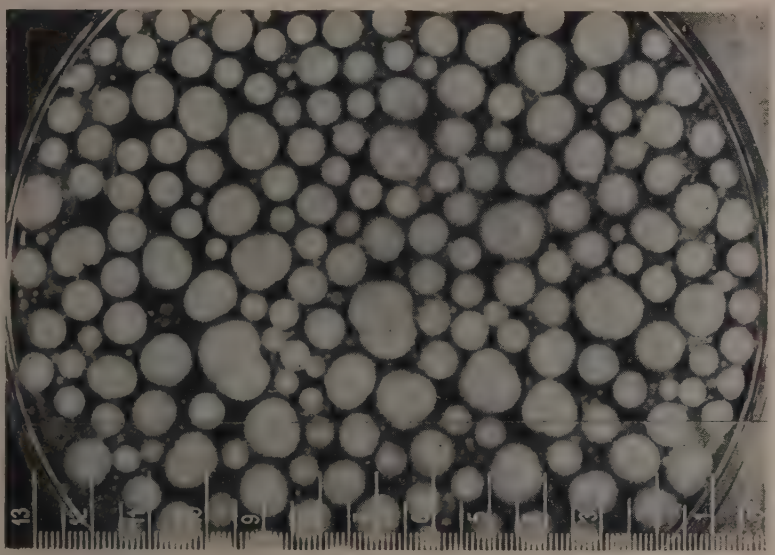


Fig. 4. – Rigenerazione di micelio da pallette sclerotiali in beuta agitata (viste dalla superficie) (grandezza naturale).

ife che si intrecciano fittamente con ramificazioni introflesse. Numerose cellule ifali si differenziano centripetamente e danno luogo a compatti agglomeramenti cellulari nel centro della palletta. Dopo che le pallette sclerotiali hanno raggiunto la loro grandezza massima lo strato esterno di ife si disintegra, liberando numerose cellule ifali del tipo corto-ramificato.

Con la scoperta delle pallette sclerotiali, un altro tipo morfologico di micelio del *P. chrysogenum* in cultura sommersa si aggiunge a quelli già conosciuti.

Il numero di cellule sclerotiali entro una palletta non è in genere abbastanza grande per dare luogo a una consistenza dura della formazione come nel genere *Sclerotium*. Le pallette sclerotiali del *P. chrysogenum* somigliano in linea generale agli sclerozi di *Rhizoctonia Kuhn*, in cui i corpi scle-

roziali sono composti di normali ife vegetative inframezzate da cellule scleroziali.

Oltre al loro interesse morfologico e fisiologico le pallette scleroziali potrebbero fornire un importante metodo per la conservazione dei caratteri dei diversi ceppi di *P. chrysogēnum* nello stadio miceliale.

È ben noto che i trasferimenti miceliali sono più adatti dei trasferimenti conidiali per il mantenimento dell'omogeneità delle culture fungine. Lo svantaggio del trasferimento miceliale è dovuto al fatto che, dopo numerosi trasferimenti il fungo cessa di sporulare, in conseguenza del « fenomeno

Fig. 5. – Formazione di pallette secondarie in beuta agitata inoculata con pallette scleroziali (preparato temporaneo) (×60).

duale » [4] osservato in molti funghi imperfetti. Le pallette scleroziali, dando luogo a nuovo sviluppo, producono invece regolarmente colonie uniformi di buona sporulazione.

Gli Autori desiderano esprimere la loro riconoscenza al prof. E. B. Chain, F.R.S., per il suo interessamento e per i suoi preziosi consigli.

(4) H. N. Hansen, *The Dual Phenomenon in Imperfect Fungi*. « Mycologia », 442-455 (1938).

Biologia. — *Osservazioni sulla vita latente.* – III. *Studio delle amilasi di «Artemia salina»* L. (*). Nota di ENRICO URBANI, SALVATORE RUSSO e LUCIANO ROGNONE, presentata (**) dal Socio G. COTRONEI.

In precedenti Note sono stati esposti i risultati dello studio di alcuni enzimi proteolitici presenti nei germi incistati di *Artemia salina* L. Si è visto come dipeptidasi (1) e proteinasi (2) restino conservate nei germi in vita latente e possano resistere anche parecchi anni nelle condizioni di anabiosi. Poiché il problema della vita latente presenta un indubbio interesse biologico, per le condizioni del tutto particolari nelle quali si viene a trovare il protoplasma, si è proseguito nello studio del corredo enzimatico dei germi incistati di *Artemia* ed in questa Nota esponiamo i risultati delle osservazioni compiute sul tenore in amilasi. Si vedrà nel corso della presente esposizione che abbiamo potuto rivelare, sullo stesso materiale, anche la presenza di una maltasi.

Le amilasi sono enzimi capaci di idrolizzare l'amido fino a maltosio; a seconda della maniera nella quale la molecola di amido viene attaccata nei suoi componenti (amiloso e amilopectina) e a seconda della percentuale dei prodotti intermedi della digestione, si distinguono una α–amilasi, destrinizzante e una β–amilasi, saccarificante. Le α–amilasi sono state trovate in microorganismi, in animali inferiori e superiori e nelle piante superiori, mentre le β–amilasi, particolarmente abbondanti nei semi dei cereali, non sono reperibili, secondo Bernfeld (3), nel regno animale. Sumner e Somers (4) e Baldwin (5) invece, non escludono negli animali la coesistenza di ambedue i tipi di amilasi.

Quasi sempre le amilasi sono accompagnate da maltasi che idrolizzano il maltosio a glucosio; questo fatto è stato confermato dalle nostre esperienze. Precisiamo che per il momento non abbiamo fatto uno studio discriminativo tra α–amilasi e β–amilasi nei germi di Artemia, e chiamiamo amilasi perciò, quello o quegli enzimi, capaci di idrolizzare l'amido prescindendo dalle modalità di attacco della molecola dell'amido stesso.

Per quanto riguarda il contenuto in amilasi di organismi in vita latente, ricordiamo il lavoro di Engel (1947) (6) il quale ha trovato che i semi in riposo di grano, segale, ed orzo contengono β–amilasi, confermando perciò le antiche osservazioni di White (1909) (7) che aveva rilevato un potere diastasico nei semi quiescenti. Engel ha anche studiato la distribuzione topografica dell'enzima nelle varie zone del seme.

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Anatomia Comparata «G. B. Grassi» della Università di Roma.

(**) Nella seduta del 9 maggio 1953.

(1) E. URBANI, L. ROGNONE e S. RUSSO. «Rend. Acc. Naz. Lincei», XIII, 300 (1952).

(2) E. URBANI e L. DE CESARIS–COROMALDI, «Rend. Acc. Naz. Lincei», XIV, 144 (1953).

(3) P. BERNFELD, «Advances in Enzymology», *12*, 380 (1951).

(4) J. B. SUMNER e G. F. SOMERS, *Chemistry and methods of enzymes*. «Acad. Press Inc. Publ.», New York 1953.

(5) E. BALDWIN, *Biochimica dinamica*, Einaudi 1951.

(6) Chr. ENGEL, «Bioch. et Biophys. Acta», *1*, 42 (1947).

(7) J. WHITE, «Roy. Soc. Proceed. London», LXXXI (B) 417 (1909).

Come per i precedenti lavori, il materiale impiegato è costituito da germi incistati di *Artemia salina* L., provenienti dalla California, in vita latente da almeno un anno. I germi (200 mgr.) sono stati polverizzati in mortaio, ed omogenati o con acqua distillata o con tampone fosfato M/15 al pH desiderato (2–4 ml). L'omogenato è stato centrifugato a 6000 giri per 15′, e il supernatante usato quale estratto enzimatico. Una parte del supernatante è stata sottoposta ad ebollizione in fiala saldata per 20′, onde inattivare l'enzima. L'estratto attivo o inattivato è stato mescolato con una soluzione di amido solubile, secondo Zulkowsky (Merck) al 5 %, contenente NaCl al 2 ‰, e con tampone fosfato al pH desiderato in parti uguali, in una quantità di µl [8] indicata nelle singole esperienze. La miscela è stata posta a reagire in termostato ad una determinata temperatura e per un certo tempo, dopo di che è stata misurata l'attività enzimatica facendo uso di due metodi: uno cromatografico ed uno iodometrico, il primo qualitativo il secondo quantitativo.

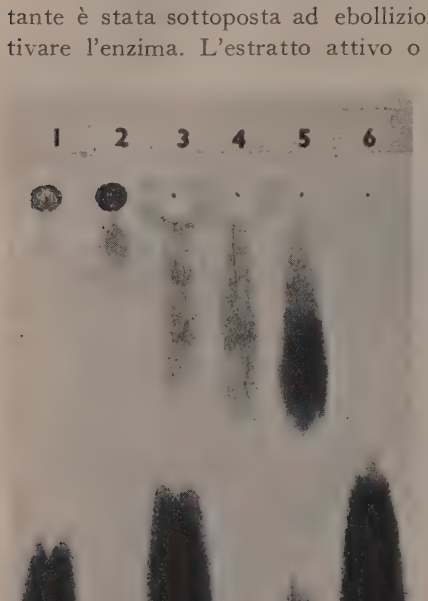


Fig. 1. Digestione enzimatica dell'amido e del maltosio dimostrata per cromatografia (spiegazione nel testo).

Metodo cromatografico. – La cromatografia discendente è stata eseguita con le consuete modalità. Carta Wathman n. 4. Solvente: propanolo 80 NH_4OH 1, H_2O 19. Rivelatore di Partridge; 0,93 gr. anilina, 50 ml. etanolo 50 ml. acido ossalico 0,2 M. L'analisi cromatografica di amido incubato con estratto attivo o inattivato di Artemia e tamponato a pH 6,6, ha mostrato che il primo ha liberato dall'amido una certa quantità di glucosio mentre nulla è stato liberato dall'amido incubato con estratto inattivato. Non trovando tra i prodotti della idrolisi enzimatica il maltosio, essendo questo presente solo in quantità deboli, abbiamo pensato che nell'estratto enzimatico fosse presente anche una maltasi che scinde il maltosio, liberato dalla amilasi, a glucosio. L'estratto attivo e inattivato di Artemie perciò è stato posto ad incubare con una soluzione di maltosio (cristallizzato Merck) al 5 %, tamponata a pH 6,6 ed i risultati ottenuti hanno confermato la nostra ipotesi; infatti si è riscontrato che il maltosio viene idrolizzato a glucosio. Il cromatogramma riportato nella fig. 1 è chiaramente dimostrativo. L'estratto attivo di Artemie ha liberato dall'amido

(8) µl = mm^3.

glucosio (1); è rimasta al punto di partenza una certa quantità di amido che è stato messo in evidenza con tintura iodo-iodurata diluita. L'estratto inattivato invece ha lasciato inattaccato l'amido (2). Dal maltosio al quale era stato aggiunto estratto attivo (3) è stata liberata una certa quantità di glucosio il che non è accaduto per il maltosio messo ad incubare con estratto inattivato (4). Sono state poste come termini di riferimento una goccia di maltosio (5) e una di glucosio (6), e si vede che il loro R_F corrisponde ai prodotti della digestione enzimatica. Si nota nel cromatogramma, come nel maltosio usato sia presente anche una piccola quantità di glucosio libero. Si è visto che il rivelatore usato è molto più sensibile per il glucosio che per il maltosio; perciò le macchie di maltosio sono molto più tenui.

In conclusione il metodo cromatografico ci ha permesso di dimostrare che nell'estratto di germi incistati di Artemia, sono presenti e funzionanti allo stesso pH (6,6) una amilasi ed una maltasi.

Metodo iodometrico. – Allo scopo di studiare quantitativamente le caratteristiche della attività amilolitica presente nell'estratto di germi incistati di Artemia, abbiamo usato il micrometodo iodometrico proposto da Linderstrøm-Lang e Holter (1933) [9] per il dosaggio degli zuccheri, usato da Holter e Doyle (1937) [10] per il dosaggio dell'attività amilasica nelle amebe, e da Urbani (1952) [11] per lo studio degli stessi enzimi nei frammenti nucleati ed enucleati di amebe.

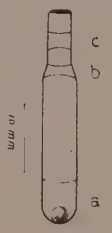


Fig. 2. – Modello del tubo usato per le determinazioni iodometriche (spiegazione nel testo).

Il principio del metodo è il seguente. Gli zuccheri che si liberano dalla digestione dell'amido, vengono ossidati ad acidi onici da una quantità di iodio in eccesso, ad opportuna alcalinità. L'eccesso di iodio è determinato per titolazione con tiosolfato in soluzione acida, con amido quale indicatore per lo iodio.

Abbiamo operato nel modo seguente. Sul fondo di tubi del tipo illustrato nella fig. 2, sono stati deposti con pipette a costrizione, estratto enzimatico, tampone fosfato al pH desiderato e amido al 5 %, in quantità eguali (8,60 µl). I tubi chiusi con tappi di gomma sono stati messi ad incubare. Terminata l'incubazione sono stati aggiunti 30 µl di tampone carbonato a pH 10,2 e il tutto mescolato con magnete per mezzo della pallina di vetro, contenente limatura di ferro, posta nell'interno del tubo (a). Si sono quindi aggiunti, sul fondo del tubo, 5,20 µl di soluzione di ioduro di potassio 0,1 N. Quindi nel collo del tubo vennero posti due tappi liquidi di 13 µl, il primo (b) di H_2SO_4 1,2 N e il secondo (c) di amido al 0,5 %. È possibile sistemare detti tappi agevolmente solo se i tubi sono stati prima dell'uso siliconati all'interno (cfr. Schwartz 1949) [12]. Sempre a mezzo del magnete, lo iodio è stato ben mescolato; i tappi liquidi hanno la funzione di impedire l'evaporazione dello iodio stesso, nei venti minuti circa, necessari perché gli zuccheri vengano trasformati ad acidi onici. Trascorso questo tempo, tali tappi sono stati fatti cadere sul fondo del tubo, con

(9) K. LINDERSTRØM-LANG e H. HOLTER, «C. R. Lab. Carlsberg, Sér. chim.», *19*, 14 (1933).

(10) H. HOLTER e W. L. DOYLE, «C.R. Lab. Carlsberg, Sér. chim.», *22*, 219 (1937).

(11) E. URBANI, «Bioch. et Biophys. Acta», *9*, 108 (1952).

(12) S. SCHWARTZ, «C.R. Lab. Carlsberg, Sér. Chim.», *27*, 79 (1949).

una breve e debole centrifugazione (30″ a mille giri) e lo iodio rimasto, titolato con tiosolfato N/50.

I valori di bianco sono stati ottenuti nella stessa maniera usando però estratto inattivato mediante ebollizione.

I valori riportati nei grafici sono la media di due–tre determinazioni; l'attività enzimatica è espressa in μl di tiosolfato N/50 (differenza di titolo con i bianchi). È da tener presente che le curve riportate non sono l'espressione di una sola attività enzimatica, ma dell'azione contemporanea di due enzimi, una amilasi ed una maltasi, che, come ha dimostrato la cromatografia, coesistono nell'estratto di germi incistati, e funzionano allo stesso pH.

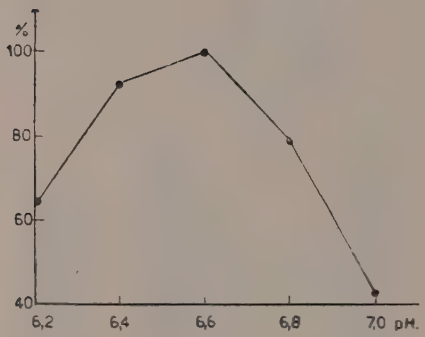


Fig. 3. – Attività in funzione del pH: in ascisse i valori di pH e in ordinate il percento di attività.

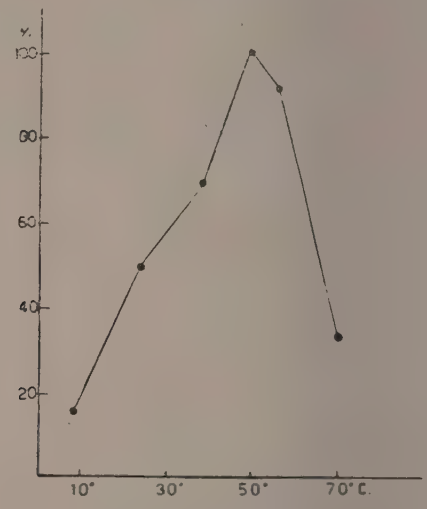


Fig. 4. – Attività in funzione della temperatura: in ascisse i valori di T e in ordinate il percento di attività.

Attività in funzione del pH. – 250 mg di germi incistati sono stati omogenati in 2 ml di acqua bidistillata. Posti ad incubare a vari pH per 35′ a 40° C, rispettivamente 8,7 μl di estratto, di tampone fosfato, e di amido. I risultati ottenuti sono illustrati nel grafico (fig. 3) dove viene dimostrato che il massimo di attività corrisponde al pH 6,6, il che è in accordo con quanto è conosciuto per le amilasi animali.

Attività in funzione della temperatura. – 200 mg di germi incistati, sono stati omogenati in 2 ml di tampone fosfato a pH 6,6. Tempo di incubazione 60′ a varie temperature. Quantità usate: come nella precedente esperienza. Sono state fatte tre diverse esperienze, i punti riportati nel grafico (fig. 4) sono la media dei risultati. Si vede come l'*optimum* di attività si abbia tra 49° e 56° C.

Attività in funzione della concentrazione. – 500 mg di germi incistati sono stati omogenati in 4 ml di tampone fosfato a pH 6,6. Mescolando in varie proporzioni estratto attivo e inattivo, si sono ottenute le concentrazioni: 1 (1 parte att. + 3 inatt.), 2 (2 att. + 2 inatt.), 3 (3 att. + 1 inatt.), 4 (solo estratto attivo). Sono stati prelevati 8,60 µl per ciascuna concentrazione, e uniti con eguale quantità di tampone a pH 6,6 e di amido. Tempo di incubazione 60', a 39° C. I risultati sono riportati nel grafico (fig. 5), che mostra come la relazione sia sufficientemente lineare.

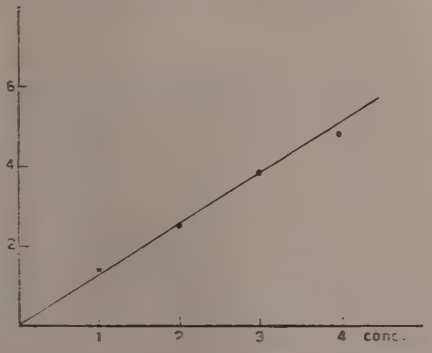


Fig. 5. – Attività in funzione della concentrazione dell'enzima: in ascisse i valori di concentrazione e in ordinate l'attività enzimatica in µl di tiosolfato N/50.

Attività in funzione del tempo di incubazione. – 500 mg di germi incistati sono stati omogenati in 10 ml di tampone fosfato a pH 6.6. Eguali quantità di estratto e di amido sono state poste ad incubare a 53° C. A vari tempi, sono stati prelevati 3 campioni di 31 µl ciascuno e su questi sono stati effettuati i dosaggi. Come bianco è stata assunta l'attività al tempo zero, ossia subito dopo l'unione dell'estratto con l'amido. Nel grafico riportato (fig. 6) si vede l'andamento della reazione dovuta alla coesistenza nell'estratto di almeno due enzimi, un'amilasi ed una maltasi, ambedue attivi entro gli stessi limiti di pH e temperatura.

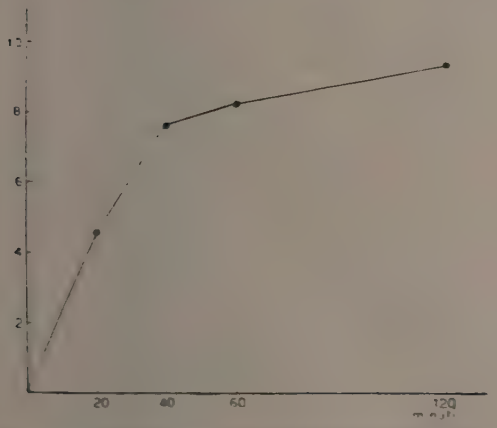


Fig. 6. – Attività in funzione del tempo di incubazione: in ascisse il tempo in minuti primi e in ordinate l'attività enzimatica in µl di tiosolfato N/50.

CONCLUSIONI. – Il presente studio mostra come i germi incistati di *Artemia salina* in vita latente mantengano conservate una amilasi ed una maltasi. Questi enzimi vengono inattivati dall'ebollizione. Sono state studiate qualitativamente per via cromatografica, e quantitativamente per via iodometrica, alcune caratteristiche di questi enzimi.

COMMEMORAZIONI

Commemorazione del Socio Gino Fano

Tenuta (*) dal Corrisp. ALESSANDRO TERRACINI

Il mattino del 10 novembre dell'anno scorso un piccolo gruppo di intimi accompagnava la salma di Gino Fano nel breve viaggio da Verona, ove egli si era spento il mattino dell'8, alla città natale di Mantova, attraverso una regione ricca di ricordi della storia del nostro Risorgimento, storia e regione che a Fano erano sempre stati così famigliari. Né, durante il triste viaggio, in quel riandare col pensiero alle ultime cose viste e udite da chi non è più, potevo non rivedere Fano, come lo avevo visto una ventina di giorni prima, additarmi da lontano, dal porticciuolo di San Vigilio sul lago di Garda, l'alta torre di San Martino della Battaglia.

Ancora ben vegeto nonostante l'età, un po' riluttante ai riguardi che l'insistenza amorevole di quella che è stata la sua compagna affettuosa e inseparabile per quarant'anni gli faceva poi accettare, egli aveva vissuto in modo pieno la sua vita, si può ben dire sino all'ultimo. E ben lo sa questa Accademia che, sebbene non abbia più potuto ascoltare dalla sua voce la commemorazione del Presidente Castelnuovo, la conobbe tuttavia – letta nella seduta del 13 dicembre dal socio Amaldi –, la conobbe quale egli era venuto amorosamente preparandola durante gli ultimi mesi di vita. Mesi di lavoro, di riflessione, di raccoglimento, nei quali era tornato con rinnovata passione allo studio dell'opera di colui che gli era stato maestro ed amico; aveva rivissuto gli anni trascorsi con lui – a Roma, ma prima ancora a Torino, in quella Torino dove verso il 1890, nel momento saliente per la formazione geometrica di Fano, Corrado Segre e Guido Castelnuovo aprivano nuove vie alle indagini geometriche –; e come sfondo alla rievocazione, in un quadro più ampio, si era indugiato col pensiero sulle scuole che negli ultimi decenni del secolo scorso avevano determinato il rifiorire degli studi geometrici in Italia, e sugli uomini, in primo luogo Luigi Cremona, dai quali esse presero il nome.

Questi uomini Fano ebbe la ventura di avvicinare, in primo luogo ancora il Cremona. Con un momento essenziale dell'opera di Cremona si riallacceranno in modo specifico varie ricerche di Fano tra cui quelle, conchiuse in anni recenti, sulle trasformazioni birazionali di contatto: uno dei molteplici indizi della continuità del pensiero geometrico italiano, pensiero

(*) Nella seduta del 9 maggio 1953.

e continuità nei quali egli seppe inserirsi. Coloro che sanno quale profonda coscienza Fano avesse di quella continuità, e quale valore le attribuisse, sentono che questo è forse il riconoscimento che più gli sarebbe caro se Egli fosse ancora fra noi.

Gino Fano nacque a Mantova il 5 gennaio 1871, unico figlio maschio di Ugo e di Angelica Fano: delle sue quattro sorelle, tutte nate dopo di lui, tre sono viventi. Il padre fu volontario garibaldino, e prese parte alla campagna del Trentino del 1866. Frequentate a Mantova le prime classi ginnasiali, Fano entrò al Collegio militare di Milano, dove rimase quattro anni, completandovi il corso. Dopo un brevissimo passaggio per l'Accademia militare di Torino, presa a Mantova la licenza dell'Istituto tecnico nel 1888, si iscrisse nello stesso anno all'Università di Torino come allievo ingegnere. Castelnuovo, che in qualità di assistente svolgeva allora le esercitazioni, ebbe campo di notarlo: lo stesso Fano, nella sua commemorazione lincea di Castelnuovo, ricordò che questi – proprio nella prima lezione – lo aveva chiamato alla lavagna per ripetizione ed esercizi. Che Fano abbia ben presto lasciato gli studi di ingegneria per la matematica è confermato da un appunto di Corrado Segre conservato nell'Università di Torino, secondo il quale già nello stesso anno 1888–89 Fano figura tra gli iscritti per la scuola di magistero nella geometria (e naturalmente vi figura con la migliore votazione). L'incontro con Corrado Segre e con Castelnuovo fu decisivo per l'orientamento di Fano, il quale tra l'altro ebbe la ventura di assistere nel 1890–91 al corso di geometria superiore svolto da Corrado Segre, corso destinato ad avere una notevole risonanza nell'evoluzione della geometria algebrica: era il primo corso di Segre sulla geometria su un ente algebrico. Ancora studente, raccogliendo un invito formulato dallo stesso Corrado Segre, Fano redigeva la sua prima Memoria, intesa ad assegnare un sistema di postulati per la geometria proiettiva iperspaziale: Memoria notevole non tanto per il suo scopo iniziale, dato che nel frattempo anche l'Amodeo aveva pubblicato una ricerca analoga, quanto per la parte che vi hanno certe geometrie finite, riprese poi vari anni dopo da Veblen e da altri, tra i quali lo stesso Fano, e per la formulazione di certi postulati che rivelano la loro importanza quando si sviluppa la parte della geometria che si fonda sulle sole nozioni di appartenenza.

Già due anni prima, nel 1890, e ancora per incitamento di Corrado Segre, Fano aveva pubblicato la traduzione italiana del celebre Programma di Erlangen di Felix Klein, le *Considerazioni comparative su ricerche geometriche recenti*. Il Programma risale alla fine del 1872: la traduzione di Fano, presto seguita da altre in francese, in inglese, in polacco, segna l'inizio di una più vasta diffusione di quello scritto: « lavoro di piccola mole » – così si esprimeva anni dopo lo stesso Fano – « ma d'importanza direi filosofica, perché inteso a coordinare da un unico punto di vista le varie branche della geometria ». In questa traduzione giovanile si può anche cogliere il momento del suo primo avvicinamento a Klein, che doveva essere foriero di successivi sviluppi.

Fano terminò gli studi universitari nel 1892: la sua dissertazione di laurea diede luogo ad un'ampia Memoria di geometria iperspaziale, che rivela il duplice influsso di Corrado Segre e di Castelnuovo. Quest'ultimo aveva studiato le curve iperspaziali che, per un dato ordine, realizzano il valore massimo del genere: Fano analizza l'ipotesi di valori del genere minori del massimo.

Dopo essere stato per un anno assistente di Enrico D'Ovidio (egli succedeva così a Castelnuovo, ormai professore all'Università di Roma), nell'anno successivo Fano si reca presso Klein a Gottinga: periodo anche questo fecondo per gli sviluppi della preesistente sua formazione geometrica. Più che la spinta verso determinati ordini di ricerca, sebbene anche questa vi sia stata, più che il rafforzamento della convinzione dell'importanza delle concezioni gruppali, e anche questo ebbe la sua parte, credo che il contatto con Klein abbia sopratutto determinato in Fano il pieno maturarsi di certi modi di pensare già appresi alla scuola dei Maestri italiani: anzitutto la tendenza alla valorizzazione di quei procedimenti di scoperta che si sogliono sintetizzare col termine alquanto vago di intuizione, intuizione certamente elaborata, ma pur sempre intuizione. Anche direi che i procedimenti sperimentali che in Klein derivavano dal fascino esercitato su di lui dalla fisica, hanno avuto qualche riflesso su Fano. Finalmente, per quanto riguarda l'ideale dell'insegnamento, la tendenza, visibilissima in Fano, e da lui anche in qualche momento codificata, a mettere in tutta luce la ricchezza ed i vari aspetti di un argomento, e sopratutto a mantenere attiva quell'elasticità e quella freschezza della mente, senza le quali, anche nella scienza, non vi è possibilità di successo, anche questa tendenza in parte risale a Klein.

Del resto durante la sua permanenza a Gottinga Fano non solo ha ricevuto, ma ha dato. Con le sue conferenze alla Mathematische Gesellschaft, in cui riferiva sui lavori recenti dei matematici italiani, iniziava sin d'allora quell'opera di diffusione della cultura geometrica italiana, che ha poi ripreso, a lunghi intervalli, in tempi e paesi diversi. In quel primo momento – è da tener presente quanto allora fossero infrequenti i contatti scientifici internazionali diventati oggi abituali – Fano svolse in questo senso un'opera che potrebbe dirsi di pioniere. Quanto poi egli sia stato apprezzato a Gottinga emerge dal fatto che pochi anni dopo, nel 1899, il Klein, desiderando per quell'università un professore che fosse un vero geometra, si rivolse appunto a lui per offrirgli una cattedra.

Ritornato in Italia dopo due semestri, nel 1894, Fano venne a Roma come assistente di Castelnuovo, e fu così a contatto anche col Cremona. Nel 1899, in seguito a concorso, andò a Messina come straordinario per l'algebra e la geometria analitica, per passare nel 1901 a Torino, ancora in seguito a concorso, come professore di geometria proiettiva e descrittiva. Fano amava ricordare che Castelnuovo era stato relatore per due passi importanti della sua carriera: in questo concorso, e già prima, nel 1895, alla Facoltà di Scienze di Roma, secondo le norme allora vigenti, per la libera docenza.

A Torino Fano restò fino al 1938, quando cessò il suo insegnamento. Fra il 1940 ed il 1946 risiedette in Svizzera, e, a partire dal 1946, alterna-

tivamente in Italia e negli Stati Uniti, dove vivono i suoi figli, Ugo, al National Bureau of Standards, e Roberto, professore al M.I.T. di Boston.

I campi di ricerca nei quali si è svolta l'attività di Fano nel periodo fortunatamente lungo della sua operosità sono senza dubbio molteplici, ed in qualche modo riflettono il succedersi delle correnti geometriche. Queste coesistono spesso nella sua produzione, dove ad esempio nelle poderose indagini sulle varietà a tre dimensioni, che appartengono schiettamente all'indirizzo birazionale, riecheggiano motivi proiettivi: al loro richiamo, del resto, Fano è sempre stato sensibile.

Nel primo periodo lo vediamo portare in modo sistematico nella geometria della retta, e più precisamente nello studio delle congruenze algebriche, le vedute derivanti dall'interpretazione sulla quadrica di Klein. Su questa base Fano ha potuto costruire la teoria generale delle congruenze del terz'ordine, aggiungendo tutto un nuovo importante capitolo a quello sulle congruenze del secondo ordine, quale era stato creato da Kummer e da Sturm.

Un insieme cospicuo di ricerche, ancora del primo periodo, verte sulla teoria dei gruppi continui. Alla scarsa attenzione che in un primo tempo il mondo matematico aveva prestato alle profonde ed innovatrici vedute di Sophus Lie, e che tanto aveva amareggiato il geniale matematico norvegese, erano succeduti un crescente interesse ed una grande notorietà. Era uscito nel 1893 il terzo volume della sua monumentale *Theorie der Trasformationsgruppen*, e nello stesso anno Enriques aveva innestato su quella teoria una veduta più geometrica, sia come posizione del problema, sia come procedimento risolutivo. Enriques aveva determinato i gruppi continui finiti di quelle trasformazioni piane, che, in omaggio al geometra italiano che ne aveva costruito la teoria, si dicono cremoniane. Fano entra tosto in questo ordine di idee, ma con procedimenti propri, ritrova per altra via il risultato di Enriques, mette in relazione i gruppi cremoniani di uno spazio qualunque con le varietà possedenti gruppi di omografie in sé, e determina casi nuovi di queste varietà (in particolare tutte le forme di S_4 nel caso di gruppi sia non integrabili sia integrabili), andando assai al di là di quelli studiati da Lie. Poi trova, in collaborazione con Enriques, i tipi birazionalmente distinti di gruppi continui finiti cremoniani dello spazio, e successivamente li sottopone ad un'analisi minuta per approfondire la classificazione, per assegnare le trasformazioni infinitesime, per liberare la trattazione da riferimenti a sviluppi piuttosto complessi di Lie, per istituire i raffronti fra la nuova teoria e quella dei gruppi di trasformazioni puntuali. È questo un insieme di lavori poderoso, al quale resta certamente legato il nome di Fano.

All'ordine di idee di queste ricerche Fano fu forse anche condotto da quelle, intraprese sotto l'influsso di Klein, sulle equazioni differenziali lineari fra le cui soluzioni intercedono relazioni algebriche: in questi studi, che per le equazioni del terz'ordine erano stati iniziati da Fuchs, Fano, alla luce di vedute geometriche, mostra il profitto che si può trarre dall'ipotesi ai fini dell'integrazione, o della riduzione del problema ad altro più semplice.

Ma i problemi che hanno costituito il nucleo centrale dell'attività di Fano, e che lo hanno occupato e preoccupato durante circa quarant'anni, sia pure ad intervalli, sono quelli delle varietà algebriche a tre dimensioni: ardui problemi nei quali, durante l'ultimo periodo della sua vita, egli ha avuto la soddisfazione – anche per quello che era stato il suo problema iniziale, e che si era dimostrato il più refrattario – di giungere a risultati conclusivi. La loro importanza non si esaurisce però in questi, essa pervade tutte le tappe intermedie.

Sistemata ormai in modo si può dire definitivo la geometria su una curva algebrica, collocata su salde basi quella su una superficie, ben poco era noto sulle varietà algebriche a tre dimensioni. Ancora oggi, come è stato detto anche recentemente, una teoria generale di queste varietà appare un obbiettivo assai lontano, sebbene i fondamenti ne siano stati posti da Severi sin dal 1908. Fano si è messo per una via affatto diversa, affrontando il problema per così dire dal basso. Esclusi casi triviali, si presentava in modo enigmatico già la prima di queste varietà, la forma cubica dello spazio a quattro dimensioni, col problema fondamentale che essa pone: è razionale o no? Il problema, menzionato incidentalmente da Corrado Segre fin dal 1887, probabilmente preesisteva, ma né prima né poi nessuno aveva potuto andare al di là della formulazione: appunto la risposta, in senso negativo, è stata dato da Fano pochi anni or sono. In un primo tempo, soltanto le proprietà proiettive di quella forma lo interessano, con le superficie che essa contiene, col sistema delle sue rette, con gli spazi pluritangenti. Ma ben presto hanno il sopravvento i problemi di razionalità, e Fano dimostra la irrazionalità non ancora di quella, ma di altre due varietà, aventi esse pure i generi e plurigeneri nulli. Fondandosi su questo risultato, Enriques, poco dopo, doveva concludere l'esistenza di involuzioni spaziali irrazionali. Le conclusioni sia di Fano sia di Enriques erano dunque in antitesi con due brillanti risultati ottenuti da Castelnuovo per le superficie; e questo torna ad onore sia di Castelnuovo che di fatto aveva raggiunti i limiti del possibile, sia di Fano e di Enriques, che hanno dimostrato che oltre quei limiti non si poteva andare.

Ora appunto quelle due varietà hanno offerto a Fano la via da seguire, in quanto esse sono (per $p = 3,4$) tra i primi esemplari di una successione, le varietà a tre dimensioni a curve sezioni canoniche di genere p, le quali – coi sistemi lineari di superficie di generi uno in esse contenuti – offrivano un appiglio ai problemi di razionalità. L'idea si mostrò più efficace di quella, inizialmente seguita da Fano, della ricerca dei sistemi omaloidici. Fano, in lunghe tappe successive, è riuscito a debellare, le une dopo le altre, le varietà della successione, a stabilire i valori di p per i quali esse esistono, quali di esse sono razionali e quali no, e quali fra le irrazionali sono birazionalmente distinte, restringendo sempre più il numero dei casi dubbi. Finalmente hanno capitolato anche gli ultimi tre, relativi ai valori 5, 6, 8 del genere p, che – per varietà contenenti solo superficie intersezioni complete con forme dello spazio ambiente – si sono rivelati irrazionali, e con essi la forma cubica dello S_4,

in quanto si riconduce birazionalmente ad uno di essi. Il lavoro finale è uscito solo nel 1947, ma era pronto fin dal 1942: esso è stato annunciato con note preventive all'Accademia pontificia nel 1943 ed a questa Accademia nel 1946.

L'importanza fondamentale di queste ricerche non è sostanzialmente intaccata dalla riserva, di carattere critico, che in esse interviene un'ipotesi di lavoro – che cioè certi punti e linee non possano cadere infinitamente vicini tra loro – alla quale pare molto arduo rinunciare. E anche se nell'avvenire sarà possibile farlo, resta il fatto che quanto sappiamo in materia è in gran parte dovuto a Fano.

Non è qui possibile dire di tanti altri apporti di Fano alla teoria delle curve, superficie, varietà algebriche, per esempio delle classi algebricamente particolari di superficie da lui studiate.

Solo ricorderò la sua determinazione delle superficie a sezioni collineari nella quale inizialmente si incontrò con Fubini (ed il raffronto è istruttivo per vedere come mentalità diverse possano riflettersi in modi del tutto diversi di attaccare uno stesso problema). Quella determinazione costituisce un primo passo verso un problema, ancor oggi aperto, di unificazione di proprietà di varietà speciali.

E anche ricordo l'opera da lui svolta, in momenti vari, sulle trasformazioni birazionali di contatto, che si innesta su teorie classiche di Luigi Cremona e di Sophus Lie: la visione geometrica, sempre desta, di Fano, lo ha portato, dopo la descrizione dei sistemi analoghi alle reti omaloidiche del caso cremoniano, a mettere a profitto una feconda rappresentazione spaziale. Qua pure rimangono aperti problemi, verso i quali l'opera di Fano, protrattasi anche in questo campo sino ad anni recenti, ha spianato la via.

Ho accennato alla visione geometrica di Fano. Sebbene, nei raffronti da lui istituiti in qualche occasione tra il metodo analitico e quello sintetico, egli abbia sempre fatto al primo la dovuta parte, e – in fatto di preferenza – abbia professato un saggio agnosticismo, personalmente, nel modo di pensare e di scoprire, era essenzialmente un sintetico: l'ente geometrico sta sempre per lui in primo piano, ed i procedimenti analitici entrano prevalentemente in giuoco con una funzione di controllo.

Ai controlli in genere attribuiva grande importanza: se mi è permesso per un momento parlare come antico allievo, vorrei dire che anche per questo suo costante insegnamento va al Maestro la riconoscenza degli allievi, che più di una volta, memori del suo suggerimento, hanno saputo ritrarsi in tempo da conclusioni ingannevoli.

Quanto all'uso di procedimenti sperimentali, per quel che se ne può parlare in matematica, egli stesso lo ha così tratteggiato a proposito delle sue ricerche sulle varietà algebriche: esame accurato dei singoli casi, e successiva ricerca intesa a comprendere i risultati singoli in enunciati generali, ed a stabilire questi per via deduttiva. Ma, anche al di là di questo intervento da lui stesso messo in rilievo, quando egli affronta i problemi di razionalità studiando certi sistemi lineari di superficie esistenti su una varietà e raffrontandoli con gli analoghi sistemi delle varietà razionali, pur facendo

opera squisitamente deduttiva, non può non richiamare in qualche modo l'idea dello sperimentatore che saggia le conseguenze di una data ipotesi.

Come professore, Fano lega particolarmente il suo nome all'insegnamento della geometria proiettiva e della descrittiva. Egli salì alla cattedra di geometria proiettiva ancora nell'apogeo del breve periodo in cui durò la fortuna dell'insegnamento di quella materia nei nostri bienni propedeutici. Breve periodo, anche se noi, della generazione che si è formata già nella fase discendente seguìta all'apogeo, ma con quei maestri, ancora imbevuta dello spirito della geometria proiettiva, anche se noi, dicevo, quasi ci si stupisca nel volgerci indietro a constatarlo. Breve periodo, iniziatosi sotto il potente impulso di Luigi Cremona, che volle instaurato l'insegnamento della proiettiva non solo nelle università, nel 1875, ma prima ancora, nel 1871, anche negli istituti tecnici. Il diffondersi dei successi del metodo sintetico, il desiderio di farne dipendere più strettamente la geometria descrittiva, la risonanza delle applicazioni alla statica grafica, avevano creato un ambiente favorevole e destati entusiasmi che, nei riguardi degli allievi ingegneri, pochi decenni dopo dovevano apparire eccessivi. È stata notata un'analogia con l'insegnamento propedeutico dell'algebra: le due materie, introdotte a scopo preparatorio, avevano acquistato uno sviluppo giudicato esagerato, e dovevano essere ricondotte, per gli ingegneri, alla loro parte iniziale. Questo movimento di reazione, determinatosi in un secondo tempo, e concretatosi nei nostri bienni propedeutici con la fusione della geometria proiettiva con l'analitica, fu giudicato favorevolmente da Fano, per ragioni contingenti e anche per evitare che nella mente degli studenti si formassero compartimenti stagni. Ciononostante egli non poteva non prediligere la geometria proiettiva, ed amava ricordare, con Klein, l'effetto potente esercitato sulla formazione dei geometri italiani dal largo sviluppo che aveva avuto l'insegnamento della proiettiva, ed anche il ricordo gradito che molti ingegneri ne avevano serbato. « Ottima ginnastica per la mente », così Fano considerava la geometria proiettiva dal punto di vista formativo, « che offre ai giovani un numero grandissimo di questioni facili e pur interessanti, assai atte a infondere in essi l'amore per la scienza ». E ottima ginnastica per la mente erano proprio le lezioni di proiettiva di Fano, che in esse infondeva tutta la sua abilità di maestro: lezioni togate, preparate in ogni particolare, ma che nella potenza delle argomentazioni, nel loro concatenamento, e nel rilievo dato alle idee fondamentali ritrovavano la più efficace spontaneità.

Non mancava in lui un certo attaccamento alle forme esteriori (parlo di circa mezzo secolo fa, quando ancora non aveva preso piede nelle università la spregiudicatezza novecentesca, quasi in contrasto con l'ambiente piuttosto squallido del vetusto e polveroso palazzo di via Po qual'era in quei tempi.

Vorrei anche ricordare che, nella breve storia della geometria proiettiva all'Università di Torino, Fano fu, oltre al Berzolari al quale succedette, il solo professore titolare: prima l'insegnamento era impartito soltanto da assistenti, anche se uno di questi si è chiamato Corrado Segre.

Più noto è il contenuto delle sue lezioni di geometria descrittiva, da lui insegnata, oltre che all'università, anche alla Scuola d'ingegneria di Torino, fin dal suo sorgere, nel 1908. Il corso assorbiva anche l'altro, prima esistente, di Applicazioni di geometria descrittiva: lasciate cadere quelle che non avevano più ragione di essere, Fano inchiuse le altre, di carattere più concettuale, insieme coi procedimenti generali, nel suo bel volume di Geometria descrittiva: una delle migliori esposizioni che esistano in materia, che ebbe larga fortuna, ed oggi è purtroppo introvabile.

Un bel volume è del pari quello di Geometria non euclidea, pubblicato tra le Monografie del Consiglio Nazionale delle Ricerche, la cui materia si prestava particolarmente alla tendenza di Fano a illuminare un argomento sotto i suoi molteplici aspetti. Un'esposizione d'insieme dello stesso tema, completata con la geometria non archimedea, Fano ha anche redatto per l'Enciclopedia delle matematiche elementari.

Un vero modello è poi il suo articolo della *Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften* sulla contrapposizione delle geometrie sintetica ed analitica nel loro sviluppo storico nel secolo decimonono, dovè si trovano esposte in una magistrale sintesi le principali idee geometriche che ci sono state legate dal secolo passato. Un secondo articolo per la medesima enciclopedia, sui gruppi continui, riprende anche il tema del Programma di Erlangen.

Nel 1923 Fano tenne una ventina di lezioni sulla « geometria italiana » nell'University College of Wales. Molto apprezzate sono state varie sue conferenze tenute tra il 1942 ed il 1944 al Cercle Mathématique de Lausanne, del quale egli era in quel periodo un assiduo. In esse ha ripreso temi a lui cari, tra cui le trasformazioni birazionali di contatto. Fu questa soltanto una delle sue attività universitarie durante il soggiorno in Svizzera, tra il 1940 ed il 1946. Essa si è esplicata principalmente nei corsi organizzati per gli studenti italiani nel campo di concentramento universitario presso l'Università di Losanna, e nel campo di studi universitari di Huttwil: sappiamo che discepoli valorosi di questi corsi sono stati attirati verso gli studi geometrici. In un certo momento Fano ha allora anche insegnato all'École d'Ingénieurs di Losanna, supplendovi il professor Marchand. Fano invero sentì sempre in modo profondo il dovere dell'insegnamento, che per altro si fondeva in lui col piacere d'insegnare. Era il piacere – che non a tutti è dato – col quale eseguiva ciò di cui sentiva il dovere.

Di qui la dedizione di tutto sè stesso, con tutte le sue doti d'intelligenza, di diligenza, di iniziativa, in ogni forma di attività da lui esplicata.

Così quando durante la prima guerra mondiale prestò servizio come segretario del Comitato regionale di mobilitazione industriale per il Piemonte (uno dei sette, poi undici, istituiti in Italia), con tutti i compiti importanti e spesso delicati che questo svolgeva per l'intensificazione della produzione bellica. La fornitura delle materie prime, l'eliminazione delle controversie fra industriali e maestranze, la giurisdizione militare alla quale era soggetto il personale degli stabilimenti ausiliari, i compiti sociali che ne

derivavano, quale l'opera di persuasione alla rieducazione professionale e la riassunzione dei mutilati e degli invalidi, ponevano problemi nella cui soluzione il generale Caputo, che presiedeva il Comitato, trovò in Fano, come egli diceva, il suo braccio destro.

Così anche nel lungo periodo in cui diresse a Torino l'ottima Scuola operaia serale femminile, sorta in seno all'Unione femminile nazionale per offrire alle lavoratrici corsi vari e la preparazione agli esami delle scuole elementari. Fano si occupava direttamente nel modo più attivo dell'organizzazione e delle ispezioni nelle numerose sezioni ed era popolare tra le operaie per le lezioni che, con fare bonario e paterno, loro impartiva qualche volta la domenica mattina.

Non vi è del resto grado dell'insegnamento del quale egli non si sia interessato. Più di una volta ha fatto sentire la sua voce sui problemi posti dalla istruzione secondaria e dalla preparazione universitaria dei professori medi, considerando le esigenze tecniche di questa preparazione nel quadro più ampio della tradizione scientifica delle nostre Facoltà.

Alla vita della Facoltà alla quale apparteneva Fano ha sempre preso parte nel modo più attivo: in ogni questione il suo parere, dettato da una grande rettitudine, da una lunga esperienza, da una perfetta informazione era ascoltato con la massima deferenza.

Fano era Socio Nazionale di questa Accademia e dell'Accademia delle Scienze di Torino, Socio dell'Istituto Lombardo di Scienze e Lettere, della Accademia Virgiliana di Mantova e dell'Accademia Peloritana, medaglia d'oro dei benemeriti della Pubblica Istruzione.

Fu uomo di cultura varia. Conosceva a fondo la storia politica dell'Italia, in specie dal Risorgimento in poi. Aiutato anche da una memoria formidabile, sapeva all'occasione citare con la massima esattezza il succedersi degli uomini di governo, l'opera loro, le vicende parlamentari. Anche nella geografia era fonte inesauribile delle notizie più varie. Una sua conferenza tenuta nel giugno 1915 – fortunatamente ce ne rimane il testo – sul confine del Trentino e sulle trattative con la monarchia austro-ungarica protrattesi fino alla primavera di quell'anno attesta, oltre al suo amor di patria e la serena fiducia nel successo delle nostre rivendicazioni, una conoscenza profonda dei luoghi e delle loro vicissitudini nei secoli.

Fano serbava ricordo incancellabile dei suoi maestri (mi pare di riudire la sua voce rotta dal pianto nella rievocazione di Corrado Segre); verso i discepoli si stendeva la sua mano amica. Fu uomo di signorile socievolezza, profondamente amico per gli amici, vicino ad essi nelle ore liete e nelle tristi, pronto a prestarsi per loro in ogni occasione, come quando, durante l'ultima guerra, tentava di ristabilirne i contatti coi famigliari dispersi dal turbine.

Dopo le perdite di Comessatti, di Enriques, di Berzolari, di Castelnuovo, scompare con Fano un altro dei Maestri che hanno tenuto alto il nome della geometria, che hanno portato più innanzi i confini del nostro mondo geometrico, che hanno onorato il pensiero umano ed il nostro Paese.

PUBBLICAZIONI DEL PROF. GINO FANO

Note e Memorie

1. *Considerazioni comparative su ricerche geometriche recenti.* (Trad. italiana del « Programma di Erlangen » di F. KLEIN). « Annali di Matematica » (2), *17*, pp. 307–343 (1890).
2. *Sui postulati fondamentali della geometria proiettiva in uno spazio lineare a un numero qualunque di dimensioni.* « Giornale di Battaglini », *30*, pp. 106–132 (1892).
3. *Studio di alcuni sistemi di rette considerati come superficie dello spazio a cinque dimensioni.* « Annali di Matematica » (2), *21*, pp. 141–192 (1890).
4. *Sopra le curve di dato ordine e dei massimi generi in uno spazio qualunque.* « Mem. R. Acc. Scienze Torino » (2), *44*, pp. 335–382 (1893).
5. *Sulle congruenze di rette del III ordine prive di linea singolare.* « Atti R. Acc. Scienze Torino », *29*, pp. 474–493 (1894).
6. *Sull'insegnamento della matematica nelle Università tedesche e in particolare nell'Università di Gottinga.* « Rivista di Matematica », *4*, pp. 170-188 (1894).
7. *Uno sguardo alla storia della Matematica.* Discorso. « Memorie Acc. Virgiliana » pp. 3–34 (1895).
8. *Contributo alla teoria dei numeri algebrici, osservazioni varie e parte IX del Formulario.* « Rivista di Matematica », *5*, pp. 1–10 (1895).
9. *Sopra alcune considerazioni geometriche che si collegano alla teoria delle equazioni differenziali lineari.* « Rend. Acc. Lincei » (5), *4*, pp. 18–25 (1895).
10. *Sopra certe curve razionali di uno spazio qualunque, e sopra certe equazioni differenziali lineari, che con queste curve si possono rappresentare.* « Ibid. », pp. 51–57 (1895).
11. *Sulle equazioni differenziali lineari del IV ordine, che definiscono curve contenute in superficie algebriche.* « Ibid. », pp. 232–239 (1895).
12. *Ancora sulle equazioni differenziali lineari del IV ordine, che definiscono curve contenute in superficie algebriche.* « Ibid. », pp. 292–300 (1895).
13. *Sulle equazioni differenziali lineari di ordine qualunque che definiscono curve contenute in superficie algebriche.* « Ibid. », pp. 322–330 (1895).
14. *Sui postulati fondamentali della geometria proiettiva.* (Due lettere al prof. Enriques). « Rend. Palermo », *9*, pp. 79–82 e 84–85 (1895).
15. *Sulle superficie algebriche con infinite trasformazioni proiettive in se stesse.* « Rend. Acc. Lincei » (5), *4*, pp. 149–156 (1895).
16. *Ueber endliche Gruppen linearer Transformationen einer Veränderlichen.* « Monatsh. f. Math. », *7*, pp. 297–320 (1896).
17. *Sulle varietà algebriche con un gruppo continuo non integrabile di trasformazioni proiettive in sé.* « Mem. R. Acc. Scienze Torino » (2), *46*, pp. 187–218 (1896).
18. *Sulle varietà algebriche dello spazio a quattro dimensioni con un gruppo continuo integrabile di trasformazioni proiettive in sé.* « Atti Ist. Veneto » (7), *7*, pp. 1069 1103 (1896).
19. *Aggiunta alla Nota: Sulle congruenze di rette del terzo ordine prive di linea singolare.* « Atti R. Acc. Scienze Torino », *31*, pp. 708–715 (1896).
20. *Sulle superficie algebriche con un gruppo continuo transitivo di trasformazioni proiettive in sé.* « Rend. Palermo », *10*, pp. 1–15 (1896).
21. *Sui gruppi continui di trasformazioni cremoniane del piano e sopra certi gruppi di trasformazioni proiettive.* « Ibid. », pp. 16–29 (1896).
22. *Un teorema sulle superficie algebriche con infinite trasformazioni proiettive in sé.* « Rend. Palermo », *11*, pp. 241–246 (1897).
23. *Sui gruppi continui di trasformazioni cremoniane dello spazio.* (In collaborazione con F. ENRIQUES). « Annali di Matematica » (2), *26*, pp. 59–98 (1897).

24. *Ueber Gruppen, insbesondere continuierliche Gruppen von Cremona–Transformationen der Ebene und des Raumes.* «Monatsh. f. Math.» *9*, pp. 17–29 (1897).
25. *c. s.* «Verh. des ersten intern. Math. Congr.», pp. 254–255 (1897).
26. *I gruppi di Jonquières generalizzati.* «Mem. R. Acc. Scienze Torino» (2), *48*, pp. 221–278 (1898).
27. *Sopra alcuni gruppi continui imprimitivi di trasformazioni puntuali dello spazio.* «Rend. Acc. Lincei» (5), *7*, pp. 302–308 (1898).
28. *Le trasformazioni infinitesime dei gruppi cremoniani tipici dello spazio.* «Ibid.», pp. 332–340 (1898).
29. *I gruppi continui primitivi di trasformazioni cremoniane dello spazio.* «Atti R. Acc. Scienze Torino», *33*, pp. 480–505 (1898).
30. *Sulle equazioni differenziali lineari che appartengono alla stessa specie delle loro aggiunte.* «Atti R. Acc. Scienze Torino», *34*, pp. 260–281 (1899).
31. *Osservazioni sopra alcune equazioni differenziali lineari.* «Rend. Acc. Lincei» (5), *8*, pp. 285–291 (1899).
32. *Sulle equazioni differenziali lineari del V ordine, le cui curve integrali sono contenute in varietà algebriche.* «Rend. Ist. Lomb.» (2), *32*, pp. 843–866 (1899).
33. *Sulle equazioni differenziali lineari del V e del VI ordine, le cui curve integrali sono contenute in una quadrica.* «Atti R. Acc. Scienze Torino», *34*, pp. 285–315 (1899).
34. *Un teorema sulle varietà algebriche a tre dimensioni con infinite trasformazioni proiettive in sé.* «Rend. Acc. Lincei» (5), *8*, pp. 562–565 (1899).
35. *Recensione dell'Opera di W. Killing*: «*Einführung in die Grundlagen der Geometrie*». «Boll. di bibl. e st. della Matem.» (1899).
36. *Ueber lineare homogene Differentialgleichungen mit algebraischen Relationen zwischen den Fundamentallösungen.* «Math. Ann.», *53*, pp. 493–590 (1900).
37. *Nuove ricerche sulle congruenze di rette del III ordine prive di linea singolare.* «Mem. R. Acc. Scienze Torino» (2), *51*, pp. 1–79 (1901).
38. *Sopra alcune particolari congruenze di rette del III ordine.* «Atti R. Acc. Scienze Torino», *36*, pp. 366–379 (1901).
39. *Sui modi di calcolare la torsione di una linea geodetica sopra una superficie qualunque.* «Atti R. Acc. Peloritana», *16*, pp. 198–199 (1901).
40. *Le congruenze di rette del III ordine composte di tangenti principali di una superficie.* «Atti R. Acc. Scienze Torino», *37*, pp. 501–519 (1901).
41. *Sulle superficie algebriche contenute in una varietà cubica dello spazio a quattro dimensioni.* «Atti R. Acc. Scienze Torino», *39*, pp. 597–613 (1904).
42. *Sul sistema* ∞^2 *di rette contenuto in una varietà cubica generale dello spazio a quattro dimensioni.* «Ibid.», pp. 778–792 (1904).
43. *Ricerche sulla varietà cubica generale dello spazio a quattro dimensioni e sopra i suoi spazi pluritangenti.* «Annali di Matematica» (3), *10*, pp. 251–285 (1904).
44. *Sopra una varietà cubica particolare dello spazio a quattro dimensioni.* «Rend. Ist. Lomb.» (2), *37*, pp. 554–566 (1904).
45. *Sul sistema* ∞^3 *di rette contenuto in una quadrica dello spazio a quattro dimensioni.* «Giorn. di Battaglini» (*43*) [(2), 12], pp. 1–5 (1905).
46. *Un po' di matematica per i non matematici. Geometria descrittiva. Calcolo infinitesimale.* «Rivista d'Italia» (1905).
47. *Sopra alcune superficie del IV ordine rappresentabili sul piano doppio.* «Rend. Ist. Lomb.» (2), *39*, pp. 1071–1086 (1906).
48. *Gegenstz von synthetischer und analytischer Geometrie in seiner historischen Entwicklung im XIX Jahrhundert.* «Enzyklop. d. math. Wissensch.», *3*, pp. 221–288 (1907).
49. *Kontinuierliche geometrische Gruppen. Die Gruppentheorie als geometrisches Einteilungsprinzip.* «Ibid.», pp. 289–388 (1907).
50. *La geometria non euclidea.* «Scientia», *4*, 26 pp. (1908).
51. *Sopra alcune varietà algebriche a tre dimensioni aventi tutti i generi nulli.* «Atti R. Acc. Scienze Torino», *43*, pp. 973–984 (1908).

52. *Sulle varietà algebriche che sono intersezioni complete di più forme.* « Atti R. Acc. Scienze Torino », *44*, pp. 633–648 (1909).
53. *Sui fondamenti della geometria.* Conf. alla sezione torinese della Società "Mathesis". « Boll. della "Mathesis" », *2*, pp. 119–127 (1910).
54. *Superficie algebriche di genere zero e bigenere uno, e loro casi particolari.* « Rend. Palermo », *29*, pp. 98–118 (1910).
55. *A proposito dell'apparecchio elicoidale per volte oblique.* « Rend. Ist. Lomb. » (2), *43* pp. 177–179 (1910).
56. *Matematica esatta e matematica approssimata.* « Boll. della "Mathesis" », *3*, pp. 106–126 (1911).
57. *La filosofia contro la scienza.* Lettera ad A. Loria. « Nuova Antologia » (1914).
58. *Osservazioni sopra alcune varietà non razionali aventi tutti i generi nulli.* « Atti R. Acc. Scienze Torino », *50*, pp. 1067–1072 (1915).
59. *Sulle varietà algebriche a tre dimensioni a superficie-sezioni razionali.* « Annali di Matematica » (3), *24*, pp. 49–88 (1915).
60. *Osservazioni sopra il sistema aggiunto puro di un sistema lineare di curve piane.* « Rend. Palermo », *40*, pp. 29–32 (1915).
61. *Sui fondamenti della geometria.* Conf. tenuta al Circolo Filosofico di Torino. « Rivista di Filosofia » (1915).
62. *Il confine del Trentino e le trattative dello scorso aprile con la Monarchia Austro-Ungarica.* Conf. tenuta alla Società di Cultura di Torino. « Conferenze e Prolusioni » (1915).
63. *Sulle varietà algebriche a tre dimensioni a superficie-sezioni razionali.* « Scritti matematici offerti ad E. d'Ovidio », pp. 342–363, Torino (1918).
64. *L'opera del Comitato Regionale di Mobilitazione Industriale per il Piemonte* (settembre 1915–marzo 1919) (1919).
65. *Superficie del IV ordine con gruppi infiniti discontinui di trasformazioni birazionali*, 5 note. « Rend. Acc. Lincei » (5), 29_1, pp. 408–415, 485–491 (5), 29_2, pp. 113–118, 175–182, 231–236 (1920).
66. *A proposito di un articolo del giornale "La Sera".* « Boll. della "Mathesis" », pp. 128–131 (1920).
67. *Le Scuole di Magistero.* Relazione al Congresso della Società Italiana "Mathesis". « Period. di Matem. » (4), *2*, pp. 102–110 (1921).
68. *Sur la congruence des normales à une quadrique.* « Comptes rendus Ac. Sciences », *176*, pp. 1866–1868 (1922).
69. *Vedute matematiche su fenomeni e leggi naturali.* Discorso letto nella R. Università di Torino per l'inaugurazione dell'anno accademico 1922–23.
70. *A preface to a series of special lectures on Italian Geometry, and 2 general lectures. Intuition in mathematics. All geometry is theory of Relativity.* University College of Wales, Aberystwyth (1923).
71. *Sulle forme binarie per le quali una delle spinte su sè stesse sia identicamente nulla.* « Giornale di Battaglini », *62*, pp. 91–98 (1924).
72. *I gruppi di trasformazioni nella geometria.* « Scientia », *36*, pp. 145–154 (1924).
73. *L'analysis situs* I, II. « Scientia », *36*, pp. 217–230, 289–300 (1924).
74. *Intenti, carattere, valore formativo della matematica.* Conf. tenuta al Circolo di Cultura della Scuola di Guerra. « Alere Flammam » (1924).
75. *Corrado Segre.* Cenno cronologico. « Annuario R. Università di Torino », 12 pp. (1924).
76. *Sulle superficie dello spazio* S_3 *a sezioni piane collineari.* « Rend. Acc. Lincei » (6), *1*, pp. 473–477 (1925).
77. *Sulle superficie di uno spazio qualunque a sezioni iperpiane collineari.* « Mem. Acc. Lincei » (6), *2*, pp. 115–129 (1926).
78. *Sulle superficie di uno spazio qualunque a sezioni omografiche.* « Boll. U.M.I. », *5*, pp. 164–167 (1926).
79. *La varietà delle forme binarie del VII ordine a sesta spinta identicamente nulla.* « Rend. Acc. Lincei » (6), *4*, pp. 161–166 (1926).

80. *Les cycles de la géométrie non euclidienne au point de vue projectif*. « In mem. Lobatschevskii », *2*, pp. 17–24, Kazan (1926).
81. *Onoranze a Corrado Segre, discorso commemorativo*. Suppl. ai Rend. del Circolo mat. di Palermo, vol. XV, 1926-27.
82. *Trasformazioni di contatto birazionali del piano*. « Rend. Acc. Lincei » (6), *8*, pp. 445-451 (1928).
83. *Sulla rappresentazione di S. Lie degli elementi lineari del piano sopra lo spazio punteggiato*. « Ibid. », pp. 529–534 (1928).
84. *Congruenze* R_0 *di curve razionali e trasformazioni cremoniane inerenti a un complesso lineare* « Ibid. », pp. 623–627 (1928).
85. *Trasformazioni di contatto birazionali del piano*. « Atti Congresso Bologna », *4*, pp. 35–42 (1928).
86. *Sulle varietà algebriche a tre dimensioni aventi tutti i generi nulli*. « Ibid. », pp. 115–121 (1928).
87. *Un esempio di trasformazione birazionale cubica inerente a un complesso lineare*. « Rend. Acc. Lincei » (6), *9*, pp. 16–19 (1928).
88. *Sulle curve algebriche contenenti serie autoresidue rispetto alla serie canonica*. « Rend. Ist. Lomb. » (2) *63*, pp. 949–967 (1900).
89. *Reti di complessi lineari dello spazio* S_5 *aventi una rigata assegnata di rette-centri*. « Rend. Acc. Lincei » (6), *11*, pp. 227–232 (1930).
90. *Sulle sezioni spaziali della varietà grassmanniana delle rette dello spazio a cinque dimensioni*. « Ibid. », pp. 329–335 (1930).
91. *Osservazioni sopra una nota del prof. H. F. Baker*. « Rend. Ist. Lomb. » (2), *65*, pp. 93–96 (1930).
92. *Trasformazioni birazionali sulle varietà algebriche a tre dimensioni di generi nulli*. « Rend. Acc. Lincei » (6), *15*, pp. 3–5 (1932).
93. *Spazi di Riemann e geometrie riemanniane. Loro generalizzazioni*. « Conf. fis. matem. Univer. e Polit. di Torino », pp. 17–60 (1931–1932).
94. Voce « *Geometria* », parte moderna del sec. XVII in poi dell'Enciclopedia Italiana (1932).
95. *Prof. Enrico d'Ovidio*. « Annuario della R. Università di Torino », 9 pp. (1933).
96. *Enrico d'Ovidio*. « Boll. U.M.I. », *12*, pp. 153–156 (1934).
97. *Scorrendo il volume di F. Klein*: « *Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik im XIX Jahrhundert* ». « Conferenze fis. mat. Univ. e Polit. di Torino », pp. 151–171 (1934).
98. *A proposito della nota del prof. Majorana*: "*Sull'insegnamento della fisica in Italia*". « Nuovo Cimento », anno 12, pp. 49–51 (1935).
99. *Superficie algebriche e varietà a tre dimensioni a curve sezioni canoniche*. « Rend. Acc. Lincei » (6), *23*, pp. 813–818 (1936).
100. *Su alcune varietà algebriche a tre dimensioni aventi curve sezioni canoniche*. « Scritti mat. offerti a L. Berzolari », pp. 329–349, Pavia (1936).
101. *A proposito di un lavoro del sig. Ramamurti* (Sulle rigate razionali normali). « Atti R. Acc. Scienze Torino », *71*, pp. 105–109 (1936).
102. *Osservazioni su alcune « geometrie finite »* I, II. « Rend. Acc. Lincei » (6), *26*, pp. 55-60, 129–134 (1937).
103. *Sulle varietà algebriche a tre dimensioni a curve sezioni canoniche*. « Mem. Acc. It. », *8*, pp. 23–64 (1937).
104. *Sulle varietà algebriche a tre dimensioni a curve sezioni canoniche*. « Atti I Congr. U.M.I. Firenze », pp. 245–250 (1937).
105. *Sulle varietà algebriche a tre dimensioni le cui sezioni iperpiane sono superficie di genere zero e bigenere uno*. « Mem. Soc. It. d. Scienze (detta dei XL) » (3), *24*, pp. 41–66 (1938).
106. *Geometrie non euclidee e non archimedee*. « Enciclopedia delle Matematiche elementari », vol. II, parte, II, pp. 435–511 (1938).
107. *Quelques remarques à propos d'une note de M. Amin Vasin*. « Comptes rendus Acad. Sciences », Paris 210, pp. 284–285 (1940).

108. *Sulle curve ovunque tangenti a una quintica piana generale.* «Comment. Math. Helv.», *12*, pp. 172–190 (1940).
109. *Su alcune particolari reti di quadriche dello spazio ordinario.* « Revista Univ. Nac. Tucumán », A. *1*, pp. 271–281 (1940).
110. *Sui cerchi ortogonali a due cerchi dati.* « Revista Univ. Nac. Tucumán » A. *2*, pp. 87-94 (1941).
111. *Osservazioni sulla rappresentazione di corrispondenze birazionali tra varietà algebriche.* «Comment. Math. Helv.», *14*, pp. 193–201 (1942).
112. *Su alcune varietà algebriche a tre dimensioni razionali, e aventi curve-sezioni canoniche.* « Ibid.», pp. 202–211.
113. *Sulle forme cubiche dello spazio a cinque dimensioni contenenti rigate razionali del IV ordine.* «Comment. Math. Helv.», *15*, pp. 71–80 (1943).
114. *Superficie del IV ordine contenenti una rete di curve di genere 2.* «Comment. Pont. Acad. Sci.», *7*, pp. 185–205 (1943).
115. *Alcune questioni sulla forma cubica dello spazio a cinque dimensioni.* «Comment. Math. Helv.», *16*, pp. 274–283 (1944).
116. *Osservazioni varie sulle superficie regolari di genere zero e bigenere uno.* « Revista Univ. Nac. Tucumán », A. *4*, pp. 69–79 (1944).
117. *Nuove ricerche sulle varietà algebriche a tre dimensioni a curve-sezioni canoniche.* « Acta Pontif. Acad. Scient.», *9*, pp. 163–167 (1945).
118. *Sulla forma cubica generale dello spazio a quattro dimensioni.* « Rend. Acc. Lincei » (8), *1*, pp. 463–466 (1946).
119. *Le trasformazioni di contatto birazionali del piano.* «Comment. Math. Helv.», *20*, pp. 181–215 (1947).
120. *Su alcuni lavori di W. L. Edge.* « Rend. Acc. Lincei » (8), *3*, pp. 179–185 (1947).
121. *Nuove ricerche sulle varietà algebriche a tre dimensioni a curve-sezioni canoniche.* «Comment. Pont. Acad. Sci.», *11*, pp. 635–720 (1948).
122. *Su una particolare varietà a tre dimensioni a curve-sezioni canoniche.* « Rend. Acc. Lincei » (8) *6*, pp. 151–156 (1949).
123. *Irrazionalità della forma cubica generale dello spazio a quattro dimensioni.* Conf. « Rend. Seminario Matematico Università e Politecnico di Torino», *9*, pp. 21–32 (1950).
124. *Chiarimenti sopra particolari superficie aventi tutti i generi eguali all'unità.* « Atti. Acc. Scienze Torino », *84*, pp. 94–96 (1950).

Volumi.

I. *Lezioni di geometria della retta.* Litog., p. 151, Roma (1896).
II. *Lezioni di geometria non euclidea.* Litog., p. 271, Roma (1898).
III. *Lezioni di geometria descrittiva.* Litog., p. 834, fig. 167 + 107, Torino (1903).
IV. *Geometria proiettiva.* Lezioni raccolte da D. PASTORE ed E. PONZANO, 2 voll., Litog., pp. 356 + 416, fig. 140 + 181, Torino (1907).
V. *Lezioni di geometria descrittiva* date nel R. Politecnico di Torino. Torino, G. B. Paravia, pp. XIX–426, fig. 398 (1909).
II ed. 1914.
III ed. 1926, queste due con varie ristampe.
VI. *Lezioni di geometria analitica e proiettiva.* Litog., pp. 3–392, fig. 242, Torino (1926).
VII *Lezioni di geometria analitica e proiettiva* (in collaborazione con A. TERRACINI). Torino, G. B. Paravia, pp. VIII–630, fig. 211 (1930).
II ed. 1940.
III ed. 1948.
VIII. *Geometria non euclidea.* (Introduzione geometrica alla teoria della relatività). Bologna Zanichelli. «Monografie di Matematica applicata», pp. 250, fig. 68 (1935).
IX *Complementi di geometria.* Litog. G.U.F., p. 246, Torino (1935).
X. *Nozioni sommarie di geometria sulle curve e superficie algebriche.* Litog., Gheroni, p. 39. Torino (1950).

PERSONALE ACCADEMICO

Prende la parola il Socio Alessandro Terracini che pronunzia l'orazione commemorativa del compianto Collega Gino Fano, ricordandone la nobile figura di uomo e di scienziato.

Il Presidente ringrazia l'oratore per le sue elevate parole e rinnova ai familiari del Socio Fano, presenti alla seduta, l'espressione del più vivo cordoglio dell'Accademia e suo personale per la scomparsa dell'insigne Collega.

PLICHI SUGGELLATI

Il prof. Giordani presenta un plico suggellato dell'ing. Roberto Gualtieri, consegnato alla Cancelleria in data 5 corrente mese e un altro plico suggellato del prof. Flaviano Magrassi, consegnato in data 4 corrente dal dott. Gaetano Giordano, per incarico del predetto prof. Magrassi.

La Classe, constatata l'integrità dei sigilli, dispone che i due citati plichi siano conservati nell'archivio accademico a disposizione degli interessati.

PRESENTAZIONE DI LIBRI

Il Socio Beccari offre in omaggio la V edizione del suo Manuale dal titolo: « Elementi di Tecnica Microscopica », mettendo in evidenza che tale edizione è stata oggetto di una approfondita revisione e di un ampio aggiornamento, specialmente in rapporto al numero dei metodi di colorazione e a nuove importanti reazioni chimiche, pur conservando il suo precipuo carattere di avviamento alla tecnica microscopica.

Il Presidente presenta il fascicolo 3 (marzo 1953) dei « Rendiconti » e si compiace per il ritmo regolare che tale pubblicazione conserva.

Il Segretario accademico presenta le pubblicazioni inviate in omaggio all'Accademia, mettendo in particolare evidenza il trattato: « Mécanique Générale » del Socio Straniero Pèrès, un volume a cura di M. Steck dal titolo: « Proklus Diadochus (410-485) Euklid-Kommentar » e un'opera di G. Schmid, dal titolo: « Goethe und Die Naturwissenschaften ».

PRESENTAZIONE DI NOTE E MEMORIE

Presentano Note per la pubblicazione nei « Rendiconti » i Soci Abetti, Pensa, Chain, Marotta, Cotronei, Chiarugi, Picone, Meneghetti, Armellini, Vardabasso e Semerano.

Viene data lettura dell'elenco delle Note pervenute alla Cancelleria.

Le seguenti Note saranno pubblicate in fascicoli successivi:

CATTANEO L. – Contributo alla conoscenza della commessura bianca anteriore dell'encefalo (pres. dal Socio A. PENSA).

CURTI R. e LOCCHI S. – Studio polarografico di alcuni N–ossidi (pres. dal Corrisp. G. SEMERANO).

PINI B. – Un problema di valori al contorno per l'equazione. Nota II (pres. dal Socio M. PICONE).

OPERE PERVENUTE IN DONO ALL'ACCADEMIA

presentate nella seduta del 9 maggio 1953

L'architecture d'aujourd'hui. Brésil. 23e année, 1952, nn. 42–43.

BECCARI Nello. — *Elementi di tecnica microscopica*. Guida allo studio pratico dell'anatomia generale e microscopica. 5ª ed. riveduta in collaborazione di U. Ignesti. Milano, Società Editrice Libraria, 1952. Pp. XII–281, in-8°, con tavv.

IGNESTI U. — Vedi: BECCARI Nello.

JUCCI Carlo. — *La possibilità della ricerca scientifica in Italia e l'interessamento americano*. Estr. da « Rendiconti dell'Istituto Lombardo di Scienze e Lettere », vol. LXXXVI, 1953.

NYBELIN Orvar. — *Subantartic and antartic Fishes*. Bergen, 1951. Pp. 32, in-8°, con figg. (Scientific Results of the « Brategg » Expodition 1947–48, n. 2).

PÉRÈS Joseph. — *Mécanique générale*. Paris, Masson, 1953. Pp. IV–399, in-8°.

SCHMID Günther. — *Goethe und die Naturwissenschaften*. Halle, Deutsche Akademie der Naturforscher, 1940. Pp. XV–620, in-8°.

STECK Max. — *Euklid-Kommentar des Proklus Diadochus (410–485)*. Halle, Deutsche Akademie der Naturforscher, 1945. Pp. XXIV–589, con tavv.

D. DE BLASI e U. AMALDI.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

Seduta del 13 giugno 1953

Presiede il Presidente FRANCESCO GIORDANI

NOTE DI SOCI

Geometria. — *Complessi lineari di piani nello spazio a cinque dimensioni.* Nota (*) del Socio ENRICO BOMPIANI.

1. OGGETTO DELLA RICERCA. – Il primo caso interessante di un complesso lineare di piani si ha nello spazio proiettivo a cinque dimensioni S_5 (in S_3 un complesso lineare di piani è una stella di piani; in S_4 si ha per dualità un complesso lineare di rette (1)). Esso è stato perciò largamente studiato (2).

Le considerazioni che seguono mi sembrano raggiungere la determinazione dei vari tipi in modo più rapido e spontaneo dei precedenti e assegnano inoltre l'effettiva costruzione di tali complessi (3).

2. PRELIMINARI ANALITICI. – Siano dati in S_5 i punti $x\,(x^i)$, $y\,(y^i)$, $z\,(z^i)$ in cui gli apici latini delle coordinate variino fra 0 e 5.

Si ponga

$$(2.1) \qquad p^{ikl} = \begin{vmatrix} x^i & x^k & x^l \\ y^i & y^k & y^l \\ z^i & z^k & z^l \end{vmatrix}, \qquad r^{ik} = \begin{vmatrix} x^i & x^k \\ y^i & y^k \end{vmatrix}$$

(*) Presentata nella seduta del 13 giugno 1953.

(1) G. CASTELNUOVO, *Ricerche di Geometria della retta nello spazio a quattro dimensioni* « Atti Ist. Veneto », **2** (7), pp. 855–901 (1891).

(2) C. SEGRE, *Sui complessi lineari di piani nello spazio a cinque dimensioni.* « Annali di Matematica », **27** (3), pp. 75–123 (1917).

Ivi sono citati lavori precedenti sull'argomento. Si veda anche B. SEGRE, *Forme differenziali e loro integrali.* (Docet, Edizioni Universitarie, Roma, 1951, litogr.), Cap. I, n. 30, particolarm. p. 102.

(3) I complessi lineari di piani in S_6 sono stati studiati da J. A. SCHOUTEN, *Klassifizierung der alternierenden Grösszen dritten Grades in 7 Dimensionen.* « Rend. Circolo Matem. di Palermo » (LV) pp. 137–156 (1931).

Sulla classificazione e proprietà geometriche di complessi lineari di piani con particolare riguardo ai casi di S_6 e di S_7 apparirà presto una Memoria di C. LONGO.

e si scriva l'equazione di un complesso lineare di piani (c. l. — S_2)

$$a_{ikl}\, p^{ikl} = 0, \qquad i = k = l = 0, \cdots, 5 \tag{2.2}$$

con le a_{ikl} alternanti ($a_{ikl} = -a_{kil} = -a_{ilk} = \cdots$).

È immediato che:

1° ad una retta $r\,(r^{ik})$ è associato un *iperpiano polare* S_4

$$r_l z^l = 0 \tag{2.3}$$

ove

$$r_l = a_{ikl}\, r^{ik} \tag{2.4}$$

a meno che sia per ogni l, $r_l = 0$: le rette per cui ciò avviene, cioè per le quali

$$a_{ikl}\, r^{ik} = 0 \tag{2.5}$$

si diranno *rette singolari:*

2° ad un punto $z\,(z^l)$ è associato un *complesso lineare di rette* (c. l. — S_1) definito da

$$z_{ik}\, r^{ik} = 0 \tag{2.6}$$

con

$$z_{ik} = a_{ikl}\, z^l. \tag{2.7}$$

È ovvio che lo S_4 polare di una retta r la contiene; e che *ogni* retta per un punto z appartiene al c. l. — S_1 associato a z, sicché z è *centro* del c. l. — S_1 associato. Ma in S_5 non può esservi un centro di un c. l. — S_1 senza esservi una retta singolare luogo di centri (S_1 centrale).

Ciò vuol dire che qualunque piano congiungente z con una retta del c. l. — S_1 associato a z è del c. l. — S_2, cioè lo S_1 centrale è retta singolare nel senso detto in 1°: essa è un *centro* (S_1) per il c. l. — S_2.

Ne risulta che per ogni punto generico z di S_5 passa una retta singolare e gli ∞^3 piani per essa appartengono al c. l. — S_2. Essi però *non* esauriscono gli ∞^5 piani del c. l. — S_2 per il punto.

Vi sono quindi ∞^4 *rette singolari*, di cui una per ogni punto generico di S_5.

Analiticamente, la retta congiungente $O_0\,(\delta^i_0)$, $O_1\,(\delta^l_1)$ [4] è singolare se e solo se

$$a_{0\,1\,l} = 0, \qquad l = 2, \cdots, 5 \tag{2.8}$$

e ciò conferma quanto detto.

3. Complessi generali e complessi singolari di S_2. – Si consideri una retta e l'insieme dei c. l. — S_1 associati ai suoi punti.

(4) Il simbolo δ^i_k di Kronecker vale 0 per $i \neq k$, 1 per $i = k$.

Si assuma la retta come $O_0 O_1$ (non necessariamente valgano le (2.8)); per una retta r del c. l. — S_1 associato al punto $\{\lambda, \mu, 0, 0, 0, 0\}$ si ha

$$\lambda a_{0ik} r^{ik} + \mu a_{1ik} r^{ik} = 0, \qquad i, k = 0, \cdots, 5. \tag{3.1}$$

In generale il c. l. — S_1 dipende da λ/μ ed esiste una *proiettività* fra la punteggiata su $O_0 O_1$ e il fascio (3.1). Le rette singolari di questi c. l. — S_1 si appoggiano alla $O_0 O_1$ e descrivono un regolo appartenente ad uno S_3 che è *totale* per *tutti* i c. l. — S_1 (3.1) (cioè *ogni* retta di S_3 appartiene ad ogni tale complesso).

Invece (3.1) non dipende da λ/μ se e solo se esiste un ρ per cui

$$a_{0ik} = \rho a_{1ik}, \qquad i, k = 0, \cdots, 5.$$

Il c. l. — S_1 per cui $\lambda\rho + \mu = 0$ è indeterminato; se si fa corrispondere $\mu = 0$ a $\rho = 0$, il punto O_0 è tale che *ogni* piano per esso appartiene al c. l. — S_2, cioè O_0 è *centro* per il c. l. — S_2.

Nel primo caso (dipendenza di (3.1) da λ/μ) diremo il c. l. — S_2 *generale* o *non-singolare*; e *singolare* nel secondo.

4. COMPLESSO GENERALE NON-SPECIALE – PIANI CARDINI. – Sia il complesso generale ed $O_0 O_1$ singolare; valgono le (2.8) e nella (3.1) si possono supporre $i, k \geqq 2$, cioè si può interpretare la (3.1) nello S_3 ($x^0 = x_1 = 0$). Ciò vuol dire che:

Presa una retta singolare e un punto su di essa, gli ∞^5 S_2 *del c. l.* — S_2 *per il punto si proiettano dalla retta singolare (sopra un* S_3 *sghembo con questa) nelle rette di un c. l.* — S_1 *(di* S_3*): e questo al variare del punto sulla retta singolare varia in un fascio.*

V'è allora luogo a considerare la congruenza lineare base del fascio e le sue direttrici.

Siano queste distinte, d_0, d_1: diremo il cl. l. — S_2 *non-speciale*. Si può pensare il c. l. — S_1 speciale (in S_3) definito da d_0 corrispondente ad O_0, e così d_1 ad O_1.

Ciò vuol dire che *ogni* piano per O_0 incidente lo S_3^0 (O_0, O_1, d_0) in una retta è del c. l. — S_2 e così *ogni* piano per O_1 incidente in retta lo S_3^1 (O_0, O_1, d_1).

Ancora: una retta qualsiasi appoggiata a d_0, d_1 e la $O_0 O_1$ definiscono uno S_3 tale che *ogni* suo piano è del c. l. — S_2; si hanno così ∞^2 S_3 *totali per ogni retta singolare.*

Se si assume S_3^0 come $x^2 = x^4 = 0$ e S_3^1 come $x^3 = x^5 = 0$ si ha, oltre ad $a_{01l} = 0$,

$$a_{023} = a_{025} = a_{034} = a_{035} = a_{045} = 0$$

$$a_{123} = a_{124} = a_{125} = a_{134} = a_{145} = 0$$

mentre $a_{024} \neq 0$, a_{135} o altrimenti O_0 od O_1 sarebbero *centri* del c. l. — S_2 (ogni piano per O_0 od O_1 apparterrebbe al c. l. — S_2), cioè questo sarebbe singolare.

Prese altre due rette singolari che con $O_0 O_1$ determinino S_5 e presi, come si può, come loro punti d'intersezione con S_3^0 i punti O_3 (δ_3') e O_5 (δ_5'), con S_3^1 rispettiv. O_2 (δ_2') e O_4 (δ_4'), si ha pure

$$a_{234} = a_{235} = a_{245} = a_{345} = 0.$$

Risulta dunque che soltanto $a_{0124} \neq 0$, $a_{1235} \neq 0$ e di qua che ogni retta singolare incontra i due piani $O_0 O_2 O_4$ e $O_1 O_3 O_5$. Questi sono i *piani cárdini*.

Tutte le rette singolari del c. l. — S_2 (*generale e*) *non-speciale sono appoggiate a due piani* (*cárdini*) *fra loro sghembi; e inversamente ogni retta appoggiata ad essi è singolare.*

L'insieme dei piani incidenti un piano dato (*nucleo*) si dice *complesso nucleato*. Perciò:

Ogni c. l. — S_2 *non-speciale determina due complessi nucleati* (*i cui nuclei sono i cárdini del c. l.* — S_2) *ed appartiene al fascio da essi determinato.*

L'equazione canonica del c. l. — S_2 è

$$\alpha p^{0124} + \beta p^{1235} = 0.$$

Per individuare *un* complesso di cárdini assegnati τ_1, τ_2 occorre dare un suo piano π *non* incidente τ_1, τ_2.

Assegniamo l'*effettiva costruzione* di un c. l. — S_2 così individuato.

I piani τ_1, τ_2, π a due a due sghembi determinano una V_3^1 che contiene le ∞^2 rette singolari incidenti π. Presa una di queste rette, da essa i tre piani si proiettano (sopra un S_3 sghembo con la retta) in tre rette t_1, t_2, p, quindi è determinato (in S_3) un c. l. — S_1, cui appartiene p, nel fascio di complessi di direttrici t_1, t_2. Questo è il c. l. — S_1 relativo al punto d'intersezione della retta singolare con π (n. 2 in fine), cioè i piani proiettanti dal punto le rette del c. l. — S_1 sono i piani del c. l. — S_2 per esso; questi risultano dunque noti. I c. l. — S_1 appartenenti al fascio di direttrici t_1, t_2 sono riferiti proiettivamente ai punti della retta singolare e determinano i piani del c. l. — S_2 per essi.

Sono dunque noti (cioè si sanno costruire) tutt'i piani del c. l — S_2 passanti per i punti della V_3^1 (τ_1, τ_2, π).

Si consideri ora un punto R *non* appartenente a tale V_3^1 e sia P un punto di π. Si sanno costruire i piani del c. l. — S_2 per P, quindi in particolare quelli per la retta PR: preso uno di essi ρ si costruisca la V_3^1 (τ_1, τ_2, ρ) e si proceda come prima.

Si sanno così costruire i piani del c. l. — S_2 *passanti per qualsiasi punto.*

5. Complesso non-singolare speciale [5]. – In questo caso le direttrici d_1, d_2 associate ad una retta singolare sono coincidenti. Si noti che lo stesso fatto deve accadere per *tutte* le rette singolari (altrimenti, partendo da una retta singolare per cui ciò non accadesse si ritroverebbero i risultati precedenti). Ciò porta che i piani cárdini coincidono in un solo piano τ.

La configurazione limite dei due piani cárdini venuti a coincidere è costituita da τ e da una proiettività fra il piano punteggiato τ e la stella di S_3

(5) È il complesso semplicemente singolare secondo C. Segre.

passanti per τ: *le rette singolari del c. l.* — S_2 *sono quelle incidenti* τ *e appartenenti agli* S_3 *corrispondenti ai punti d'incidenza.*

Come nel caso non-speciale gli ∞^7 piani per le ∞^4 rette singolari appartengono al c. l. — S_2 (ma non lo esauriscono).

Sia $\tau \equiv O_0 O_1 O_2$ e la proiettività detta faccia corrispondere ad O_0 lo S_3 $x^3 = x^4 = 0$, ad O_1 lo $x^4 = x^5 = 0$, ad O_2 lo $x^3 = x^5 = 0$, e al punto $\{1, 1, 1, 0, 0, 0\}$ di τ lo S_3 $x^3 = x^4 = x^5$. L'equazione del c. l. — S_2 si riduce a

$$\alpha (p^{145} + p^{034} - p^{235}) + \beta p^{345} = 0. \tag{5.1}$$

Se $\alpha = 0$ si ha il complesso nucleato di nucleo τ (che è singolare); quindi $\alpha \neq 0$.

La (5.1) rappresenta un *fascio* di c. l. — S_2; se ne determina uno assegnandone *un* piano (non incidente τ). Se come tale si assume $\pi = O_3 O_4 O_5$ si ha $\beta = 0$ e perciò:

La forma canonica di un c. l. — S_2 *non-singolare speciale è*

$$p^{034} + p^{145} + p^{253} = 0.$$

La costruzione degli ∞^8 S_2 del c. l. — S_2 procede come nel caso precedente sostituendo alla V_3^3 (τ_1, τ_2, π) quella individuata da τ, dalla proiettività detta e da π.

6. COMPLESSI SINGOLARI DI PIANI [6]. – Rimane da esaminare il solo caso in cui il c. l. — S_2 possegga almeno un *centro* (tutti i piani per esso appartengono al complesso).

Se questo è O_0 si ha $a_{0ik} = 0$ e l'equazione (2.2) si può quindi riferire ai soli indici $i, k, l = 1, \cdots, 5$ cioè basta esaminare il c. l. — S_2

$$a_{ikl} p^{ikl} = 0 \qquad i, kl = 1, \cdots, 5 \tag{6.1}$$

nello S_4 $x^0 = 0$. Per dualità in S_4 si ha da esso un c. l. — S_1 che ha sempre un *centro*; quindi il c. l. — S_2 in S_4 ha uno S_3 *totale* (tutt'i suoi piani sono del c. l. — S_2) e questo congiunto con O_0 dà uno S_4 totale (per il c. l. — S_2 in S_5).

Se questo S_4 totale si assume come $x^1 = 0$ si riconosce che sono $\neq 0$ i soli coefficienti a_{1ik} con $i, k \geq 2$.

Nello S_3 $x^0 = x^1 = 0$ il c. l. — S_1

$$a_{1ik} r^{ik} = 0$$

può essere non-speciale o speciale e ridursi ad una delle due forme

$$r^{23} + r^{45} = 0 \quad , \quad r^{23} = 0.$$

In corrispondenza si ha per il c. l. — S_2 una delle due forme

$$p^{123} + p^{145} = 0 \quad , \quad p^{123} = 0 \tag{6.2}$$

la seconda delle quali dà un complesso nucleato (di nucleo $x^1 = x^2 = x^3 = 0$).

Le (6.2) *sono le forme canoniche di un c. l.* — S^2 *singolare non-nucleato o nucleato.*

(6) Sono i complessi doppiamente e triplamente singolari secondo C. SEGRE.

Meccanica (Meccanica celeste). — *Sul modo di risolvere una indeterminazione nel problema di Clairaut generalizzato delle configurazioni degli astri fluidi rotanti in equilibrio relativo.* Nota (*) del Corrisp. CORRADINO MINEO.

Sia V il potenziale newtoniano interno dell'astro, ω la sua rotazione (costante) intorno all'asse, supposto coincidente con l'asse delle z. Le superficie della stratificazione, o superficie d'equilibrio (cioè quelle sulle quali è costante il potenziale totale, somma di V e del potenziale della forza centrifuga), sono le superficie

$$V + \frac{\omega^2}{2f}(x^2 + y^2) = \text{costante},$$

essendo f la costante dell'attrazione universale.

Supponendo che queste superficie siano caratterizzate da un parametro a, l'unica condizione per l'equilibrio relativo dell'astro è

$$V + \frac{\omega^2}{2f}(x^2 + y^2) = \text{funzione soltanto di } a. \tag{1}$$

Inoltre la densità ρ dell'astro si deve ritenere una funzione di a interamente assegnata (un dato, cioè, del problema).

L'indeterminazione appare già nel 2° membro della (1). Si tratta di caratterizzarla opportunamente dal punto di vista analitico.

Il Liapounoff trovò, nel 1903, un particolare tipo di stratificazione di equilibrio degli astri fluidi rotanti, nel caso di rotazioni molto lente, supponendo che le superficie siano convesse e poco differenti da sfere aventi il centro in un punto dell'asse della rotazione diurna (punto che, come si può dimostrare, è il centro di massa dell'astro).

Per semplicità il Liapounoff si limitò al caso in cui le superficie della stratificazione sono di rotazione intorno all'asse dell'astro. In coordinate polari r, θ, ψ, l'equazione trovata dal Liapounoff d'una superficie interna a = costante, è

$$r = a(1 + \zeta), \tag{2}$$

dove

$$\zeta = \zeta_1 \omega^2 + \zeta_2 \omega^4 + \cdots + \zeta_n \omega^{2n} + \cdots, \tag{3}$$

essendo

$$\zeta_i = \alpha_{0i} P_0 + \alpha_{1i} P_2 + \cdots + \alpha_{ii} P_{2i} \qquad (i = 1, 2, \cdots), \tag{4}$$

e $P_0, P_2, P_4 \cdots$ i polinomi in x di Legendre dove si ponga $x = \cos\theta$.

(*) Presentata nella seduta del 13 giugno 1953.

Le incognite del problema sono α_{01} , α_{11} ; α_{02} , α_{12} , α_{22} ; $\cdots$ che sono funzioni di sola a.

Nella sua estesa Memoria, il grande analista supera, con calcoli lunghi e minuziosi, non poche difficoltà, soprattutto per dimostrare che si può assegnare un numero (positivo) fisso, indipendente da ogni legge di densità, tale che per ogni valore numerico di ω inferiore a quel numero la (3) risulti assolutamente e uniformemente convergente in tutta la massa fluida, quando a varia da zero a un valore A corrispondente alla superficie libera dell'astro [1].

In questo particolare tipo di superficie della stratificazione, trovato dal Liapounoff, io mi ero incontrato molti anni fa, a proposito d'un problema di Dirichlet, risoluto con un mio metodo [2].

In una successiva comunicazione, poi, ho mostrato che, assumendo a *priori* la stratificazione del Liapounoff, i coefficienti α_{01} , α_{11} , $\cdots$ si possono determinare, giovandosi soltanto dell'equazione del Poisson e ammettendo, si intende, che la densità ρ verifichi tale equazione (il Liapounoff si mette nel caso più generale di densità non derivabili). Il metodo è assai più semplice di quello adoperato dal Liapounoff e anche del « metodo uniforme » seguìto dal Wavre [3]. Voglio qui richiamarlo, perché mi mette in grado di caratterizzare rapidamente l'indeterminazione accennata: scopo principale di questa Nota preliminare.

Sia W il potenziale totale dell'astro, per il quale si ammette lo sviluppo

$$W = W_0 + W_1 \omega^2 + \cdots + W_n \omega^{2n} + \cdots, \tag{5}$$

essendo W_i una funzione di sola a. Supposto che la (2) definisca implicitamente a come funzione di r e θ, laplaciano di W prende la forma

$$\Delta W = W' \left[\frac{\partial^2 a}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial a}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \operatorname{sen} \theta} \left(\operatorname{sen} \theta \frac{\partial a}{\partial \theta} \right) \right] + W'' \left[\left(\frac{\partial a}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial a}{\partial \theta} \right)^2 \right],$$

dove con gli accenti si indicano derivazioni rispetto al parametro a.

Tenendo presente la formola di Adams, che dà il prodotto di due polinomi di Legendre e l'altra ben nota

$$\frac{d P_n}{d\theta} = - \operatorname{sen} \theta \left[(2n - 1) P_{n-1} + (2n - 5) P_{n-3} + (2n - 9) P_{n-5} + \cdots \right],$$

(1) Vedi A. LIAPOUNOFF, *Recherches dans la théorie des corps célestes.* « Mémoires de l'Académie impériale des Sciences de St. Pétersbourg », col. XIV (1903). Notiamo che il valore del raggio di convergenza della (3), trovato dall'Autore, è troppo piccolo da potere trarre dalla teoria conseguenze utili, per esempio nel caso della Terra. Notiamo ancora che l'Autore, anziché di ω, si serve del parametro $\frac{\omega^2 A^3}{fM}$, che ha il vantaggio di essere un puro numero.

(2) Vedi C. MINEO, « Bollettino dell'Unione Matematica Italiana », Anno V (1926): e anche « The Quarterly Journal of Mathematics », Oxford Series, vol. I (1930).

(3) Vedi WAVRE, *Figures planétaires et Géodésie.* Paris, Gauthier-Villars (1932). E anche C. MINEO, *Potenziale newtoniano all'esterno d'un astro e stratificazione d'equilibrio.* « Atti della Soc. It. per il Progresso delle Scienze », Bari, ottobre 1933.

si trova, con sviluppi che non presentano difficoltà, che l'equazione del Poisson dà luogo a una relazione della forma

$$(6)\quad \begin{cases} \frac{2}{a}[W_0' + \omega^2 W_1' + \cdots + \omega^{2n} W_n' + \cdots][1 + \omega^2 \Pi_2^{(1)} + \omega^4 \Pi_4^{(1)} + \cdots + \\ + \omega^{2n} \Pi_{2n}^{(1)} + \cdots] + [W_0'' + \omega^2 W_1'' + \cdots + \omega^{2n} W_n'' + \cdots][1 + \omega^2 \Pi_2^{(2)} + \\ + \omega^4 \Pi_4^{(2)} + \cdots + \omega^{2n} \Pi_{2n}^{(2)} + \cdots] = 2\omega^2 - 4\pi f\rho, \end{cases}$$

dove ρ, come si è già dichiarato, è la densità dell'astro, funzione di sola a, e il simbolo Π_{2i} denota una combinazione lineare dei polinomi $P_0, P_2, \cdots, P_{2i}$, i cui coefficienti di combinazione dipendono dalle funzioni $\alpha_{01}, \alpha_{11}; \cdots; \alpha_{0i}, \alpha_{1i}, \cdots, \alpha_{ii}$ e dalle loro derivate prime e seconde. Si supponga d'aver calcolato l'approssimazione d'ordine $n-1$, fermando, cioè il 1° membro ai termini in ω^{2n-2}. Per passare all'approssimazione d'ordine n, basterà annullare nel 1° membro il coefficiente di ω^{2n}. Questo coefficiente contiene *linearmente* le funzioni incognite

$$\alpha_{0n}, \alpha_{1n}, \cdots, \alpha_{nn}, W_n.$$

Si avrà quindi da fare con equazioni lineari del 2° ordine nelle funzioni incognite. Ma poiché il coefficiente di ω^{2n}, che si eguaglia a zero, contiene i polinomi $P_0, P_2, \cdots, P_{2n}$, l'equazione ottenuta si scinde in $n+1$ relazioni, mentre le funzioni incognite da determinare sono $n+2$. *Si presenta dunque una indeterminazione, a ogni stadio dell'approssimazione.* Per togliere questa indeterminazione, il Liapounoff dà un particolare significato geometrico al parametro a: a è il raggio della sfera il cui volume eguaglia quello limitato dalla superficie d'equilibrio caratterizzata dal parametro a. Questa condizione si traduce nell'equazione

$$\int_\sigma (1+\zeta)^3 \, d\sigma = 4\pi,$$

essendo $d\sigma = \operatorname{sen}\theta \, d\theta \, d\psi$ l'elemento d'area della superficie sferica di raggio 1. Si hanno allora le condizioni

$$\int_\sigma \zeta_1 \, d\sigma = 0 \quad , \quad \int_\sigma \zeta_2 \, d\sigma = -\int_\sigma \zeta_1^2 \, d\sigma, \cdots,$$

cioè

$$\alpha_{01} = 0 \quad , \quad \alpha_{02} = -\frac{1}{5}\alpha_{11}^2, \cdots$$

e l'indeterminazione è tolta del tutto.

La condizione posta dal Liapounoff è accettabile, data la natura topologica della stratificazione ammessa.

Il Wavre suppone addirittura che la deformazione sia nulla sull'asse polare (il raggio vettore r sia eguale ad a per $\theta = 0$); il che importa

$$\alpha_{01} = -\alpha_{11} \quad , \quad \alpha_{02} = -(\alpha_{12} + \alpha_{22}) \, , \cdots$$

L'espediente è semplice e ingegnoso, ma alquanto arbitrario.

Tolta l'indeterminazione, il problema è teoricamente risoluto; giacché per ogni equazione del 2° ordine, si possono assegnare i dati iniziali (Lipschitz), cioè i valori iniziali della funzione e della sua derivata per $a = A$ (valori iniziali ottenuti sperimentalmente per mezzo di misure geodetiche e gravimetriche).

Ma non si possono escogitare altre ipotesi per fare sparire l'indeterminazione, specie se adatte a essere cimentate con i fatti (geodetici, geofisici, geologici)?

In prima approssimazione (Clairaut), la stratificazione è ellissoidica, come è noto. Non si può vedere se ci si possa servire di questa indeterminazione affinché la superficie libera dell'astro resti ellissoidica, qualunque sia l'approssimazione? Per vedere, cioè, se l'ipotesi di una superficie libera ellissoidica (di rotazione) dell'astro sia compatibile con una stratificazione idrostatica?

Spero di rispondere a queste domande in altro lavoro.

Cosmogonia. — *Osservazioni sul problema dei due corpi di masse variabili e sopra alcune sue applicazioni alla cosmogonia.* Nota (*) del Socio G. ARMELLINI.

1. Nell'ultimo congresso dell'Unione Astronomica Internazionale, tenutosi a Roma nel settembre dello scorso anno 1952, tra i molteplici argomenti che formarono oggetto di discussione, si è anche parlato della formazione delle stelle dalla condensazione di nebulose. Ed in proposito alcuni astronomi, tra cui Ambartsumian e Fessenkov, hanno sostenuto (1) l'opinione che la massa di un astro, dopo la sua prima formazione, sarebbe soggetta ad un notevole decremento per emissione corpuscolare, per cui la massa dell'astro adulto si ridurrebbe forse alla decima parte di quella dell'astro primitivo. Tale ipotesi, secondo i suoi sostenitori, avrebbe il vantaggio di dare una facile spiegazione del cosidetto « diagramma di Russell », che collega la luminosità col tipo spettrale delle stelle. Ma essa è in opposizione con le idee di Hoyle, che si riannodano sostanzialmente alla scuola classica, secondo cui la massa di un astro, dopo la primitiva formazione, continue-

(*) Presentata nella seduta del 13 giugno 1953.

1) Cfr. negli « Atti del Congresso ». V. A. AMBARTSUMIAN, *Discorso introduttivo al simposio sopra l'evoluzione stellare*; V. G. FESSENKOV, *La irradiazione corpuscolare come fattore dell'evoluzione del Sole e delle Stelle.*

rebbe invece a crescere lentamente per l'incessante afflusso di pulviscolo cosmico, di meteoriti, ecc. che si depositano sopra la sua superficie.

Come è evidente, queste discussioni hanno nuovamente dimostrato la importanza di un problema, di cui molto ci occupammo [2] in passato; e cioè *il problema dei due corpi di masse variabili*. Ed in questa Nota, torneremo nuovamente sull'argomento, per esaminare se l'ipotesi di Ambartsumian permetta di spiegare un fatto dimostrato dalle osservazioni sopra le *stelle doppie*. E cioè il fatto che, nelle stelle doppie di grande massa (ad esempio nelle binarie spettroscopiche e fotometriche) il satellite si trova generalmente assai vicino alla stella principale descrivendo intorno ad essa un'orbita che, in media, ha debole eccentricità; mentre invece nelle stelle doppie di massa minore (binarie visuali larghe) e tipo spettrale più avanzato, il satellite è più lontano e descrive un'orbita spesso fortemente eccentrica.

Vedremo, in questa Nota, che la risposta sarà affermativa. Ma per maggior rigore, dovremo fare preventivamente qualche osservazione sopra le equazioni fondamentali del problema e sui risultati a cui si perviene applicando il metodo degli invarianti adiabatici.

2. Ricordiamo, in proposito, che il problema dei due corpi di masse variabili fu proposto [3] da Dufour nel 1866 e studiato [4] più tardi da Gylden nel 1885. E precisamente, indicando con $\hat{F}$ il vettore rappresentante la forza applicata ad un punto Q di massa $m(t)$ variabile col tempo, e chiamando con $\hat{A}$ l'accelerazione di Q, Gylden scrisse l'equazione fondamentale del moto sotto la forma classica della Dinamica, e cioè:

$$m(t)\,\hat{A} = \hat{F}. \tag{1}$$

Tale equazione venne generalmente applicata dagli astronomi negli studi posteriori sul problema. Ma più tardi, nel 1928, il nostro insigne e compianto consocio T. Levi-Civita, mise invece [5] l'equazione fondamentale del moto sotto la forma assai elegante

$$\frac{d}{dt}[m(t)\,\hat{V}] = \hat{F} \tag{2}$$

dove $\hat{V}$ indica il vettore rappresentante la velocità di Q.

Si vede subito che, se m fosse costante, le due equazioni sarebbero identiche; mentre invece, se m varia col tempo come ora supponiamo, esse sono

(2) Cfr. G. Armellini, « Rendiconti Lincei », 1911, sem. II; 1913 sem. I; 1914 sem. I; 1915 sem. II; 1922 sem. I; 1925 sem. I; 1926 sem. II; 1932, sem. I; 1932 sem. II; 1936, sem. I; 1937, sem. I; cfr. anche id. id. in « Mem. Acc. Nazionale delle Scienze detta dei XL », ser. 3, Tomo XIX (1915).

(3) Cfr. « Comptes Rendus de l'Acc. des Sciences de Paris », 1866.

(4) Cfr. « Astr. Nachrichten », Band CIX, n. 2593.

(5) Cfr. T. Levi-Civita, *Sul moto di un punto di massa variabile* in « Rend. Lincei », sem. II (1928).

diverse. E ciò ha prodotto qualche confusione tra gli studiosi, che alle volte hanno indifferentemente applicato l'una o l'altra equazione.

3. Ora noi vogliamo qui mostrare che tanto la (1) quanto la (2) sono *perfettamente rigorose*; soltanto esse sono *casi particolari* di una equazione più generale che ora daremo. E tali casi particolari corrispondono a differenti ipotesi sopra il meccanismo con cui si effettua la variazione di massa, onde *non* si è liberi di applicare, a piacere, l'una o l'altra.

A tale scopo, supponiamo che nel tempuscolo dt la massa m del punto materiale Q si accresca, per urto anelastico con un corpuscolo S di massa infinitesima dm che si muova con velocità $\hat{W}$. Ovviamente l'incremento della quantità di moto del punto Q nel tempuscolo dt sarà eguale all'impulso prodotto dalla forza $\hat{F}$ applicata in Q, sommato con la quantità di moto arrecatagli dal corpuscolo S. Avremo dunque

$$d(m\hat{V}) = \hat{F}dt + \hat{W}dm \tag{3}$$

e cioè, semplificando

$$(\hat{V} - \hat{W})\frac{dm}{dt} + m\frac{d\hat{V}}{dt} = \hat{F}. \tag{4}$$

Da questa equazione, vediamo subito che se si supone $\hat{W} = \hat{V}$ si ottiene l'equazione (1) di Gylden; mentre invece, se si suppone $\hat{W} = 0$, si ha la (2) di Levi-Civita. In altre parole, Gylden suppone implicitamente che i corpuscoli che vengono ad aggiungersi al punto materiale Q abbiano, almeno in media, una velocità $\hat{W}$ eguale a quella $\hat{V}$ di Q; mentre invece Levi-Civita suppone che, in media, essi siano fermi. Così per esempio se immaginiamo che il punto Q non sia sottomesso a nessuna forza, e cioè se si ha $\hat{F} = 0$, la (2) di Levi-Civita ci dà

$$m(t)\hat{V} = \textit{costante} \tag{5}$$

onde la velocità di Q decresce al crescere della sua massa; ciò che è evidente, giacché Levi-Civita suppone implicitamente che le masse che si aggiungono a Q non possiedano, in media, nessuna quantità di moto.

4. Premesse queste osservazioni, è facile vedere quali siano i casi di applicabilità delle due equazioni. Infatti:

a) Se l'*incremento* di massa avviene perché l'astro, o pianeta, Q attraversa una nube di pulviscolo cosmico le cui particelle si muovono indifferentemente in tutte le direzioni, si ha in media $\hat{W} = 0$, e *deve quindi applicarsi l'equazione* (2) *di Levi-Civita.*

b) Se invece l'*incremento* di massa avviene perché un pianeta Q si trova immerso in una corrente di meteoriti che percorrono la sua medesima orbita, si ha in media $\hat{W} = \hat{V}$ e *deve quindi applicarsi la* (1) *di Gylden.*

c) Se infine la massa dell'astro Q *diminuisce* per emissione corpuscolare, come nell'ipotesi di Ambartsumian che ora discutiamo, si ha ancora $\hat{W}=\hat{V}$, e *deve applicarsi la* (1) *di Gylden.*

5. Passiamo ora a studiare il problema delle stelle doppie, supponendo che i due astri A e B che compongono il sistema, dopo la loro prima formazione siano soggetti ad un forte decremento di massa per emissione corpuscolare, secondo la detta ipotesi di Ambartsumian. Applicando, come abbiamo visto, la (1) di Gylden, troviamo subito che uno qualsiasi degli astri, per esempio B, descrive intorno all'altro A *un'orbita piana con la legge delle aree*. Si ha cioè:

$$r^2 \frac{d\vartheta}{dt} = c \tag{6}$$

dove r indica, al solito, il raggio vettore AB, mentre ϑ indica l'anomalia contata da una direzione fissa qualsiasi nel piano del moto e c indica la costante delle aree.

Ciò posto, chiamando con M la massa del sistema, e cioè la somma delle masse di A e B, si sa dalla meccanica che, se M fosse costante, B descriverebbe una conica (nel caso che a noi interessa, un'ellisse) che ha per fuoco A ed il cui parametro p è dato dall'equazione

$$p = a\,(1 - e^2) = \frac{c^2}{fM} \tag{7}$$

dove f indica il coefficiente attrattivo, a il semiasse maggiore dell'ellisse ed e la sua eccentricità. Se invece M varia col tempo, gli elementi dell'ellisse saranno anche essi variabili e la (7) mostra che il parametro p varierà in ragione inversa di M; onde p crescerà quando M decresce.

Ma, nel problema delle stelle doppie, occorre anche conoscere come vari l'eccentricità e; e qui dobbiamo fare alcune considerazioni, giacché sono sorti degli equivoci per inesatta interpretazione dei risultati a cui conduce la teoria degli invarianti adiabatici.

6. È noto che Lehmann dimostrò nel 1898, che [6] nell'ipotesi in cui la variazione di massa sia lenta e costante nel tempo, e cioè quando si abbia

$$M(t) = M_0(1 + \varepsilon t) \tag{8}$$

(dove M_0 indica una costante positiva ed ε è un'altra costante positiva o negativa, molto piccola) risulta con molta approssimazione

$$r = \frac{p}{1 + e_0 \cos(\vartheta - \omega_0)} \tag{9}$$

(6) Cfr. H. Lehmann, *Ueber Centralbewegungen* in « Astr. Nachrichten », Band CXXXV n. 3479.

essendo e_0 ed ω_0 costanti. In altre parole, nell'ipotesi ora fatta, il satellite B *si trova sempre sopra un'ellisse il cui parametro p è legato alla massa* M *dalla* (7) *e cioè è funzione lineare inversa del tempo, mentre l'eccentricità e la direzione dell'asse maggiore restano invariabili.*

Più tardi, Levi-Civita, in una breve ma elegantissima Nota, estese [7] questo teorema servendosi della teoria degli invarianti adiabatici; teoria che presuppone soltanto [8] che la variazione di massa avvenga sempre *molto lentamente* e sia indipendente dalla posizione di B nella sua orbita.

7. Le dimostrazioni del Levi-Civita e del Lehmann sono perfettamente rigorose; ma sarebbe erroneo dedurne, come spesso si crede, che l'eccentricità dell'orbita resti invariata.

Infatti, come io già ebbi occasione [9] di far notare, l'orbita (9) di Lehmann *non* è osculatrice alla traiettoria realmente descritta da B. Vale a dire, in un istante qualsiasi t_1 il satellite B si trova, è vero, sopra l'ellisse E_1 che si ottiene dalla (9) ponendovi $t = t_1$; ma la direzione del moto di B *non* coincide con la tangente a questa ellisse. Ne segue che, se dopo l'istante t_1 la massa M del sistema rimane costante, il satellite B da t_1 in poi descriverà intorno ad A un'ellisse differente dall'ellisse E_1 e quindi con eccentricità diversa da e_0.

In proposito, io recai un semplice esempio [10] tratto da un caso in cui il problema si riduce alle quadrature; e cioè quando si abbia $M = \frac{1}{1+\varepsilon t}$. Eseguendo il calcolo, ho mostrato che, comunque piccola si scelga la costante positiva ε, l'eccentricità cresce tendendo all'infinito col tempo. Ora il problema che ci proponiamo di risolvere, in applicazione dell'ipotesi di Ambartsumian, è il seguente:

« Supponiamo che la massa M di un sistema binario sia soggetta ad un decremento, per emissione corpuscolare dai due astri componenti A e B; e supponiamo che questo decremento s'inizi nell'istante t_0 e cessi nell'istante t_1, in modo che M passi da un valore iniziale M_0 ad un valore finale M_1 essendo $M_1 < M_0$. Conoscendo l'eccentricità e_0 dell'orbita ellittica che B descriveva intorno ad A prima di t_0, si domanda l'eccentricità e_1 dell'orbita ellittica che B descriverà dopo l'istante t_1 ».

8. Per risolvere il problema, ricordiamo dalla meccanica che, se M fosse costante, si avrebbe per B il noto integrale dell'energia

$$\frac{v^2}{2} - f\frac{M}{r} = h \tag{10}$$

(7) Cfr. T. LEVI-CIVITA, *Applicazioni astronomiche della teoria degli invarianti adiabatici* in « Atti del Congresso Internazionale dei matematici, tenutosi a Bologna nel 1928 », Tomo V.

(8) Cfr. per esempio A. SOMMERFELD, *La constitution de l'atome et le raies spectrales*. Tomo I, p. 375 e sgg. (Paris, Blanchard, 1923).

(9) Cfr. G. ARMELLINI, Mem. cit. in « Mem. dei XL », ser. 3ª, Tomo XIX, p. 24.

(10) Cfr. G. ARMELLINI, Nota cit. in « Rend. Lincei », sem. I (1932).

dove h, nel caso di moto ellittico, è sempre *negativa*; e ricordiamo pure che h è legata all'eccentricità dell'orbita descritta da B intorno ad A dalla formola

$$e^2 = 1 + \frac{2hc^2}{f^2 M^2} \cdot \tag{11}$$

Ora, se M varia col tempo, h non si mantiene più costante; e precisamente se nell'istante t la massa aumenta di dM, la (10) mostra subito che h subisce una variazione dh data da

$$dh = -f\frac{dM}{r}. \tag{12}$$

In conseguenza, indicando con h_0 ed h_1 i valori di h nell'istante iniziale t_0 e nell'istante finale t_1 avremo

$$h_1 = h_0 - f\int_{t_0}^{t_1}\frac{dM}{r}. \tag{13}$$

La (11) e la (13) ci dànno quindi immediatamente

$$e_1^2 - e_0^2 = \frac{2c^2}{f^2}\left(\frac{h_1}{M_1^2} - \frac{h_0}{M_0^2}\right) = \frac{2c^2}{f^2 M_1^2}\left[h_0\left(1 - \frac{M_1^2}{M_0^2}\right) - f\int_{t_0}^{t_1}\frac{dM}{r}\right]. \tag{14}$$

Ma si ha dalla (11)

$$h_0 = -\frac{(1-e_0^2)f^2 M_0^2}{2c^2} \tag{15}$$

onde la (14) si riduce alla formola

$$e_1^2 - e_0^2 = (1-e_0^2)\left(1 - \frac{M_0^2}{M_1^2}\right) - \frac{2c^2}{fM_1^2}\int_{t_0}^{t_1}\frac{dM}{r} \tag{16}$$

in cui M è funzione nota del tempo, ed r è data dalla (9) dove p è legata ad M dalla (7) mentre ϑ deve essere espressa in funzione di t per mezzo della (6).

9. Il calcolo dell'integrale è molto complicato. Ma, almeno nell'ipotesi che l'eccentricità si conservi sempre moderata e che si richiedano soltanto le perturbazioni secolari (le uniche interessanti dal lato cosmogonico), può essere semplificato osservando che al denominatore della (9) il termine $e\cos(\vartheta - \omega_0)$ è sempre piccolo ed assume alternativamente valori positivi e negativi durante ogni rivoluzione. Approssimatamente potremo quindi sostituire r con p e cioè, per la (7), con il rapporto c^2/fM. Avremo allora immediatamente

$$\frac{2c^2}{fM_1^2}\int_{t_0}^{t_1}\frac{dM}{r} = \frac{2}{M_1^2}\int_{t_0}^{t_1} M\,dM = 1 - \left(\frac{M_0}{M_1}\right)^2 \tag{17}$$

e quindi la (16) diverrà

$$e_1^2 - e_0^2 = -e_0^2\left(1 - \frac{M_0^2}{M_1^2}\right). \tag{18}$$

Riducendo si ha immediatamente

$$e_1 M_1 = e_0 M_0 \tag{19}$$

la quale ci mostra che l'*eccentricità dell'orbita di* B *varia in ragione inversa della massa del sistema binario a cui appartiene.*

Chiamando allora con a_0 ed a_1 i valori dei semiassi maggiori dell'ellisse descritta da B prima e dopo la diminuzione di massa prodotta dall'emissione corpuscolare, ed indicando con p_0 e p_1 i valori del parametro, la (7) ci dà

$$\frac{a_1}{a_0} = \frac{p_1 (1 - e_0^2)}{p_0 (1 - e_1^2)} = \frac{M_0 (1 - e_0^2)}{M_1 \left[1 - \left(\frac{e_0 M_0}{M_1}\right)^2\right]} \tag{20}$$

da cui, essendo $M_0 > M_1$ ricaviamo subito $a_1 > a_0$. In altre parole, dopo avvenuta la diminuzione di massa, il satellite B descriverà intorno ad A un'orbita *più estesa e più eccentrica* dell'orbita primitiva, come appunto si osserva nelle stelle doppie.

10. Riepilogando, l'ipotesi di Ambartsumian e Fessenkov, oltre a facilitare la spiegazione del diagramma di Russell, faciliterebbe anche la spiegazione dei fenomeni che l'osservazione dimostra avvenire nelle stelle doppie. Non si comprende però perché gli astri, dopo la loro formazione, debbano essere soggetti ad una fortissima diminuzione di massa (secondo Ambartsumian, la massa dell'astro adulto sarebbe appena la decima parte di quello primitivo) per emissione corpuscolare. E gli stessi sostenitori della ipotesi non hanno potuto addurre in proposito valide ragioni.

Fisica. — *Gravità, inerzia e relatività.* Nota (*) del Socio QUIRINO MAJORANA.

In una Nota precedente (1), ho proposto una nuova interpretazione della liberazione di energia, che si verifica nella formazione di nuclei atomici, connessa col fenomeno del *difetto di massa*. Ho fatto vedere come si possa pensare che quest'ultimo fenomeno non corrisponda ad una vera e propria sparizione di una parte della materia, ma ad un affievolimento di qualcuna delle sue proprietà. Ho avanzato tale ipotesi, tenendo conto delle forze tra le particelle materiali, vicinissime (i nucleoni), che sono 10^{38} volte maggiori di quelle newtoniane. Più propriamente, è possibile ammettere che tale altissimo valore delle forze attrattive, manifestantesi solo a distanze assai ridotte (dell'ordine di 10^{-12} cm), sia la causa dell'apparente riduzione della massa, quando si studiano le sue proprietà. Accettando un'ipotesi del genere, si scarterebbe quella di Einstein, della trasformazione, cioè, di materia in energia, o viceversa. L'energia che si libera non risulterebbe che dal lavoro delle

(*) Presentata nella seduta del 13 giugno 1953.
(1) Questi « Rendiconti », vol. XIII, pp. 97-103 (1952).

enormi forze suddette, che hanno dato luogo alla formazione del nucleo, e sarebbe, come nella meccanica classica, un attributo cinetico o potenziale della materia. Apparisce una simile idea molto più soddisfacente della teoria di Einstein, che non dà alcun chiarimento spaziale o temporale di quell'ente libero vagante nello spazio. In conseguenza, la relazione $E = mc^2$, che pur apparisce verificata dall'esperienza con tutta precisione, rappresenterebbe una coincidenza fortuita, od avrebbe bisogno di una spiegazione che per ora ci sfugge.

Forse per semplicità, completavo l'ipotesi avanzata, ammettendo che non solo la qualità attrattiva o pesante della materia, verrebbe ad affievolirsi, per il congiungimento di due nucleoni, ma anche quella inerte. Così, verrebbe rispettato un principio o legge, che sinora è sembrato esser compreso tra quelli, con maggior precisione verificati dall'esperienza. Tra tali verifiche sono da ricordarsi: quelle di Newton, sulla caduta dei corpi nel vuoto o pendolari; quelle più precise di Bessel; od, infine quelle di Eötvös e di Pekàr [2]. In queste ultime, la accennata precisione arriva ad 1/200.000.000, per talune esperienze, e persino, ad 1/2.000.000.000, per quelle compiute con bilancia di torsione, che avrebbe dovuto svelare uno scarto, nel confronto fra attrazione terrestre o solare, e forza centrifuga.

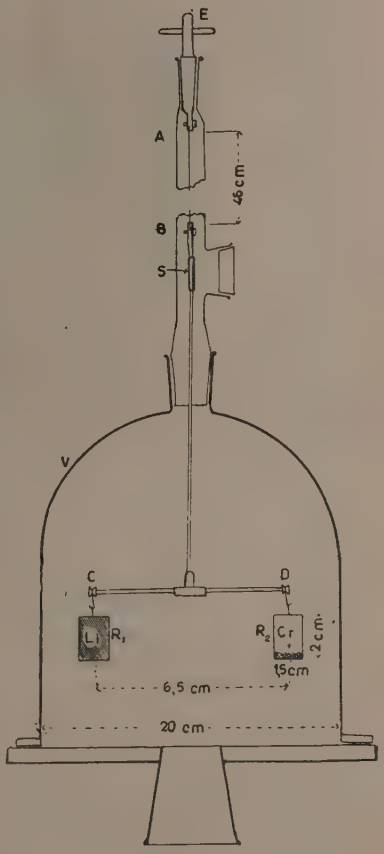
È tuttavia da osservare, che in tutte queste esperienze si è trattato di confrontare effetti dinamici o statici, dovuti alla contemporanea azione di forze gravifiche e d'inerzia. Inoltre, la maggior precisione, ora ricordata, corrisponde esclusivamente al caso di effetti statici, nei quali le dette forze, che si fanno equilibrio, non compiono alcun lavoro.

Per quanto, in considerazione di tali risultati, potrebbe sembrare superfluo istituire nuove ricerche, tendenti ancora a verificare, per la materia, la proporzionalità tra gravità ed inerzia, mi è sembrato interessante e non superfluo, quale nuovo programma di lavoro sperimentale, confrontare separatamente l'effetto del peso con quello dell'inerzia. Per ciò fare, quest'ultima dovrebbe agire in solo contrasto, non con la forza di gravità, ma con una forza diversa, come quella di torsione di un filo. Dopo vari tentativi, ho realizzato, con tale scopo, il dispositivo che ora descriverò. Le dimensioni o misure delle sue varie parti sono state fissate, col proposito di ottenere la maggiore evidenza e stabilità dei risultati.

Una *bilancia di torsione* (distinguere tale bilancia, da quella a giogo rigido e coltelli, che pure verrà adoperata, e che chiamerò *bilancia comune*), contenuta in una campana di vetro, V, del diametro di 20 cm., nella quale si può fare il vuoto più spinto, mediante una pompa Holweck, è costituita da un filo di torsione di tungsteno AB, del diametro di 45 μ, e della lunghezza di 46 cm (la figura non indica, per chiarezza, le sue parti con scala uniforme); tale filo è connesso in alto, ad una testa di torsione, E, coman-

(2) «Math. und Naturwissensch. Berichte auf Ungarn», B. 8, 1890; «Naturwissenschatten», 1919, pp. 327–311; «Beiblät. der Ann. der Physik», 1919, S. 557–559.

dabile dall'esterno. In basso, il filo di torsione è connesso con un giogo di 6,5 cm di lunghezza, CD, fornito di specchio, S, per l'osservazione su scala, posta ad un metro di distanza e graduata in mm. L'equipaggio è indeformabile, perché costituito da leggerissimi tubi di vetro, insieme connessi; il suo peso complessivo è di circa 1 gr. Agli estremi di tale giogo, sono appesi due recipienti chiusi, di *electron* (lega di magnesio, densità 1,75), del peso, se vuoti, di 0,900 gr ciascuno, R_1, R_2, di 1,5 cm di diametro e 2 cm di altezza. Essi, perfettamente eguali di forma, dimensioni e peso, sono ricambiabili; ed in tale operazione, viene garantita una precisione di uniforme collocamento, di circa 1 μ. Forse, però, una qualche incontrollabile imprecisione, in tale aggiustaggio, permane, che non sono riuscito a togliere del tutto.



I recipienti R_1 ed R_2 sono destinati a contenere vari metalli, con uno dei quali, in entrambi, si sperimenta ogni volta. Nel caso del metallo più leggero da me usato, il litio (densità 0,55), tutto il volume di ciascuno dei due recipienti è completamente occupato. Se si pongono nei recipienti altri metalli (foggiati in dischi di 1,45 cm di diametro, o in piccoli frammenti), questi non occupano che una piccola parte in basso, di ciascun recipiente. Nella figura, il recipiente R_1 è pieno di litio, ed R_2 contiene un altro metallo in frammenti. Ma realmente si sperimenta con entrambi i recipienti nelle stesse condizioni, perché occupati, come si è detto, dallo stesso metallo. In ogni caso, il peso di ciascun recipiente contenente metallo, è lo stesso, e vien fatto uguale ad $M = 2{,}823$ gr, con una precisione superiore al mg. Così il metallo contenuto ha, in ogni lato, il peso $m = 1{,}923$ gr. La testa di torsione E, riportabile sempre nella stessa posizione angolare, permette di imprimere al giogo oscillazioni di voluta ampiezza, controllabili con un raggio luminoso riflesso dallo specchio, intorno ad un punto centrale della scala, ad 1 m di distanza. La campana ha, nel suo interno, un rivestimento di alluminio, che, insieme alla testa ed al filo di torsione, ed all'equipaggio, con entrambi i recipienti, vien posto in connessione metallica col suolo, per evitare accidentali perturbazioni elettriche.

Se r è il raggio di ciascun recipiente, d la semilunghezza del giogo CD, M la massa complessiva di uno dei recipienti con metallo, il periodo completo di oscillazione del giogo può esser dato da:

$$t = 2\pi\sqrt{\frac{2M(r^2/2 + d^2)}{H}},$$

dove H è una costante dipendente dalle caratteristiche del filo di torsione. Per vero, la formula (oltre a trascurare la massa del giogo) non è del tutto esatta, perché non tien conto del fatto che le sottili pareti del recipiente cilindrico dovrebbero dar luogo ad una formulazione distinta del loro momento di inerzia. Ma è da osservare che i recipienti son sempre gli stessi in tutte le esperienze; e si può ammettere che da tale inesattezza derivi una diversa valutazione della costante H, che non importa conoscere. La formula stessa è stata scritta per affermare che il valore di t è proporzionale alla radice quadrata della massa complessiva M di ciascun recipiente. Se è rispettato il principio della esatta proporzionalità della massa inerte a quella pesante, e se M è costante, il valore di t dovrebbe risultare costante, indipendentemente dalla qualità del metallo e dalla sua densità. L'aver trascurato il computo esatto del momento d'inerzia dei recipienti, non avrebbe perciò influenza alcuna. Ma, per le ragioni che risulteranno da quanto sarà detto, lo scopo della ricerca è precisamente quello di verificare, o meno, la detta costanza di t, e conseguentemente il principio di quella proporzionalità.

Si sono avute particolari cure, per ottenere, in misure del genere, la più grande precisione possibile. Debbo dire, anzitutto, che quando incominciai ad usare il descritto dispositivo (nov. 1952), era mia intenzione di sperimentare nel vuoto più spinto. Se ciò fosse stato possibile, le oscillazioni della bilancia sarebbero state poco o per nulla smorzate, potendosi così accrescere il numero di quelle osservabili, e conseguendo perciò, una maggior precisione, nella determinazione del periodo t. Ma, principalmente per la lunghezza del tempo occorrente alla preparazione del vuoto ed al ricambio del metallo, oltre che per gli sbalzi termici inevitabilmente connessi, ho dovuto per ora rinunziare a tale proposito. Ho lavorato così, negli ultimi cinque mesi, sempre a pressione atmosferica normale, rassegnandomi ad osservare oscillazioni necessariamente molto smorzate. Ho potuto eliminare, nel modo seguente, gli inconvenienti derivanti da tale fatto.

Gli elementi o metalli, con cui ho sperimentato, sono tutti allo stato solido: litio, cromo, rame, platino, piombo, così scritti in ordine crescente di massa atomica. Essi hanno, inoltre, diversa densità. Valutando la loro massa con la bilancia comune, usata naturalmente alla pressione atmosferica ambiente, si incorre in un errore dovuto alla spinta dell'aria, diversa da caso a caso. Infatti, mentre i recipienti contenenti litio hanno chiusura ermetica (ottenuta mediante piceina), per evitarne l'alterazione chimica, ciò non avviene per quelli con altri metalli, al fine di poter ricambiare questi facilmente. Per cui, i recipienti con litio, subiscono, da parte dell'atmosfera, una spinta alquanto superiore agli altri. Ho valutato che tale incremento

di spinta è di 4,3 mg. Per correggere tale causa d'errore, al fine che in ciascun recipiente sia racchiusa sempre la stessa massa pesante, basta diminuire di tale quantità il peso apparente di litio usato, in confronto degli altri metalli, che hanno densità da 13 a 40 volte superiore, e per i quali una simile causa d'errore non è più sensibile.

Come ho detto, le oscillazioni complete, della bilancia di torsione, sono lette su scala, graduata in mm, ad 1 m di distanza. Tali letture si fanno a gruppi o serie, numericamente sempre eguali: 20 ogni volta. L'inizio delle letture di ogni serie ha luogo, partendo sempre da una stessa ampiezza: 190 mm, con 5 mm di tolleranza, a destra dello zero centrale della scala. Lo smorzamento, dovuto principalmente all'aria esterna, è tale, che quando si legge la 20ª oscillazione, la sua ampiezza è ridotta quasi 1/6, cioè 30 mm circa. Con un cronografo a mano, si determina il tempo fra il primo passaggio del raggio luminoso, sul centro della scala, da destra a sinistra, ed il 20°; esso è un po' maggiore di 22 minuti primi. Diciamo T questo tempo. Si può ricavare da esso il valore medio del periodo di oscillazione *t*. Si dice così, perché oscillazioni di diversa ampiezza, non hanno esattamente lo stesso periodo. Ma, per i confronti che ora si faranno, basta considerare la durata complessiva, T, delle 20 oscillazioni. Essa risulta ogni volta determinata, con un errore dell'ordine del diecimillesimo. Per ottenere ciò, occorre irrigidire gli attacchi, in alto ed in basso, del filo di torsione, servendosi di speciali morsettini di acciaio, a vite. Inoltre occorre lasciar riposare la bilancia, prima di incominciare le serie di letture, per più ore. Uno squilibrio termico, anche lievissimo, nell'interno della campana, provoca correnti convettive, sia pur deboli e lentissime, di aria, intorno ai recipienti. Ciò dà luogo a maggior dispersione della energia cinetica del giogo, a maggior smorzamento ed allungamento del periodo. Usando tali cautele, non è infrequente leggere due serie successive di oscillazioni, la cui durata T non differisce di 1/10 di secondo; come per esempio, 1331,5.

Nel corso di queste ricerche, ho potuto intravedere un'altra forse possibile causa di errore, alla quale non pensavo *a priori*. Essa può dipendere dal campo magnetico terrestre. Se si sperimenta con metalli compatti, e senza soluzione di continuità nella loro conducibilità elettrica, mi è sembrato che il valore di T risulti superiore, per una notevole frazione di secondo, rispetto a quando si usano metalli in grani o frammenti. Il fatto potrebbe se vero, essere attribuibile al noto fenomeno delle correnti di Foucault, che tenderebbe a rallentare il moto di un conduttore in un campo magnetico. Ma, non essendo scopo delle mie ricerche, indagare su ciò, sia sperimentalmente che teoricamente, mi sono messo al riparo di una perturbazione del genere, usando sempre metalli in frammenti (grani, tornitura, ecc.). Nel caso del litio, tali frammenti, preventivamente alterati in superficie dall'atmosfera, vengono compressi al martello dentro i recipienti, al fine di ridurre il volume complessivo del loro ammasso.

Non sono da temersi perturbazioni dovute alle qualità para- o diamagnetiche dei metalli usati, anche perché i recipienti hanno forma circolare

nel piano di oscillazione, e non è possibile che si formi su di essi una coppia direttiva. Ho, per ora, scartato di sperimentare con metalli ferromagnetici.

Le osservazioni compiute mediante il descritto dispositivo si riferiscono ai metalli predetti: litio, cromo, rame, platino, piombo. Quelle concernenti il litio ed il cromo sono state molto più numerose: più centinaia di serie, ciascuna di 20 oscillazioni.

Prima di esporre i risultati numerici, accenno al fatto nuovo ed assai interessante, che da essi deriva, e che appare decisamente in contrasto con le teorie classiche; esso a me già sembra sicuramente accertato:

Le oscillazioni della bilancia di torsione sono alquanto diverse, usando il cromo, piuttosto che il litio. Lo stesso fatto, ma in misura più ridotta si verificherebbe per gli altri elementi usati, e probabilmente per tutti gli altri a massa atomica superiore al cromo.

Per ora, mi limito ad accennare ai risultati numerici concernenti il litio ed il cromo. La durata di 20 oscillazioni, della bilancia di torsione, risulta, in media, per il litio, di $T = 22^{min}\ 11^{sec},79 = 1331^{sec},79$. Per il cromo, si ha $T = 1333^{sec},54$. Per cui, si ha una differenza nelle durate di oscillazione, $\Delta T = 1^{sec},75$; e la differenza relativa di tali durate è $\Delta T/T = 0,0013$. Se questo risultato, come a me sembra, è esatto, tale differenza può essere attribuibile ad una maggiore inerzia del cromo, rispetto al litio (rivelata dalla bilancia di torsione), benché le masse usate di questi due elementi (misurate con la bilancia comune) siano le stesse. È ancora da supporre, che la misura di questo incremento debba corrispondere alla proporzionalità del periodo di oscillazione della bilancia di torsione, alla radice quadrata delle masse stesse. Per cui, il recipiente con cromo dovrebbe possedere una massa inerte alquanto maggiore di quella per il litio, nel rapporto $\Delta M/M = 2\,\Delta T/T$. Ma è da osservare che la nuova ipotesi si riferisce alla sola massa m dell'elemento o metallo usato, prescindendo, cioè da quella del recipiente, che è costante in tutte le esperienze. Per cui, detto P il peso totale oscillante (2,823 gr), e p quello del metallo (1,923), la precedente relazione va sostituita dall'altra:

$$\Delta m/m = 2\,\Delta T/T \cdot P/p = 3\,\Delta T/T, \text{ circa.}$$

Sostituendo a $\Delta T/T$ il valore su riportato, si ha $\Delta m/m = 0,0039$. Ciò equivale a dire, che la massa del cromo usata, di 1,923 gr. (eguale alla bilancia comune, a quella del litio) appare come massa inerte superiore, per la quantità $1,923 \times 0,0039 = 0,0075$ gr.

Si può confrontare il precedente risultato col fenomeno cosidetto *difetto di massa*. Dai valori riportati nei vari trattati [3] si ricava che il difetto di massa del cromo (isotopo 52), rispetto al litio (isotopo 7), e non rispetto allo ossigeno, corrisponde, per unità di massa, a 0,00345. Nella nuova esperienza, ora descritta, si avrebbe invece che la massa unitaria del nucleo

(3) Cfr., per esempio, H. A. BETHE, *Elementary nuclear Theory*, New York, 1948, 3rd ed., pp. 123-139.

del cromo apparirebbe accresciuta nella misura di 0,0039, se studiata alla bilancia di torsione rispetto a quella indicata dalla bilancia comune. I valori 0,00345 e 0,0039, appariscono abbastanza prossimi, e si può pensare, giacché non coincidono, che ciò possa essere dovuto ad errore di osservazione. Ma tali valori si riferiscono ad esperienze di natura del tutto differente, che, per ora, non possono mettersi in reciproco confronto.

L'interpretazione di tali fatti appare dunque difficile, come la formulazione, per essi, di una soddisfacente teoria, che finirebbe per ledere uno dei principî meccanici, accettati sinora, con tutta fiducia. Ad ogni modo, prima di tentare di far ciò, sarebbe meglio possedere dati più precisi e sicuri, estesi anche a tutti gli altri elementi del sistema periodico, con cui sia possibile sperimentare.

A parte tali riserve, è da osservare che l'ipotesi più logica, a prima vista formulabile, dell'accrescimento, cioè, della massa inerte, per gli elementi di massa atomica media, come il cromo, può essere invertita. Si può infatti, pensare che non si tratti per nulla di accrescimento delle proprietà inerti della materia, quando essa è costretta a muoversi di moto accelerato o ritardato (come nella bilancia di torsione); ma piuttosto di subire, la materia di massa intermedia (come il cromo), l'azione del campo gravitazionale terrestre, in modo più attenuato. Ciò costituirebbe una prova convincente, della giustezza della teoria da me proposta nella precedente Nota, citata. Avverrebbe cioè, che la materia stessa, pur apparendo alla bilancia comune più leggera, conserverebbe in pieno le sue proprietà di inerzia, quando una causa esterna cerca di sospingerla (come avviene nella bilancia di torsione).

L'accettazione di tale nuovissima ipotesi, che a me sembra per ora del tutto giustificata, contradirebbe il principio della esatta proporzionalità, fra massa pesante e massa inerte. E tale asserzione verrebbe a costituire così, l'argomento sperimentale più decisivo, contro le teorie di Einstein. A queste, tanto alla speciale, quanto alla generale (e specialmente a quest'ultima) verrebbe a mancare una delle basi fondamentali. Appare dunque chiaro, che i risultati ora riportati costituirebbero l'*experimentum crucis* più evidente, della inconsistenza di quelle teorie, di cui, da anni, ho esposto i gravi difetti logici.

Per concludere, non mi sembra si possano formulare sicuri dubbi sulla accettabilità degli annunziati risultati. Tuttavia, è mio desiderio che i descritti dispositivi vengano alquanto perfezionati, col predisporre nuove esperienze, mediante bilancie di torsione oscillanti, nel vuoto più perfetto. Si potrebbe così ottenere una molto maggior precisione, nella determinazione dei periodi. Inoltre, occorrerebbe servirsi di fili di torsione in quarzo, la qual cosa, per varie ragioni, non mi è sinora riuscita. Ed infine, sarebbe auspicabile una registrazione automatica, fotografica, dei periodi delle oscillazioni.

Ritengo che la definitiva conferma dei risultati esposti, possa avere una grande importanza, per il progresso delle moderne teorie fisiche. Per mio conto, cercherò, ove ne abbia la possibilità, di conseguire tale scopo,

malgrado che gli organi competenti, per ingiustificate ragioni, non abbiano mai voluto concedermi adeguati mezzi, di lavoro sperimentale.

Aggiunta, nel riveder le bozze. – Nell'eseguire le descritte esperienze, vi è stata una delicata causa di errore, alla quale, dapprima, non avevo posto mente. È giusto che i recipienti con Litio subiscano una spinta dall'aria ambiente, superiore per 4,3 mg, rispetto agli altri, con metalli più pesanti. Ma in questi (perché chiusi non ermeticamente) al posto del litio vi ha dell'aria, che avendo una massa espressa dal valore di quella spinta, e venendo trascinata nelle oscillazioni della bilancia di torsione, contribuisce a definire il periodo di queste. Per cui, non si doveva alleggerire il litio, in misura uguale alla spinta stessa. Deriva da ciò, una correzione nella valutazione di $\Delta m/m$, che porterebbe a tale diminuzione del suo valore, da renderlo alquanto incerto. Se l'effetto effettivamente esiste, lo si potrà mettere in evidenza sicura, con dispositivi più perfezionati, di quelli da me sinora usati.

Chimica biologica. — *Influenza del 2–4–dinitro–fenolo sul metabolismo del glucosio e del fosfato in diaframma di ratto* (*). Nota di ANNE BELOFF–CHAIN, RAFFAELLA CATANZARO, ERNST BORIS CHAIN, LUIGI LONGINOTTI, INES MASI, FRANCESCO POCCHIARI e CESARE ROSSI, presentata (**) dal Socio E. B. CHAIN.

L'effetto dell'insulina sul metabolismo del glucosio nel diaframma isolato di ratto è stato già descritto in una precedente Nota (1). Nella presente comunicazione è stata studiata l'influenza del 2–4–dinitro–fenolo (DNF) sulla distribuzione del C^{14} nel diaframma di ratto incubato con glucosio uniformemente marcato.

Secondo Villee, Deane e Hastings (2), incubando un diaframma di ratto con glucosio al 0,2 %, l'aggiunta del DNF ad una concentrazione finale del 5×10^{-5} molare, oltre ad aumentare il consumo di ossigeno e ad inibire quasi completamente la formazione di glicogeno, provoca una diminuzione nella scomparsa di glucosio dal mezzo, mentre d'altra parte aumenta la quantità di glucosio metabolizzata a CO_2.

Pierce e Field (3), incubando il diaframma di ratto con glucosio al 0,1 %, in presenza di DNF ad una concentrazione molare del $4{,}76 \times 10^{-5}$, hanno

(*) Lavoro eseguito nel Laboratorio di Chimica biologica dell'Istituto Superiore di Sanità di Roma.

(**) Nella seduta del 13 giugno 1953.

(1) A. BELOFFF–CHAIN, R. CATANZARO, E. B. CHAIN, O. D'AGOSTINO, I. MASI, F. POCCHIARI e C. ROSSI, « Rend. Accad. Lincei » [8], vol. XIV, fasc. 5, pp. 589–595 (1953).

(2) C. A. VILLEE, H. W. DEANE e A. B. HASTINGS, « Journ. Cell. Comp. Physiol. », *34*, 159 (1949).

(3) F. T. PIERCE e J. FIELD, « Journ. Biol. Chem. », *180*, 895 (1949).

ottenuto una rapida glicogenolisi, un forte aumento nel consumo di ossigeno e non hanno trovato alcun effetto statisticamente significativo sulla scomparsa del glucosio.

In questo lavoro sono state eseguite due esperienze, ognuna incubando separatamente per 90 minuti a 37° C quattro pezzi di circa 40 mg del diaframma di un ratto: nella esperienza 1, il diaframma è stato immerso per 3 minuti in DNF [4] e quindi incubato con glucosio uniformemente marcato C^{14} al 0,1 % contenente DNF $4{,}8 \times 10^{-5}$ molare; nella esperienza 2, invece, il DNF è stato aggiunto dal braccio laterale della vaschetta di Warburg dopo avere incubato il diaframma per 15 minuti con glucosio marcato al 0,1 %. Per controllo, in ambedue le esperienze, due dei quattro pezzi del diaframma sono stati incubati, nelle medesime condizioni, ma senza DNF.

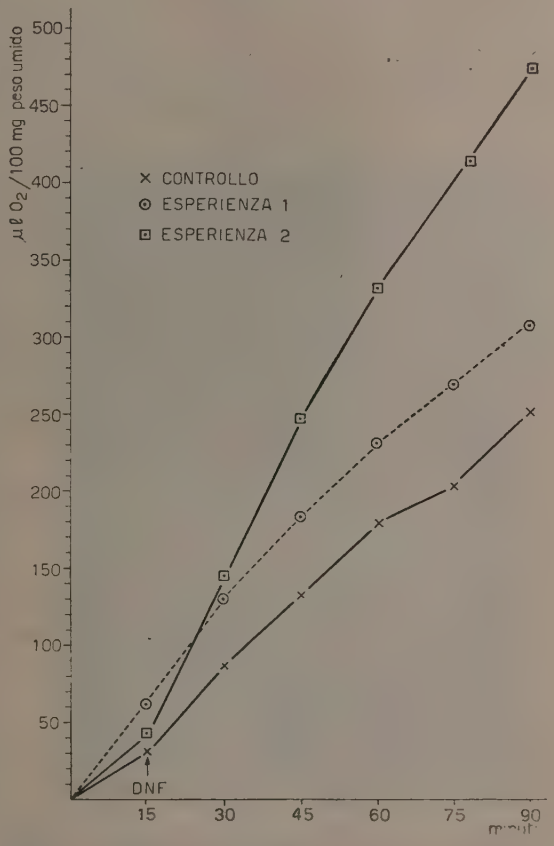


Fig. 1. – *Influenza del* DNF *sul consumo di ossigeno.* (Nell'esperienza 1 il diaframma, precedentemente trattato con DNF per 3 minuti, è stato incubato nel mezzo contenente DNF. Nell'esperienza 2 il DNF è stato aggiunto al mezzo dopo 15 minuti di incubazione del diaframma).

Il consumo di ossigeno durante l'incubazione, misurato secondo l'usuale tecnica di Warburg, è rappresentato nella fig. 1. Si vede chiaramente che mentre nell'esperienza 1 il consumo di ossigeno è maggiore che nel controllo soltanto nei primi 30 minuti, nell'esperienza 2 esso è nettamente superiore al controllo per tutto il periodo di incubazione.

La misura della radioattività dell'estratto alcoolico-acquoso del diaframma, del mezzo dopo incubazione e della CO_2, è stata eseguita con la stessa tecnica descritta in una Nota precedente [1]; questa volta però, è stato possibile misurare la radioattività delle singole macchie della zona 1 che è

(4) W. C. Stadie, N. Haugaard e J. B. Marsh. « Journ. Biol. Chem. », *188*, 173 (1951).

stata meglio frazionata (fig. 2) ed inoltre, ricromatografando la zona 3 in butanolo–acido acetico–acqua, si è potuto separare il glucosio da un'altra sostanza, probabilmente un estere fosforilato. La zona comprendente gli Rf 0,55–0,74, cioè quella tra la macchia del glucosio e la macchia dell'acido lattico del radiocromatogramma del mezzo, è stata poi misurata quantitativamente, poiché, questa volta, mostrava una considerevole attività. Infine il glicogeno del residuo insolubile, digerito in KOH al 30 %, è stato precipitato con alcool ed idrolizzato secondo il metodo di Walaas e Walaas [5]; dell'idrolizzato cromatografato è stata poi misurata la radioattività. Tutti i valori delle singole radioattività sono riportati nella tabella I.

TABELLA I.

Influenza del 2–4–dinitrofenolo (DNF) *sulla distribuzione del* C^{14} *dopo incubazione del diaframma di ratto con glucosio uniformemente marcato.*

(Nell'esperienza 1 il diaframma, precedentemente trattato con DNF per 3 minuti, è stato incubato nel mezzo contenente DNF. Nell'esperienza 2 il DNF è stato aggiunto al mezzo dopo 15 minuti di incubazione del diaframma. Concentrazione molare del DNF nel mezzo = $4{,}8 \times 10^{-5}$. I risultati sono espressi in % delle radioattività totali ritrovate).

Esperienze	DNF	CO_2	Acido lattico	Mezzo Rf = 0,55 0,74	Estratto alcoolico acquoso						Glicogeno da residuo insolubile
					Zona 1			Zona 2	Zona 3		
					Rf = 0	Rf = 0,03	Rf = 0,07	Rf = 0,16	Glucosio	(*)	
1	—	10	29,3	26,7	4,7	1,5	3,5	4,1	7,2	3,5	9,1
	—	8,6	34,2	29,8	3,5	0,8	2,4	2,1	8,2	1,6	7,8
	+	36,6	9,1	24,8	0,3	0	0	0,4	28,5	0	0
	+	47,7	9,0	18,8	0,2	0	0	0,5	23,5	0	0
2	—	14,2	19,8	42,2	2,5	1,1	1,5	1,2	12,0	1,3	4,8
	—	6,3	20,6	34,6	7,8	2,5	3,5	2,8	8,3	2,9	9,4
	+	40	19,0	30,9	0,2	0	0,1	0,6	8,8	0	0
	+	50,5	18,0	21,6	0,2	0	0,2	0,2	9,0	0	0

(*) Radioattività della macchia, probabilmente dovuta a intermedi fosforilati, che si è separata dal glucosio ricromatografando la zona 3 in butanolo–acido acetico–acqua (4 : 1 : 5).

Da tali risultati è evidente che in ambedue le esperienze in presenza di DNF, tutte le attività delle macchie delle zone 1 e 2 del radiocromatogramma

(5) O. WALAAS e E. WALAAS, « Journ. Biol. Chem. », *187*, 769 (1950).

dell'estratto alcoolico–acquoso sono notevolmente diminuite o del tutto annullate (vedi anche fig. 2), che non vi è glicogeno nel residuo insolubile, e che, ricromatografando la zona 3 in butanolo–acido acetico-acqua non si trova alcuna traccia di sostanze fosforilate; risulta inoltre, in accordo con Villee e collaboratori [2], che la quantità di glucosio metabolizzato a CO_2 aumenta notevolmente. Nell'esperienza 1 si è inoltre trovato che il DNF fa aumentare la quantità di glucosio non trasformato presente nell'estratto alcoolico–acquoso e diminuire la quantità di acido lattico prodotto; bisogna ancora notare che in queste condizioni l'utilizzazione del glucosio del mezzo è ridotta del 30 % circa rispetto al controllo.

Fig. 2. – Radioautografia dei cromatogramma degli estratti alcoolico–acquosi di diaframma di ratto, incubati con glucosio uniformemente marcato C^{14} con e senza DNF. (A = controllo B = + DNF).

Una probabile spiegazione, ma non la sola, di questi risultati, potrebbe essere che il glucosio sia prima sintetizzato a glicogeno o ad altri prodotti di sintesi e quindi metabolizzato a CO_2 e che l'effetto del DNF sia quello di accelerare questo catabolismo a CO_2.

Per convalidare l'ipotesi che la formazione del glicogeno preceda quella della CO_2, è stata studiata la velocità di formazione di ambedue, incubando il diaframma con glucosio marcato per 3, 15, 30 e 60 minuti. I risultati di questa esperienza sono rappresentati nella fig. 3: in accordo con le previsioni si è visto che dopo 15 minuti vi è un notevole accumulo di glicogeno radioattivo, mentre è molto piccola la radioattività della CO_2 formatasi.

È ben conosciuto (vedi tra gli altri [6]) che il DNF influenza la fosforilazione ossidativa ed il consumo di ossigeno.

(6) R. D. Hotchkiss, « Advances in Enzymology », *4*, 153 (1943); W. F. Loomis e F. Lipmann, « Journ. Biol. Chem. », *173*, 809 (1948); J. D. Judah e H. G. Williams-Ashman, « Bioch. Journ. », *48*, 33 (1951); J. D. Judah, « Bioch. Journ. », *49*, 271 (1951).

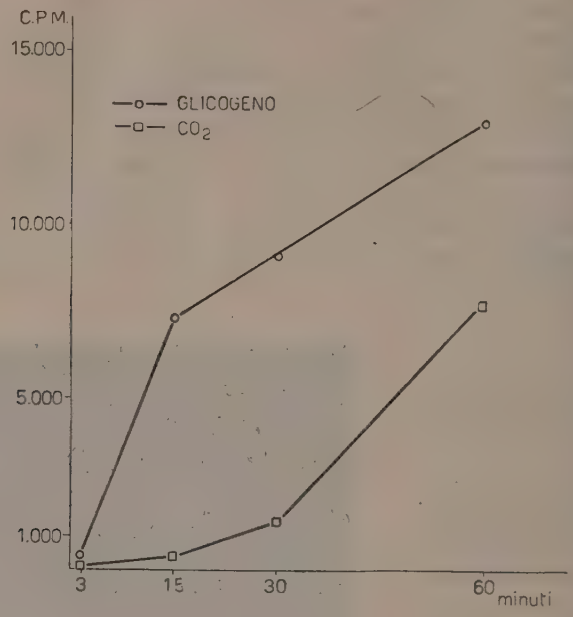


Fig. 3. – Radioattività del glicogeno e del CO_2 formati dal diaframma di ratto incubato con glucosio uniformemente marcato C^{14}.

(c. p. m. = counts per minuto).

TABELLA II.

Rf *delle macchie presenti nelle radioautografie dei cromatogramma del mezzo contenente fosfato marcato* P^{32} *e dell'estratto alcoolico acquoso di diaframma incubato.*

Mezzo dopo incubazione	Estratto alcoolico–acquoso
	0
	0,20
0,30	0,30
0,37	0,35
	0,51
0,65	0,65
0,75	0,76
	0,91

Sacks e Sinex [7], incubando il diaframma di ratto in un mezzo contenente fosfato inorganico P^{32}, hanno studiato l'effetto di varie concentrazioni del DNF sulla quantità e sul « turnover » dei composti contenenti fosforo acido-solubile ed hanno trovato che una concentrazione del DNF pari al 2×10^{-5} molare provoca un aumento della respirazione, una diminuzione della ATP, mentre la quantità di esosomonofosfati rimane costante; invece il « turnover » della ATP rimane inalterato e quello dell'esosomonofosfato aumenta.

In base a questi risultati è stato ritenuto interessante applicare il metodo di radiocromatografia allo studio dell'effetto del DNF sugli intermedi fosforilati del diaframma: sono state eseguite perciò due esperienze incubando pezzi di diaframma con fosfato sodico marcato P^{32} ed usando una tecnica simile a quella precedente. Nella prima esperienza un pezzo di diaframma è stato incubato in presenza di DNF senza substrato; nella seconda, invece, è stato aggiunto anche del glucosio inerte. Per controllo, in ambedue le esperienze, pezzi di diaframma sono stati incubati senza DNF.

Nella fig. 4 è presentato il radioautogramma degli estratti alcoolico-acquosi dei diaframma di entrambe le esperienze; in essa si vede che negli esperimenti di controllo il P^{32} appare in almeno sette metaboliti, i cui Rf son dati nella tabella II (Rf = 0,65 corrisponde al fosfato inorganico) e che non vi è alcuna differenza qualitativa tra le due esperienze di controllo, mentre l'intensità delle macchie appare leggermente aumentata quando il diaframma è incubato con glucosio.

Fig. 4. – Radioautografia dei cromatogrammi degli estratti alcoolico-acquosi di diaframma di ratto, incubati con $P^{32}O_4^{---}$ con e senza DNF.
A = Controllo con glucosio B = + DNF con glucosio
C = Controllo senza glucosio D = + DNF senza glucosio.

In presenza di DNF la radioattività di tutti gli intermedi fosforilati è notevolmente ridotta; in particolare non vi è alcun aumento della attività nella zona corrispondente agli esosomonofosfati. Ciò è in contrasto con quello che ci si sarebbe dovuto aspettare dai risultati di Sacks e Sinex [7].

L'interpretazione di questi risultati sarà discussa in una prossima, più estesa pubblicazione.

(7) J. SACKS e F. M. SINEX, « Arch. Bioch. », *39*, 205 (1952).

NOTE PRESENTATE DA SOCI

Analisi matematica. — *Un problema di valori al contorno per l'equazione* $\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ (*). Nota II di Bruno Pini, presentata (**) dal Socio M. Picone.

Attenuando ora le ipotesi sui dati, proviamo l'esistenza della soluzione per il problema generalizzato formulato nell'introduzione della precedente Nota I.

Precisamente:

II. *Se* ω *è una funzione continua su* D *insieme a* $\partial\omega/\partial x$*; se essa è assolutamente continua rispetto a* y*,* $\partial\omega/\partial x$ *è assolutamente continua rispetto a* x *e* $\partial\omega^2/\partial x^2$ *e* $\partial\omega/\partial y$ *sono di quadrato sommabile su* D*, allora la funzione* (6) *è in* D — $\mathfrak{F}$D *soluzione regolare di* (1)*, assume su* $\mathfrak{F}$D *i valori* ω *in senso ordinario, mentre*

$$\lim_{x \to \chi_i(y)} \frac{\partial v}{\partial x} = \left(\frac{\partial \omega}{\partial x}\right)_{\chi_i(y), y}, \qquad i = 1, 2, \tag{10}$$

per quasi-tutti i valori di y *con* $a \leq y \leq b$.

Intanto, poiché il primo dei due integrali (9) è continuo, le (6′) e (8′) assicurano che v assume su $\mathfrak{F}$D i valori ω. Non è invece più assicurata la continuità del secondo di tali integrali.

Ricordiamo ora, che, in base a un teorema di Lichtenstein, il potenziale

$$f(P) = \frac{1}{2\pi} \int_D \rho(Q) \lg \overline{PQ}\, dQ$$

se $\rho(Q)$ è una funzione di quadrato sommabile su D, per quasi-tutti gli y (x) è assolutamente continuo rispetto a x (y), mentre $\partial f/\partial x$ ($\partial f/\partial y$) è assolutamente continua rispetto a x (y); la $\partial^2 f/\partial x^2$ ($\partial^2 f/\partial y^2$) è a quadrato sommabile su D.

Una proposizione analoga sussiste per la

$$f(P) = -\frac{1}{2\pi} \int_D \rho(Q)\, U(P, Q)\, dQ,$$

solo che attualmente la $f(P)$ è assolutamente continua rispetto a x (y) per quasi-tutti gli y (x) mentre la $\partial f/\partial x$ è assolutamente continua rispetto a x; $\partial^2 f/\partial x^2$ e $\partial f/\partial y$ sono di quadrato sommabile su D.

(*) Lavoro eseguito nel Seminario Matematico dell'Università di Bologna.

(**) Nella seduta del 9 maggio 1953.

Per provare ciò si possono imitare i ragionamenti di Friedrichs [7]. Riferiamoci a un intervallo R_0 del piano x, y e sia R_1 un intervallo interno a R_0 ed R un intervallo interno a R_1; sia $H(x, y)$ una funzione, dotata delle derivate prime e seconde continue in R_0, eguale a 1 in R, compresa tra 0 e 1 in $R_1 - R$, ed eguale a 0 in $R_0 - R_1$. Supponiamo dapprima che ρ sia continua ed hölderiana rispetto a y in R_0, e quindi $f(P)$ continua con le derivate $\partial^2 f/\partial x^2$, $\partial f/\partial y$ nell'intervallo R_0 [8]. Si ha

$$(11) \qquad \int_R \left|\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2\right| dP < K_1 \int_{R_0} (\Omega[f])^2 dP + K_2 \int_{R_0} \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 dP,$$

per due certe costanti K_1 e K_2 dipendenti solo da R. Infatti

$$\int_R \left|\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2\right| dP \leq \int_{R_1} H\left[\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2\right] dP = \int_{R_1} H(\Omega[f])^2 dP + 2\int_{R_1} H \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\partial f}{\partial y} dP;$$

d'altra parte è

$$2H\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\partial f}{\partial y} = 2\frac{\partial}{\partial x}\left(H\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(H\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2\right) + \frac{\partial H}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 - 2\frac{\partial H}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y};$$

poiché, nelle ipotesi in cui ci si è posti, è $\partial^2 f/\partial x^2 - \rho = \partial f/\partial y$, riesce

$$-2\frac{\partial H}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y} = -2\frac{\partial H}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2\rho\frac{\partial H}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial H}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2\right) +$$

$$+ \frac{\partial^2 H}{\partial x^2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + 2\rho\frac{\partial H}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial x},$$

e quindi, per le ipotesi fatte su H di annullamento al contorno:

$$\int_R \left|\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2\right| dP \leq \int_{R_1} H(\Omega[f])^2 dP + \int_{R_1} \left|\frac{\partial H}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + 2\rho\frac{\partial H}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial^2 H}{\partial x^2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2\right| dP,$$

da cui la (11), con evidente significato per le costanti K_1 e K_2.

Analogamente si ha

$$(12) \qquad \int_R \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 dP < \Gamma_1 \int_{R_0} (\Omega[f])^2 dP + \Gamma_2 \int_{R_0} f^2 dP$$

per due certe costanti Γ_1 e Γ_2 dipendenti sclo da R. Infatti

$$\int_R \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 dP \leq \int_{R_1} H\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 dP = -\int_{R_1} Hf\Omega[f] dP + \int_{R_1} H\left[\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + f\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - f\frac{\partial f}{\partial y}\right] dP$$

(7) K. O. FRIEDRICHS, *A theorem of Lichtestein.* « Duke Math. J. », 67-81, *14* (1947).

(8) M. GEVREY, *Sur les équations aux dérivées partielles du type parabolique*, « Journ. de Math. » (6), *9* (1913).

e

$$H\left|\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+f\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}-f\frac{\partial f}{\partial y}\right|=\frac{\partial}{\partial x}\left(Hf\frac{\partial f}{\partial x}-\frac{1}{2}f^2\frac{\partial H}{\partial x}\right)-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial y}(Hf^2)+\frac{1}{2}f^2\,\overline{\varrho}\,[H]$$

onde

$$\int_{\dot{R}}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 dP \leqq -\int_{\dot{R}_1} Hf\varrho\,[f]\,dP+\frac{1}{2}\int_{\dot{R}_1} f^2\,\overline{\varrho}\,[H]\,dP\,,$$

da cui segue la (12).

Le diseguaglianze (11) e (12) sono le analoghe delle diseguaglianze (5) e (9) del citato lavoro di Friedrichs; esse, stabilite dapprima per ρ continua ed hölderiana in y, si estendono, con gli stessi ragionamenti usati da Friedrichs, al caso di ρ solo di quadrato sommabile (al laplaciano *forte* di quadrato sommabile si sostituirà l'operatore ϱ da intendere nello stesso senso); sulla base di tali diseguaglianze, ripetendo i ragionamenti di Friedrichs, si perviene a provare che la $f(P)$ per quasi-tutti gli y è assolutamente continua rispetto a x con derivata $\partial f/\partial x$ assolutamente continua rispetto a x. In base a ciò, dalle (6′) e (8′) si deduce la (10).

3. Poniamoci ora in uno spazio $(n+1)$-dimensionale e sia S una superficie come quella indicata nell'introduzione. Indichiamo ancora con $U(P,Q)$ la soluzione fondamentale dell'equazione del calore

$$U(P,Q)=\begin{cases}(y-\eta)^{-n/2}\exp\left[-\sum_1^n (x_i-\xi_i)^2/4\,(y-\eta)\right] & \text{per } y>\eta\\ 0 & \text{per } y\leqq\eta.\end{cases}$$

Ricordiamo che, posto

$$r^2=\sum_1^n (x_i-\xi_i)^2,$$

la funzione

$$\frac{r^\alpha}{(y-\eta)^\beta}\exp\left[-\sum_1^n (x_i-\xi_i)^2/4\,(y-\eta)\right]$$

è sommabile su D se

$$\alpha+1>0\quad,\quad \alpha+n+2-2\beta>0\ ^{(9)}.$$

Ora, procedendo allo stesso modo come per $n=1$, si giunge a una coppia di relazioni analoghe alle (6′), (8′). Continuando ad usare le stesse notazioni dei numeri precedenti, si ha:

(9) E. E. Levi, *Sull'equazione del calore*. «Annali di Mat.» (3), *14* n. 22, (1908).

1'. *Se* $\omega(x_1, x_2, \cdots, x_n, y)$ *è una funzione continua insieme alle* $\partial\omega/\partial x_i$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$ *su* D. *assolutamente continua rispetto a* y, *con le derivate* $\partial\omega/\partial x_i$ *assolutamente continue rispetto a* x_i *e con le derivate* $\partial^2\omega/\partial x_i^2$, $\partial\omega/\partial y$ *sommabili su* D *insieme al loro quadrato; se* $\mathfrak{L}[\omega] = \sum_1^n{}_k \frac{\partial^2\omega}{\partial x_k^2} - \frac{\partial\omega}{\partial y}$ *è sommabile su* D *con una potenza di esponente* $> n+2$, *e se esiste un numero* p, *tale che* $1 < p < (n+2)/(n+1)$, *per cui la serie*

$$\sum_1^\infty{}_k \left(\max_D |\varphi_k|\right)^{2-p} \left| \int_D \varphi_k \mathfrak{L}[\omega]\, dP \right|^p$$

sia convergente, allora la funzione $v(P)$ *analoga alla* (6') *è soluzione in senso ordinario del problema*

$$\bar{\mathfrak{L}}\mathfrak{L}[v] = 0 \quad \text{in} \quad D - \mathfrak{F}D$$

$$v = \omega \quad \text{su} \quad \mathfrak{F}D$$

$$\frac{\partial v}{\partial n} = \frac{\partial\omega}{\partial n} \quad \text{su} \quad S,$$

dove n *indica la normale in un punto di* S *all'intersezione di* S *con l'iperpiano caratteristico passante per tale punto e appartenente a tale iperpiano, diretta verso l'interno di* D.

Le ipotesi assicurano infatti la continuità degl'integrali

$$\int_{D_y} (\Phi + \mathfrak{L}[\omega])\, U\, dQ \quad , \quad \int_{D_y} (\Phi + \mathfrak{L}[\omega]) \frac{\partial U}{\partial x_i}\, dQ.$$

Si ha anche:

2'. *Se* ω *è una funzione continua su* D *insieme alle* $\partial\omega/\partial x_i$, *assolutamente continua rispetto a* y, *dotata delle derivate* $\partial\omega/\partial x_i$ *assolutamente continue rispetto a* x_i *e delle derivate* $\partial^2\omega/\partial x_i^2$, $\partial\omega/\partial y$ *di quadrato sommabile su* D, *allora la funzione* $v(P)$ *analoga della* (6') *è in* $D - \mathfrak{F}D$ *soluzione regolare di* $\bar{\mathfrak{L}}\mathfrak{L}[v] = 0$, *assume i valori* ω *in quasi-tutti i punti della* $\mathfrak{F}D$ *lungo la normale (secondo l'asse* y *se il punto appartiene a una delle basi di* D, *normalmente a* S *lungo il corrispondente iperpiano caratteristico se il punto appartiene ad* S); *la* $\partial v/\partial n$ *converge a* $\partial\omega/\partial n$ *in quasi-tutti i punti di* S *secondo la normale ad* S *sul corrispondente iperpiano caratteristico.*

Ciò si prova con gli stessi ragionamenti di Fichera, convenientemente adattati, sulla base della proposizione che estende al caso parabolico il teorema di Friedrichs.

Analisi matematica. — *Contributo alla risoluzione del problema piano di Dirichlet.* Nota di GIOVANNI ZIN, presentata (*) dal Corrisp. G. ASCOLI.

1. Saranno ora esposti alcuni fra i risultati conseguiti dall'autore nello studio del problema piano di Dirichlet (1).

Fatta eccezione per il n. 5 della presente Nota, con C si intenderà una curva continua, chiusa, semplice, rettificabile, del piano della variabile complessa $z = x + iy$; con D il dominio costituito dai punti di C e dai punti interni a C. Quali equazioni parametriche di C si assumeranno le equazioni $x = x(t)$, $y = y(t)$ $(a \leq t \leq b)$, con $x(t)$ e $y(t)$ assolutamente continue in $a \leq t \leq b$ e si porrà $z(t) = x(t) + iy(t)$.

Per indicare le componenti reale e immaginaria di una quantità complessa $z = x + iy$, si useranno le notazioni $\mathrm{R}[z] = x$, $\mathrm{I}[z] = y$. Si porrà ancora

$$f_{2n}(t) = \mathrm{R}[z^n(t)] \quad (n = 0, 1, 2, 3, \cdots) \ , \quad f_{2n-1}(t) = \mathrm{I}[z^n(t)] \quad (n = 1, 2, 3, \cdots).$$

2. Nel corso della ricerca ha avuto parte notevole il seguente teorema, il quale può considerarsi un corollario di un teorema più generale stabilito in precedenza (2):

Sia $\varphi(z)$ *una funzione data su* C, *ivi continua e a variazione limitata. Affinché esista in* D *una funzione* $f(z)$, *continua in* D, *olomorfa in* D — Ç *e uguale su* C *alla* $\varphi(z)$, *è necessario e sufficiente che siano soddisfatte le condizioni*

$$\int_C \varphi(z)\, z^n\, dz = 0 \qquad (n = 0, 1, 2, 3, \cdots).$$

Dal corollario ora riportato si è fatto discendere il seguente altro teorema, relativo alla completezza del sistema dei polinomi armonici su una curva rettificabile (3):

(*) Nella seduta del 13 giugno 1953.

(1) Per le dimostrazioni e per altri risultati si rimanda a una Memoria che apparirà nel prossimo volume degli « Ann. di Mat. pura e appl. ».

(2) G. ZIN, *Sull'esistenza in un dominio jordaniano di funzioni olomorfe all'interno e convergenti al contorno verso valori assegnati.* Questi « Rendiconti », vol. XIV, 1° sem., fasc. 4, pp. 476–483 (1953).

(3) La completezza del sistema dei polinomi armonici fu affermata, più che dimostrata, da S. BERNSTEIN (*Sur le principe de Dirichlet et le développement des fonctions harmoniques en séries de polynomes.* « C. R. », *148*, pp. 1306-1308), se pur limitatamente a « curve che ammettono in ogni punto un raggio di curvatura determinato ».

La completezza del sistema dei polinomi armonici fu stabilita per contorni di domini dello spazio, anche pluriconnessi, da G. Fichera, ma imponendo ai contorni talune condizioni restrittive (« Ann. di Mat. pura e appl. », ser. IV, T. XXVII, 1948).

Se una funzione $\lambda(t)$, *integrabile in* $a \leq t \leq b$ *secondo Lebesgue, è in tale intervallo ortogonale a tutte le* $f_n(t)$, *essa vi è nulla quasi dappertutto.*

Si ha ancora:

Scelto un intero $r > 0$ *arbitrario, le funzioni* $f_n(t)$ $(n = 0, 1, 2, 3, \cdots)$ *sono linearmente indipendenti in* $a \leq t \leq b$.

Tali proprietà delle $f_n(t)$ consentono di applicare ad esse un noto procedimento di ortonormalizzazione e di ricavare un sistema di funzioni $\varphi_n(t)$ $(n = 0, 1, 2, 3, \cdots)$, le quali risultino in $a \leq t \leq b$ normalizzate, a due a due ortogonali e inoltre tali che ogni $\varphi_n(t)$ sia una combinazione lineare, omogenea, a coefficienti costanti, delle funzioni $f_0(t), f_1(t), \cdots, f_n(t)$:

$$\varphi_n(t) = c_{n,0} f_0(t) + c_{n,1} f_1(t) + \cdots + c_{n,n} f_n(t) \quad (n = 0, 1, 2, 3, \cdots).$$

3. Allo scopo di estendere il problema di Dirichlet (p.d.D.) anche al caso in cui la funzione assegnata sul contorno non è su questo continua, si è stabilito il seguente teorema:

Sia $g(x, y)$ *una funzione data su* C, *ivi limitata e integrabile secondo Lebesgue rispetto all'arco* s *di* C *nell'intervallo* $0 \leq s \leq L$ (L = *lunghezza di* C).

Sotto tale ipotesi esiste in D—C, *ed è unica, una funzione* $u(x, y)$, *ivi armonica e limitata, la quale ammette quasi dappertutto su* C *la* $g(x, y)$ *come limite angolare.*

La detta funzione $u(x, y)$ *gode delle ulteriori seguenti proprietà:*

detti G_1 *e* G_2 *gli estremi rispettivamente inferiore e superiore della* $g(x, y)$ *su* C, *si ha* $G_1 \leq u(x, y) \leq G_2$, *qualunque sia il punto* (x, y) *in* D — C;

la funzione $\bar{u}(x, y)$ *definita in* D *dalle relazioni*

$$\bar{u}(x, y) = u(x, y) \text{ in } D - C, \qquad \bar{u}(x, y) = g(x, y) \text{ su } C$$

è continua in ogni punto di C *nel quale la* $g(x, y)$ *è continua;*

se $\zeta = \tau(z)$ *è una funzione continua in* D, *olomorfa in* D — C, *che trasforma conformemente il campo* D — C *nel cerchio* $|\zeta| < 1$ *del piano della variabile complessa* $\zeta = \xi + i\eta$, *posto*

$$u(x, y) = \omega(\xi, \eta) \quad \text{per} \quad \xi^2 + \eta^2 < 1$$

$$g(x, y) = \chi(\xi, \eta) \quad \text{per} \quad \xi^2 + \eta^2 = 1$$

la funzione $\omega(\xi, \eta)$ *risulta nel cerchio* $\xi^2 + \eta^2 < 1$ *esprimibile mediante l'integrale di Poisson relativo alla* $\chi(\xi, \eta)$.

La $u(x, y)$ sarà considerata la *soluzione in* D — C *del p.d.D. relativo alla* $g(x, y)$.

Per porre il p.d.D. anche quando la $g(x, y)$ non è su C limitata, si consideri la funzione $\chi(\xi, \eta)$ trasformata della $g(x, y)$ per mezzo della

$\zeta = \tau(z)$ e si ponga $\chi(\theta) = \chi(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$. Si dirà che la $g(x, y)$ è integrabile rispetto al parametro conforme se esiste l'integrale (di Lebesgue)

$$\int_0^{2\pi} \chi(\theta)\, d\theta.$$

La possibilità di porre il p.d.D. anche per funzioni non limitate su C, purché integrabili rispetto al parametro conforme, è assicurata dal seguente risultato:

Sia $g(x, y)$ una funzione data su C *ed integrabile rispetto al parametro conforme.*

Allora, detto p un arbitrario numero reale > 0, *la funzione $g_p(x, y)$ definita su* C *dalle relazioni*

$$g_p(x, y) = g(x, y) \text{ in ogni punto di C in cui è } |g(x, y)| \leq p$$

$$g_p(x, y) = 0 \text{ in ogni punto di C in cui è } |g(x, y)| > p$$

è integrabile rispetto all'arco s di C.

Inoltre la funzione $u(x, y)$ armonica in D — C, *ivi limitata, che ammette quasi dappertutto su* C *la $g(x, y)$ come limite angolare, tende, al tendere di p a $+\infty$, verso una funzione $u(x, y)$, la convergenza essendo uniforme in ogni insieme chiuso tutto costituito da punti interni a* D *e risultando la funzione $u(x, y)$ dotata delle seguenti proprietà:*

la $u(x, y)$ è armonica in D — C;

la $u(x, y)$ ammette quasi dappertutto su C *la $g(x, y)$ come limite angolare;*

la funzione $\bar{u}(x, y)$ definita in D *dalle relazioni*

$$\bar{u}(x, y) = u(x, y) \quad \text{in D} - \text{C} \quad , \quad \bar{u}(x, y) = g(x, y) \text{ su C}$$

è continua in ogni punto di C *nel quale la $g(x, y)$ è continua;*

qualunque sia la trasformazione conforme di D — C *in un campo circolare, la trasformata della $u(x, y)$ risulta sempre rappresentabile mediante l'integrale di Poisson relativo alla trasformata della $g(x, y)$.*

Si dirà che la $u(x, y)$ è la *soluzione in* D — C *del p.d.D. relativo alla $g(x, y)$.*

Evidentemente la corrispondenza fra punti di C e punti della circonferenza $\zeta = e^{i\theta}$ subordinata dalla trasformazione conforme, permette di considerare θ quale funzione di t. Si sceglierà θ in maniera che, al variare di t da a a b, esso vari con continuità da un certo valore α a un valore $\alpha + 2\pi$ ($0 \alpha - 2\pi$). In tal caso θ è funzione assolutamente continua di t [4] e si può facilmente dimostrare la proposizione:

Sia $g(x, y)$ una funzione data su C. *Se la funzione $g(t) = g(x(t), y(t))$ e così pure la derivata $d\theta/dt$ sono in $a \leq t \leq b$ entrambe a quadrato integrabile, $g(x, y)$ è integrabile rispetto al parametro conforme.*

(4) Vedasi il lavoro citato in nota (2).

4. La rappresentazione della soluzione del p. d. D. viene considerata nel teorema seguente:

Sia $g(x, y)$ *una funzione data su* C. *La funzione* $g(t) = g(x(t), y(t))$ *e così pure la derivata* $d\theta/dt$ *del parametro conforme siano entrambe a quadrato integrabile in* $a \leq t \leq b$.

Siano $F_n(x, y)$ *e* $\Phi_n(x, y)$ *i polinomi armonici definiti dalle relazioni*

$$F_{2n}(x, y) = R[z^n] \ (n = 0, 1, 2, 3, \cdots), \ F_{2n-1}(x, y) = I[z^n] \ (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

$$\Phi_n(x, y) = \sum_{h=0}^{n} c_{n,h} F_h(x, y) \qquad (n = 0, 1, 2, 3, \cdots)$$

dove le costanti $c_{n,h}$ $(n = 0, 1, 2, 3, \cdots; \ h = 0, 1, 2, \cdots, n)$ *sono le stesse che figurano nelle relazioni* $\varphi_n(t) = \sum_{h=0}^{n} c_{n,h} f_h(t)$ *considerate al n. 2.*

Allora, con tali posizioni e sotto tali ipotesi, la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \Phi_n(x, y) \int_a^b g(t) \varphi_n(t) \, dt$$

converge in D — C *verso la soluzione* $u(x, y)$ *del p.d.D. relativo alla* $g(x, y)$ *ed uniformemente in ogni insieme chiuso tutto costituito da punti interni a* C.

Tale teorema pone evidentemente la questione di sapere se o sotto quali condizioni la derivata $d\theta/dt$ è a quadrato integrabile. Si ha in proposito:

Affinché la derivata $d\theta/dt$ *del parametro conforme sia in* $a \leq t \leq b$ *a quadrato integrabile è necessario e sufficiente che risulti* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2 < +\infty$, *essendo i coefficienti* a_n *definiti mediante le seguenti posizioni*

$$z(t) = x(t) + iy(t) \quad , \quad z(t) - z^* = \rho(t) e^{i\omega(t)}$$

$$\sigma_0 = \omega(b) - \omega(a) \quad , \quad \sigma_{2h} = \int_a^b (f_{2h} \omega' - f'_{2h-1} \log \rho) \, dt \quad , \quad \sigma_{2h-1} =$$

$$= \int_a^b (f_{2h-1} \omega' + f'_{2h} \log \rho) \, dt \qquad (h = 1, 2, 3, \cdots)$$

$$a_n = \sum_{h=0} c_{n,h} \sigma_h$$

dove z^* *è un punto interno a* C *scelto ad arbitrio.*

5. Il valore pratico della soluzione del p.d.D. data al n. 4 è assicurata dal seguente teorema:

Sia C *una curva continua, semplice, chiusa, del piano delle variabili* x, y, *costituita da un numero finito di archi regolari* (5), *tali che due archi consecutivi*

(5) Per arco regolare si intende un arco dotato in ogni suo punto, estremi compresi, di tangente variabile con continuità.

abbiano nel punto comune tangenti distinte. Siano $x = x(s)$, $y = y(s)$, *le equazioni parametriche di* C *riferite all'arco* s ($0 \leq s \leq L$; $L =$ *lunghezza di* C).

Sia $\varphi(s)$ *l'anomalia della tangente a* C *in ogni punto* $(x(s), y(s))$ *in cui la tangente esiste, intendendosi con* $\varphi(s)$ *una funzione assolutamente continua su ogni arco regolare di* C. *Esista inoltre un* $p > 1$ *per cui* $|d\varphi/ds|^p$ *sia integrabile in* $0 \leq s \leq L$ [6]. *Inoltre ogni vertice di* C *sia dotato di due intorni, uno precedente e uno seguente il vertice, in ciascuno dei quali la funzione* $\varphi(s)$ *sia a rapporto incrementale limitato.*

Sotto tali ipotesi la derivata $d\theta/ds$ *del parametro conforme è a quadrato integrabile in* $0 \leq s \leq L$.

Matematica. — *Sulle funzioni abeliane singolari.* Nota di Fabio Conforto, presentata [*] dal Socio F. Severi.

1. In una Memoria alquanto elaborata del 1916, Gaetano Scorza [1] ha dimostrato una proposizione, che egli ha chiamato *il teorema fondamentale per le funzioni abeliane singolari*. Il contenuto di tale teorema si può così riassumere [2]. Data una matrice di Riemann ω di genere p (> 1), i suoi sistemi nulli reali si possono rappresentare con i punti di uno S_{p^2-1} proiettivo reale. Nello S_{p^2-1} i sistemi nulli degeneri si rappresentano con un'ipersuperficie F, che ammette una falda reale $F^{(1)}$, atta a dividere i punti dello S_{p^2-1} in punti interni e punti esterni; l'insieme dei punti interni rappresenta i sistemi nulli *principali* e risulta un insieme *convesso*. Orbene, il corpo di funzioni abeliane definito dalla ω ha l'indice di singolarità k [3] allora ed allora soltanto che nello S_{p^2-1} esista uno spazio razionale S_{k-1} (ma non uno spazio razionale S_k), per cui qualche punto sia interno alla $F^{(1)}$.

Nel ripensare a questo teorema col proposito di inserirlo nel corso sulla teoria delle funzioni abeliane modulari, che da qualche anno vado svolgendo presso l'Istituto Nazionale di Alta Matematica, mi è venuto fatto di trovarne una dimostrazione molto semplice, che comunico in questa Nota.

(6) Ovviamente, nell'integrale di $|d\varphi/ds|^p$, si considererà nulla la funzione integranda per i valori di s corrispondenti ai vertici e ad ogni altro punto in cui $d\varphi/ds$ non esiste.

(*) Nella seduta del 13 giugno 1953.

(1) G. Scorza, *Il teorema fondamentale per le funzioni abeliane singolari*. «Memorie della Società Italiana delle Scienze» (3), 19, pp. 139-183 (1916).

(2) Cfr. l'enunciato di Scorza al n. 58 della Memoria citata in (1).

(3) Chiamo, come è ormai uso generale, indice di singolarità di una matrice di Riemann il numero che si ottiene aumentando di una unità l'indice di singolarità quale è definito nelle classiche Memorie di G. Scorza sull'argomento.

2. Nel corpo complesso, sia ω una matrice a p righe e $2p$ colonne ($p > 1$). Si dirà *sistema nullo reale* (*razionale*) della ω ogni matrice del tipo $(2p, 2p)$, *emisimmetrica*, ad elementi reali (razionali) [4]:

$$M = -M_{-1} = \overline{M} \tag{2.1}$$

per cui sia:

$$\omega M \omega_{-1} = 0. \tag{2.2}$$

La totalità dei sistemi nulli reali della ω costituisce ovviamente uno spazio vettoriale sul corpo reale, dato che per due sistemi nulli reali qualunque M, M' e per λ reale qualunque sono ancora $M + M'$ e λM reali ed emisimmetriche; ed è:

$$\omega (M + M') \omega_{-1} = 0 \quad , \quad \omega (\lambda M) \omega_{-1} = 0.$$

3. Suppongasi ora che sia *non degenere* la matrice Ω del tipo $(2p, 2p)$, che si ottiene ponendo:

$$\Omega = \left\| \begin{matrix} \omega \\ \bar{\omega} \end{matrix} \right\|. \tag{3.1}$$

Dalla (3.1) si deduce subito:

$$\bar{\Omega} = \left\| \begin{matrix} O & U \\ U & O \end{matrix} \right\| \Omega \quad , \quad \bar{\Omega}^{-1} = \Omega^{-1} \left\| \begin{matrix} O & U \\ U & O \end{matrix} \right\| \tag{3.2}$$

ove U indica la matrice *identica* d'ordine p.

Poniamo:

$$L = i\omega M \bar{\omega}_{-1}. \tag{3.3}$$

Per ogni sistema nullo reale M della ω, la (3.3) definisce una matrice *complessa* L a p righe e colonne. Per la realtà di M, la L, definita dalla (3.3), è ovviamente *hermitiana*:

$$\bar{L}_{-1} = L. \tag{3.4}$$

Inversamente, fissata *ad arbitrio* una L hermitiana del tipo (p, p), dico che resta *univocamente* individuato un sistema nullo reale della ω. Infatti, per ogni M eventualmente esistente e soddisfacente alle (2.1), (2.2), (3.3), con la L hermitiana data a priori, è:

$$\left\| \begin{matrix} O & L \\ -L_{-1} & O \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} O & L \\ -\bar{L} & O \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} O & i\omega M \bar{\omega}_{-1} \\ i\bar{\omega} M \omega_{-1} & O \end{matrix} \right\| =$$

$$= \left\| \begin{matrix} i\omega M \omega & i\omega M \bar{\omega}_{-1} \\ i\bar{\omega} M \omega_{-1} & i\bar{\omega} M \omega_{-1} \end{matrix} \right\| = i \left\| \begin{matrix} \omega \\ \bar{\omega} \end{matrix} \right\| M \left\| \begin{matrix} \omega \\ \bar{\omega} \end{matrix} \right\|_{-1} = i\Omega M \Omega_{-1},$$

(4) Avvertasi che $\bar{\alpha}$, α_{-1} ed α^{-1} indicano rispettivamente la complessa coniugata, la trasposta e la inversa (supposta esistente) di una matrice α.

onde, tenuto conto dell'ipotesi che Ω non sia degenere, risulta M univocamente individuata mediante la:

$$(3.5) \qquad M = -i\Omega^{-1} \begin{Vmatrix} O & L \\ -L_{-1} & O \end{Vmatrix} \Omega_{-1}^{-1}.$$

La M, definita dalla (3.5), è ovviamente emisimmetrica; e, tenuto conto delle (3.2) e (3.4), è anche reale, perché:

$$\overline{M} = i\overline{\Omega}^{-1} \begin{Vmatrix} O & \overline{L} \\ -\overline{L}_{-1} & O \end{Vmatrix} \overline{\Omega}_{-1}^{-1} = i\Omega^{-1} \begin{Vmatrix} O & U \\ U & O \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} O & \overline{L} \\ -\overline{L}_{-1} & O \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} O & U \\ U & O \end{Vmatrix} \Omega_{-1}^{-1} =$$

$$= i\Omega^{-1} \begin{Vmatrix} O & -\overline{L}_{-1} \\ L & O \end{Vmatrix} \Omega_{-1}^{-1} = -i\Omega^{-1} \begin{Vmatrix} O & L \\ -L_{-1} & O \end{Vmatrix} \Omega_{-1}^{-1} = M.$$

La (3.3) risulta così *invertita* mediante la (3.5); e nasce una corrispondenza biunivoca tra lo spazio vettoriale S dei sistemi nulli reali della ω e la totalità delle matrici hermitiane del tipo (p, p), che è ovviamente pur essa uno spazio vettoriale S' sul corpo reale. Si ha anzi che tale corrispondenza è un *isomorfismo*, perché, se M' ed L' si corrispondono nel senso della (3.3) e λ è reale qualunque, è anche:

$$L + L' = i\omega\,(M+M')\,\omega_{-1}, \qquad \lambda L = i\omega\,(\lambda M)\,\overline{\omega}_{-1}.$$

Se, separando il reale dall'immaginario, si pone $L = L' + iL''$, la (3.4) implica:

$$L' = L'_{-1}, \qquad L'' = -L''_{-1},$$

onde la L è individuata, dando ad esempio (e si possono dare ad arbitrio) le $\frac{p(p+1)}{2}$ l'_{hk} $(h \leq k)$ e le $\frac{p(p-1)}{2}$ l''_{hk} $(h < k)$, essendo rispettivamente l'_{hk}, l''_{hk} l'elemento di posto (h, k) nella L', L''.

Ne viene che lo spazio S' ha la dimensione $\frac{p(p+1)}{2} + \frac{p(p-1)}{2} = p^2$; per l'isomorfismo tra S ed S', anche S avrà la dimensione p^2. In più, lo spazio S si potrà immaginare come sottospazio dello spazio vettoriale reale S* di tutte le matrici emisimmetriche reali del tipo $(2p, 2p)$. La dimensione di S* è ovviamente $\frac{2p(2p-1)}{2} = p\,(2p \quad 1)$.

4. Consideriamo ora in S' la totalità I' di tutte le L hermitiane che risultano *definite e positive* (cioè matrici dei coefficienti di forme hermitiane definite e positive). Un sistema nullo reale M di ω la cui corrispondente L nella (3.3) sia definita e positiva, si dirà *principale*.

È allora altrettanto ovvio che importante per il seguito l'osservare che *l'insieme* I' *è convesso*. Se infatti L_1 ed L_2 appartengono ad I', altrettanto avviene della:

$$L = \lambda L_1 + (1 - \lambda)\, L_2$$

al variare del parametro reale λ nell'intervallo $0 \mid\!-\!\mid 1$; onde, se L_1 ed L_2 appartengono ad I', appartiene ad I' tutto il *segmento* di estremi L_1 ed L_2. Conseguentemente, risulterà altresì *convesso* l'insieme I di S, che si muta in S' mercè l'isomorfismo intercedente tra S ed S' e rappresenta i sistemi nulli reali e principali della ω.

In più, S' ed S* si possono pensare come due spazî euclidei riguardando le l'_{hk}, l''_{hk} di cui al n. 3 come coordinate cartesiane ortogonali per S' e le m_{hk} ($h < k$; cioè gli elementi di una M emisimmetrica reale) come coordinate cartesiane ortogonali per S*. In S* resta allora subordinato uno spazio euclideo (che si identifica con) S, il quale rappresenta i sistemi nulli reali della ω; e l'isomorfismo intercedente tra S ed S' si rispecchia in un'affinità T, che muta l'origine di S in quella di S'.

Negli spazî euclidei S ed S' si possono ora svolgere considerazioni topologiche; in particolare l'affinità T è un omeomorfismo tra S ed S', che muta I in I'.

L'insieme I' appare come un insieme aperto, la cui frontiera è costituita da punti per cui $|L| = 0$. Infatti, ogni punto di I' è punto interno, perché l'essere una L hermitiana definita e positiva si esprime notoriamente con un numero finito di disuguaglianze, che, se sono verificate in un punto, sono soddisfatte in tutto un intorno conveniente di esso; onde I' è aperto. Se poi un punto P di S' non appartiene ad I', ma è limite di una successione di punti di I' (appartenendo così alla frontiera Φ', di I'), la matrice hermitiana *non* definita positiva corrispondente a P, come limite di una successione di matrici definite e positive dovrà essere *semidefinita* positiva, onde sarà per essa $|L| = 0$.

Tenuto conto della (3.5), essere $|L| = 0$ implica $|M| = 0$, onde anche I sarà un insieme aperto avente una frontiera Φ per tutti i punti della quale sarà $|M| = 0$.

Si osservi infine che I' consta di semirette uscenti dall'origine O' di S', estremo escluso. Se infatti L è hermitiana definitiva e positiva, anche λL con $\lambda > 0$ arbitrario è tale. Ne viene subito che anche Φ' consta di semirette per l'origine O', estremo *incluso*. Se invero L_0 è rappresentata da un punto di Φ', L_0 è hermitiana semidefinita positiva e si può approssimare quanto si vuole con matrici hermitiane definite e positive; lo stesso succede allora ovviamente per la λL_0 quando $\lambda > 0$ (ed anche quando $\lambda = 0$: basta pensare alla matrice hermitiana definita e positiva εU con $\varepsilon > 0$ comunque piccolo). Tutto ciò si trasporta senz'altro all'insieme I di S mercé la T^{-1}, che è un'affinità che muta l'origine O' di S' nell'origine O di S.

In definitiva si può allora enunciare:

Se ω è una qualunque matrice complessa a p righe e $2p$ colonne, per cui la:

$$\Omega = \left\| \begin{matrix} \omega \\ \bar{\omega} \end{matrix} \right\|$$

sia non degenere, i suoi sistemi nulli reali, cioè le M *emisimmetriche reali per cui* $\omega M \omega_{-1} = 0$, *si rappresentano con i punti di uno spazio euclideo reale* S_{p^2},

subordinato allo spazio euclideo reale $S_{p(2p-1)}$, *in cui le* m_{hk} $(h < k)$, *elementi di una* M *emisimmetrica reale, si assumano a coordinate cartesiane ortogonali.*

L'insieme I *dei punti di* S_{p^2} *rappresentativi dei sistemi nulli reali e principali della* ω, *per i quali cioè* $i\omega M\omega_{-1}$ *è (hermitiana) definita e positiva, è un insieme convesso, la cui frontiera* Φ *è una parte dell'ipersuperficie di* S_{p^2}, *che si ottiene intersecando lo* S_{p^2} *con l'ipersuperficie di* $S_{p(2p-1)}$ *d'equazione* $|M| = 0$.

La frontiera Φ *consta di semirette per l'origine (inclusa), mentre* I *è luogo di semirette per l'origine (esclusa).*

Un punto dell'insieme convesso I si dirà *interno* ad I.

Si osservi che, essendo M emisimmetrica d'ordine $2p$ e quindi $|M|$ uguale al quadrato del suo pfaffiano, l'ipersuperficie $|M| = 0$ di $S_{p(2p-1)}$ è un'ipersuperficie d'ordine $2p$, che si riduce in realtà ad un'ipersuperficie (ed anzi ad un cono col vertice nell'origine) d'ordine p, *contata due volte*. È chiaro che, ai fini che qui interessano, basta riferirsi a quest'ultimo cono d'ordine p, contato semplicemente. Anche la Φ si potrà perciò ritenere come parte di un cono d'ordine p dello S_{p^2}.

5. Suppongasi ora che la ω sia una *matrice di Riemann* di genere p. All'uopo è notoriamente [5] necessario e sufficiente che esista un sistema nullo M* della ω, che sia *razionale e principale*. Dall'esistenza della matrice M* si trae subito [6] che la Ω definita dalla (3.1) è non degenere. Si può allora applicare l'enunciato finale del n. 4 e dare la seguente *interpretazione geometrica del teorema d'esistenza della teoria delle funzioni abeliane*:

Una matrice ω *nel corpo complesso a* p *righe ed a* $2p$ *colonne è una matrice di Riemann di genere* p *allora ed allora soltanto che sia non degenere la* $\Omega = \left\| \begin{matrix} \omega \\ \bar{\omega} \end{matrix} \right\|$ *e che esista un punto razionale dello* S_{p^2} *interno ad* I.

Si rammenti che anche la condizione $\omega M \omega_{-1} = 0$ si può interpretare geometricamente, ad esempio prendendo gli elementi di una riga di ω come coordinate omogenee in uno S_{2p-1} proiettivo complesso, col che la ω dà luogo a p punti dello S_{2p-1}, che, se $|\Omega| \neq 0$, sono congiunti da uno S_{p-1}, sghembo con il suo complesso coniugato.

6. Si consideri ora il caso che la matrice di Riemann abbia l'indice di singolarità k $(\geqq 1)$. Ciò significa che esistono k e non più sistemi nulli *razionali*, linearmente indipendenti rispetto al corpo razionale e quindi anche rispetto al corpo reale. Nello S_{p^2}, rappresentativo dei sistemi nulli reali

(5) Cfr. ad esempio le mie lezioni sulle *Funzioni abeliane modulari*, vol. I, Corsi dell'Istituto Nazionale di Alta Matematica, Docet Edizioni Universitarie, Roma 1952, cap. I, numero 4.

(6) Loc. cit. in (5), cap. I, n. 8.

della ω, si avranno in corrispondenza k punti razionali, che individuano uno S_k *razionale* per l'origine. Tale S_k penetra entro ad I, perché, essendo la ω matrice di Riemann, esiste per essa un sistema nullo razionale e *principale*, che (n. 5) si rappresenta con un punto interno ad I. Se dunque ω ha l'indice di singolarità k esiste uno S_k (ma non uno S_{k+1}) razionale di S_{p^2} per O, che penetra entro I.

Inversamente, suppongasi che per una ω riemanniana esista uno S_k (ma non uno S_{k+1}) *razionale* per O, che penetri entro I. Dico che la ω ha l'indice di singolarità k. Infatti, nell'ipotesi fatta, si potranno scegliere, entro lo S_k razionale, k punti razionali linearmente indipendenti rispetto al corpo razionale, cui risponderanno altrettanti sistemi nulli razionali e linearmente indipendenti rispetto al corpo razionale della ω, onde la ω avrà un indice di singolarità $\geqq k$. Ma non può l'indice di singolarità della ω essere maggiore di k, perché allora, contro l'ipotesi, esisterebbe almeno uno S_{k+1} razionale per O, che penetrerebbe in I. Si conclude così che:

La condizione necessaria e sufficiente perché una matrice di Riemann di genere p abbia l'indice di singolarità k è che esista entro l'S_{p^2} *rappresentativo dei sistemi nulli reali della* ω *uno* S_k *razionale per l'origine, che penetri entro all'insieme convesso* I.

Ma questo enunciato non è altro che il *teorema fondamentale per le funzioni abeliane singolari* di G. Scorza, riportato al n. 1. Basta identificare lo S_{p^2-1} proiettivo reale dell'enunciato di Scorza con lo spazio improprio dello S_{p^2} euclideo reale da noi considerato e tener conto che Scorza chiama *principale* un sistema nullo razionale della ω quando la $i\omega M\omega_{-1}$ sia hermitiana definita, positiva *o negativa*. Avuto riguardo alle conseguenze funzionali (convergenza delle serie Θ) dell'esistenza di un sistema nullo razionale e principale, noi preferiamo ritenere principali solo i sistemi nulli reali di una ω per cui a $i\omega M\omega_{-1}$ sia definita e *positiva*. Comunque, è in ogni caso ben facile passare da un punto di vista all'altro.

Avvertasi che, dal nostro punto di vista, i sistemi nulli razionali e principali della ω con l'indice di singolarità k rispondono biunivocamente ai punti *razionali interni ad* I di uno S_k per O; e riempiono pertanto *densamente* l'insieme J, intersezione di tale S_k con I. Data la linearità di S_k e la convessità di I, anche J è naturalmente convesso; anzi *i soli punti razionali di* J *formano un insieme convesso*, nel senso che se M_1 ed M_2 sono razionali ed appartengono ad J, appartiene ad J ogni punto razionale del segmento M_1M_2. Ciò si può enunciare come segue:

I sistemi nulli razionali e principali di una matrice di Riemann costituiscono un insieme convesso.

Geometria. — *Calcolo della connessione affine integrale associata ad un punto di una varietà a connessione affine.* Nota di LUIGI CASTOLDI, presentata (*) dal Socio E. BOMPIANI.

1. È dovuta ad E. Bompiani (1) la nozione di connessione affine integrale $\overset{P}{(E)}$ associata in P (centro) alla connessione (L) di cui una X_n topologica si suppone dotata. Della richiamata connessione affine possono darsi – come almeno implicitamente è noto e come risulterà dalle considerazioni del presente scritto – due equivalenti definizioni: una, di contenuto prevalentemente geometrico, l'altra, più rapida e di natura formale. Le ripresentiamo brevemente entrambe, nell'ordine indicato.

1° Assegnata in X_n una connessione (L) e detto P un generico punto di X_n, una seconda connessione $\overset{P}{(E)}$ è individuata in X_n dalle seguenti condizioni:

a) $\overset{P}{(E)}$ ha in comune con (L) le traiettorie uscenti da P, e, su queste, entrambe le connessioni determinano i medesimi parametri affini;

b) $\overset{P}{(E)}$ è simmetrica e a curvatura nulla (brevemente: è *piatta*).

2° La connessione $\overset{P}{(E)}$ è quella che ha nulli tutti i coefficienti in ogni riferimento di coordinate normali in P per la assegnata connessione (L) (2) (brevemente: è la *connessione nulla in ogni tale riferimento*).

Data l'importanza della nozione di connessione affine integrale – quale si manifesta, ad esempio attraverso la semplice e profonda interpretazione che essa consente dei concetti di *tensore normale* e di *estensione* di Veblen e Thomas – non sembra inutile il calcolo dei valori in P non solo dei coefficienti di $\overset{P}{(E)}$ e delle loro derivate prime, cui soltanto ritengo sia stata finora rivolta attenzione, ma di tutte le loro successive derivate (3).

Alla ricerca di formule utili a tale scopo è dedicato il presente scritto. Alcuni brevi richiami permetteranno incidentalmente di ridimostrare l'equivalenza delle definizioni 1° e 2°.

2. Va subito rilevato che entrambe le definizioni enunciate non fanno in alcun modo dipendere la determinazione di $\overset{a}{(E)}$ dalla torsione di (L), cosicché, d'ora in poi, potremo senz'altro supporre (L) simmetrica e deno-

(*) Nella seduta del 13 giugno 1953.

(1) E. BOMPIANI, *Geometria degli spazi a connessione affine*. « Ann. di Matematica pura ed applicata », ser. IV, T. 24, pp. 257-282 (1945); e *Geometria differenziale* (litografia). Roma, pp. 104–115.

(2) Uno qualsivoglia di tali riferimenti si deduce da uno prefissato di essi mediante una corrispondente trasformazione lineare arbitraria.

(3) Si confronti: E. BOMPIANI, secondo loc. cit., pp. 113–114.

tarla con (Γ). Ciò posto, ottemperando dapprima al requisito 1_a) immaginiamo introdotto su ciascuna delle comuni traiettorie per P a (Γ) e ad $(\overset{1}{E})$ un corrispondente comune parametro affine che supporremo, come è sempre possibile, parzialmente precisato in modo da annullarsi per tutte nel punto P. A ciascuna di tali traiettorie competono allora equazioni parametriche della forma

$$(1) \qquad x^i = x^i(s \mid \xi^j) \quad , \quad \xi^j = \left(\frac{dx^j}{ds}\right)_P , \qquad (i = 1, 2, \cdots, n),$$

dove le ξ^j $(j = 1, 2, \cdots, n)$, caratterizzanti le singole traiettorie, si identificano colle corrispondenti determinazioni in P dei *parametri* ed s è il nominato parametro affine. Valgono allora insieme, identicamente in s e nelle ξ^j, le equazioni

$$(2) \qquad \begin{cases} \dfrac{d^2 x^k}{ds^2} + \Gamma_{ij}{}^k \dfrac{dx^i}{ds} \dfrac{dx^j}{ds} = 0 \\ \dfrac{d^2 x^k}{ds^2} + \overset{P}{E}_{ij}{}^k \dfrac{dx^i}{ds} \dfrac{dx^j}{ds} = 0. \end{cases}$$

Di qui, sottraendo e assumendo $s = 0$, si traggono le identità nelle ξ^j:

$$(3) \qquad ({}^0\Gamma_{ij}{}^k - {}^0\overset{P}{E}_{ij}{}^k)\, \xi^i \xi^j = 0,$$

dove l'indice 0 denota (qui e in seguito) la determinazione in P delle grandezze indicate. Da (3) segue intanto

$$(4) \qquad {}^0\Gamma_{ij}{}^k = {}^0\overset{P}{E}_{ij}{}^k.$$

Dopo ciò, derivando (2) rispetto ad s e ponendo

$$(5_1) \qquad \begin{cases} G_{lij}{}^k = \partial_{(l}\Gamma_{ij)}{}^k - 2\,\Gamma_{(li}{}^s\Gamma_{j)s}{}^k \equiv \partial_{(l}\Gamma_{ij)}{}^k - 2\,\Gamma_{(li}{}^s\Gamma_{js)}{}^k \\ \overset{P}{F}_{lij}{}^k = \partial_{(l}\overset{P}{E}_{ij)}{}^k - 2\,\overset{P}{E}_{(li}{}^s\overset{P}{E}_{j)s}{}^k \equiv \partial_{(l}\overset{P}{E}_{ij)}{}^k - 2\,\overset{P}{E}_{(li}{}^s\overset{P}{E}_{js)}{}^k, \end{cases}$$

si ottiene:

$$(2_1) \qquad \begin{cases} \dfrac{d^3 x^k}{ds^3} + G_{lij}{}^k \dfrac{dx^l}{ds} \dfrac{dx^i}{ds} \dfrac{dx^j}{ds} = 0 \\ \dfrac{d^3 x^k}{ds^3} + F_{lij}{}^k \dfrac{dx^l}{ds} \dfrac{dx^i}{ds} \dfrac{dx^j}{ds} = 0, \end{cases}$$

da cui, nuovamente per $s = 0$, si trae dapprima

$$(6_1) \qquad {}^0G_{lij} = {}^0F_{lij},$$

indi, tenendo conto di (4) e (5_1)

$$(4_1) \qquad \overset{0}{\partial}_{(l}\Gamma_{ij)}{}^k = \overset{0}{\partial}_{(l}\overset{P}{E}_{ij)}{}^k.$$

Deriviamo ora successivamente $N - 1$ volte le equazioni (2_1) e poniamo:

$$(5_N)_\alpha \qquad G_{l_N l_{N-1}\cdots l_1 ij}{}^k = \partial_{(l_N} G_{l_{N-1}\cdots l_1 ij)}{}^k - (N+1)\, G_{(l_N l_{N-1}\cdots l_1 i}{}^s \Gamma_{j)s}{}^k.$$

Si riconosce agevolmente con procedimento induttivo che è

$$(5_N)_\alpha \qquad G_{l_N l_{N-1}\cdots l_1 ij}{}^k = \partial_{(l_N l_{N-1}\cdots l_1}\Gamma_{ij)}{}^k + S_{(l_N l_{N-1}\cdots l_1 ij)}{}^k (N-1 \mid \Gamma),$$

dove l'ultimo termine, simmetrico negli indici $l_N, l_{N-1}, \cdots, l_1, i$ e j, denota una espressione differenziale di ordine (N — 1) nei coefficienti di Γ, razionale intera in questi coefficienti e nelle loro successive derivate, *in quest'ultime, però, attraverso le sole combinazioni simmetriche* $\partial_{(r_1} \Gamma_{uv)}{}^k$, $\partial_{(r_1 r_2} \Gamma_{uv)}{}^k, \cdots$ $\cdots, \partial_{(r_N \cdots r_1} \Gamma_{uv)}{}^k$, e priva di termini indipendenti dagli argomenti indicati.

Con analoghe definizioni e osservazioni per

$$(5_N)_\beta \qquad \overset{P}{F}_{l_N l_{N-1} \cdots l_1 ij}{}^k = \partial_{(l_N} \overset{P}{F}_{l_{N-1} \cdots l_1 ij)}{}^k - (N+1) \overset{P}{F}_{(l_N l_{N-1} \cdots l_1 i}{}^s \Gamma_{j) s}{}^k,$$

$$(5'_N)_\beta \qquad \overset{P}{F}_{l_N l_{N-1} \cdots l_1 ij}{}^k = \partial_{(l_N l_{N-1} \cdots l_1} \overset{P}{E}_{ij)}{}^k + \sum_{(l_N l_{N-1} \cdots l_1 ij)}{}^k (N-1 \mid \overset{P}{E}),$$

si ottiene:

$$(2_N) \qquad \begin{cases} \dfrac{d^N x^k}{ds^N} + G_{l_N l_{N-1} \cdots l_1 ij}{}^k \dfrac{dx^{l_N}}{ds} \dfrac{dx^{l_N - 1}}{ds} \cdots \dfrac{dx^j}{ds} = 0 \\ \dfrac{d^N x^k}{ds^N} + \overset{P}{F}_{l_N l_{N-1} \cdots l_1 ij}{}^k \dfrac{dx^{l_N}}{ds} \dfrac{dx^{l_N - 1}}{ds} \cdots \dfrac{dx^j}{ds} = 0, \end{cases}$$

da cui, per $s = 0$, risulta:

$$(6_N) \qquad {}^0\overset{P}{F}_{l_N l_{N-1} \cdots l_1 ij}{}^k = {}^0G_{l_N l_{N-1} \cdots l_1 ij}{}^k.$$

Supposte dimostrate le relazioni

$$(4)\text{–}(4_{N-1}) \qquad \begin{cases} \overset{0}{\partial}_{(l_{r-1} \cdots l_1} \overset{P}{E}_{ij)}{}^k = \overset{0}{\partial}_{(l_{r-1} \cdots l_1} \Gamma_{ij)}{}^k \\ (r = 1, 2, \cdots N), \end{cases}$$

da $(5'_N)_\alpha$, $(5'_N)_\beta$ e da (6_N) risulta:

$$(4_N) \qquad \overset{0}{\partial}_{(l_N l_{N-1} \cdots l_1} \overset{P}{E}_{ij)}{}^k = \overset{0}{\partial}_{(l_N l_{N-1} \cdots l_1} \Gamma_{ij)}{}^k.$$

Poiché, di fatto, già sono acquisite le relazioni (4) e (4_1), concludiamo che (4_N) sussiste per N intero positivo qualunque.

3. Venendo al requisito 1_b) la condizione di piattezza per $\overset{P}{(E)}$, valida identicamente in X_n,

$$(7_1) \qquad \partial_{[l} \overset{P}{E}_{i]j}{}^k = - \overset{P}{E}_{s[l}{}^k \overset{P}{E}_{i]j}{}^s,$$

unita a (4) fornisce

$$(8_1) \qquad \overset{0}{\partial}_{[l} \overset{P}{E}_{i]j}{}^k = - {}^0\Gamma_{s[l}{}^k \Gamma_{i]j}{}^s,$$

mentre (4_1), scritta nella forma

$$\overset{0}{\partial}_l E_{ij}{}^k = - 2 \overset{0}{\partial}_{[i} \overset{P}{E}_{l]j}{}^k - 2 \overset{0}{\partial}_{[j} \overset{P}{E}_{l]i}{}^k - \overset{0}{\partial}_l \overset{P}{E}_{ij}{}^k - \overset{0}{\partial}_l \overset{P}{E}_{ji}{}^k + 3 \overset{0}{\partial}_{(l} \Gamma_{ij)}{}^k$$

e introdottavi (8_1), diventa:

$$(9_1) \qquad \overset{0}{\partial}_l \overset{P}{E}_{ij}{}^k = \overset{0}{\partial}_{(l} \Gamma_{ij)}{}^k + {}^0\Gamma_{s(l}{}^k {}^0\Gamma_{ij)}{}^s - {}^0\Gamma_{sl}{}^k {}^0\Gamma_{ij}{}^s,$$

ossia, con notazione più sintetica:

$$(10_1) \qquad {}^{\circ}\overset{E}{\nabla}{}^{\uparrow}_{l}\,\overset{P}{E}_{ij}{}^{k} = {}^{\circ}\overset{\Gamma}{\nabla}{}^{\uparrow}_{(l}\,\Gamma_{i)}{}^{k}\,(4).$$

Suppongasi ora ottenuta la relazione

$$(10_{N-1}) \qquad {}^{\circ}\overset{E}{\nabla}{}^{\uparrow}_{l_N\cdots l_1}\,\overset{P}{E}_{ij}{}^{k} = {}^{\circ}\overset{\Gamma}{\nabla}{}^{\uparrow}_{(l_N\cdots l_1}\,\Gamma_{ij)}{}^{k}.$$

Essa implica che in ogni punto Q di un intorno di P conveniente in X_n, posto $\Delta x^h = x^h_Q - x^h$, si può scrivere, in virtù del teorema del valor medio,

$$(11_{N-1}) \qquad \overset{P}{\nabla}{}^{\uparrow}_{l_N\cdots l_1}\,\overset{P}{E}_{ij}{}^{k} = \overset{\Gamma}{\nabla}{}^{\uparrow}_{(l_N\cdots l_1}\,\Gamma_{ij)}{}^{k} + \Psi_{l_N\cdots l_1 ij}{}^{k}\,\Delta x^h$$

colle $\Psi_{l_{N-1}\cdots l_1 ijh}{}^{k}$ grandezze finite in tutto l'intorno considerato.

Assunte Δx^h costanti di fronte a variazioni di P, da (11_{N-1}) consegue:

$$(12_N) \qquad \overset{E}{\nabla}{}^{\uparrow}_{l_N l_{N-1}\cdots l_1}\,\overset{P}{E}_{ij}{}^{k} = \overset{E}{\nabla}{}^{\uparrow}_{l_N}\,\overset{\Gamma}{\nabla}{}^{\uparrow}_{(l_{N-1}\cdots l_1}\,\Gamma_{ij)}{}^{k} + \overset{E}{\nabla}{}^{\uparrow}_{l_N}\,(\Psi_{l_{N-1}\cdots l_1 ijh}{}^{k}\,\Delta x^h)$$

coll'ultimo termine del secondo membro infinitesimo insieme a Δx^h. La simmetria in *tutti* gli indici del primo termine a secondo membro in (11_{N-1}) nonché la permutabilità dell'ordine delle derivazioni in $(\overset{P}{E})$ implicano la simmetria, rispetto a tutti gli indici, del primo termine a seconda membro di (12_N), cosicché a questa relazione si può attribuire la forma

$$(13_N) \qquad \overset{E}{\nabla}{}^{\uparrow}_{l_N l_{N-1}\cdots l_1}\,\overset{P}{E}_{ij}{}^{k} = \overset{E}{\nabla}{}^{\uparrow}_{(l_N}\,\overset{\Gamma}{\nabla}{}^{\uparrow}_{l_{N-1}\cdots l_1}\,\Gamma_{ij)}{}^{k} + \overset{E}{\nabla}{}^{\uparrow}_{l_N}\,(\Psi_{l_{N-1}\cdots l_1 ijh}{}^{k}\,\Delta x^h).$$

Quest'ultima, applicata nel punto P, porge

$$(10_N) \qquad \boxed{{}^{\circ}\overset{E}{\nabla}{}^{\uparrow}_{l_N l_{N-1}\cdots l_1}\,\overset{P}{E}_{ij}{}^{k} = {}^{\circ}\overset{\Gamma}{\nabla}{}^{\uparrow}_{(l_N l_{N-1}\cdots l_1}\,\Gamma_{ij)}{}^{k}},$$

e poiché (10_{N-1}) sussiste per $N = 2$, concludiamo che (10_N) è valida per N intero positivo qualunque.

Aggiungasi che da (10_N) risulta dapprima

$$(14_N) \qquad \overset{\circ}{\partial}_{l_N}\,\overset{E}{\nabla}{}^{\uparrow}_{l_{N-1}\cdots l_1}\,\overset{P}{E}_{ij}{}^{k} = \overset{\circ}{\partial}_{(l_N}\,{}^{\circ}\overset{\Gamma}{\nabla}_{l_{N-1}\cdots l_1}\,\Gamma_{ij)}{}^{k} + {}^{\circ}\Gamma_{s(l_N}{}^{k}\,{}^{\circ}\overset{\Gamma}{\nabla}_{l_{N-1}\cdots l_1}\,\Gamma_{ij)}{}^{s} -$$

$$- {}^{\circ}\Gamma_{sl_N}{}^{k}\,{}^{\circ}\overset{\Gamma}{\nabla}_{(l_{N-1}\cdots l_1}\,\Gamma_{ij)}{}^{s},$$

(4) E. BOMPIANI, primo loc. cit., p. 275; secondo loc. cit., p. 90.

indi, utilizzando successivamente (10_{N-1}), (10_{N-2}), $\cdots$, (10_1)

$$(15_N) \qquad \overset{\circ}{\partial}_{l_N l_{N-1} \cdots l_1} \overset{P}{E}_{ij}{}^k = \overset{\circ}{D}_{l_N l_{N-1} \cdots l_1 ij}{}^k (N \mid \Gamma),$$

dove il secondo membro è la determinazione in P di una funzione razionale intera nelle $L_{ij}{}^k$ e nelle loro derivate fino all'ordine N, priva di termini indipendenti da queste variabili.

Le relazioni (15_N) o, in forma implicita, la (10_N) consentono, come ci eravamo proposto, il calcolo delle $\overset{P}{E}_{ij}{}^k$ in tutto il considerato intorno di P e nel generico riferimento adottato. Esse assolvono pertanto l'assunto principale del presente scritto.

4. Ma v'ha di più. Scritte le (10_{N-1}) nella forma

$$(16_{N-1}) \quad \overset{\circ}{\partial}_{l_{N-1} \cdots l_1} \overset{P}{E}_{ij}{}^k + \overset{\circ}{\Sigma}{}'_{l_{N-1} \cdots l_1 ij} (N - 1 \mid \Gamma) = \overset{\circ}{\Sigma}{}''_{l_{N-1} \cdots l_1 ij} (N - 1 \mid \Gamma),$$

con che si è messa in evidenza nel primo membro la derivata di ordine massimo in P di $\overset{P}{E}_{ij}{}^k$, e, al secondo membro si è semplicemente attribuita, per simmetria, una diversa denominazione, si supponga che le quantità denotate con $\overset{\circ}{\Sigma}{}'$ e $\overset{\circ}{\Sigma}{}''$ siano le determinazioni in P di funzioni razionali intere nelle $\Gamma_{ij}{}^k$ e nelle loro derivate fino all'ordine N — 1 al più, *contenenti peraltro tali derivate soltanto attraverso le combinazioni simmetriche*

$$\overset{\circ}{\partial}_{(r_1 \Gamma_{uv})}{}^k, \overset{\circ}{\partial}_{(r_1 r_2 \Gamma_{uv})}{}^k \cdots, \overset{\circ}{\partial}_{(l_{N-1} \cdots l_1 \Gamma_{uv})}{}^k$$

e prive di termini indipendenti dagli argomenti indicati. Applicando, come sopra, a (16_{N-1}) l'argomentazione utilizzante la coppia di punti (P , Q), indi sostituendo in (14_N), si riconosce che il secondo membro di (15_N) è la determinazione in P di una funzione razionale del medesimo tipo di $\overset{\circ}{\Sigma}{}'$ e $\overset{\circ}{\Sigma}{}''$ salvo lo scambio di N — 1 con N. Di fatto, l'ipotesi (16_{N-1}) è verificata per N = 2, come è espresso da (9_1). Pertanto la conclusione tratta sul secondo membro di (15_N) vale per N intero positivo qualunque.

Inoltre, se ci riferiamo a un sistema di coordinate normali per (Γ) in P, valgono per esso le condizioni caratteristiche [5]

$$(17) \qquad {}^{\circ}\Gamma_{ij}{}^k = 0 \quad ; \quad \overset{\circ}{\partial}_{(l_N l_{N-1} \cdots l_1 \Gamma_{ij})}{}^k = 0 \qquad (N = 1, 2, 3, \cdots),$$

e quindi, richiamando (4_N),

$$(17') \qquad {}^{\circ}\overset{P}{E}_{ij}{}^k = 0 \quad , \quad \overset{\circ}{\partial}_{(l_N l_{N-1} \cdots l_1} \overset{P}{E}_{ij)}{}^k = 0 \qquad (N = 1, 2, 3, \cdots),$$

Il riferimento considerato è dunque anche normale relativamente a P e ad $(\overset{P}{E})$.

(5) Si confronti, per esempio: E. BOMPIANI, secondo loc. cit., p. 106.

Ma da (17') e da (15_N) – colla rilevata circostanza di simmetria per $\overset{\circ}{D}$ – segue ulteriormente:

$$(18) \qquad {}^{\circ}\overset{\circ}{E}_{ij}{}^{k} = 0 \quad ; \quad \overset{\circ}{\partial}_{l_N l_{N-1} \cdots l_1} \overset{P}{E}_{ij}{}^{k} = 0 \qquad (N = 1, 2, 3, \cdots)$$

e pertanto

$$(19) \qquad \overset{P}{E}_{ij}{}^{k} = 0$$

in tutto l'intorno in X_n di P in cui si supponga $(\overset{P}{E})$ analitica e nel generico riferimento adottato. Il risultato (19) unitamente all'univocità delle definizioni 1° e 2° del numero 1, dimostra finalmente [6] la affermata equivalenza di quest'ultime.

Meccanica. — *Di alcune proprietà cinematiche riguardanti il moto rigido di una sfera su se stessa* [*]. Nota di BRUNO FORTE, presentata [**] dal Socio A. SIGNORINI.

Si estende al moto di una sfera su se stessa il concetto di coniugio tra due punti, già introdotto per lo studio dei moti rigidi piani. Si caratterizzano le coppie di punti che presentano un coniugio del secondo, terzo, quarto e quinto ordine. Si discutono i risultati ottenuti, applicandoli ad un caso particolare.

1. PREMESSA. – È noto come il moto rigido di una sfera su se stessa possa riguardarsi come il rotolamento di una curva rigida, giacente sulla sfera mobile e con essa solidale; sopra una curva rigida, giacente sulla sfera fissa. Tali curve, che diremo «polodie», sono, come è ovvio, le intersezioni delle due sfere con i rispettivi coni di Poinsot del movimento. Il punto di contatto, I, fra le due curve si dirà, se pure impropriamente, centro istantaneo di rotazione.

Nella configurazione del sistema che riguardiamo come iniziale, il punto I occuperà, sulle curve polodie, certa posizione che diremo I_0. Per gli sviluppi che abbiamo in vista conviene introdurre sulla polodia fissa (o, indifferentemente, su quella mobile) un sistema di ascisse curvilinee avente origine in I_0 e verso positivo arbitrario. In tal modo una, generica, delle configurazioni occupate dalla sfera mobile, potrà essere individuata dall'ascissa

(6) Si osservi, del resto che, inversamente, la connessione definita da (19) con riferimento a un generico sistema di coordinate normali per (Γ) in P, è, intanto, necessariamente piatta [vedasi, a questo proposito una immediata osservazione contenuta nella mia Nota: *Attorno alla teoria delle Connessioni – Deduzione autonoma del carattere tensoriale dei sistemi quadrupli di curvatura.* « Boll. dell'U.M.I. » (in corso di stampa)] e dotata con (Γ), come subito si riconosce, delle medesime traiettorie per P, coi medesimi parametri caratteristici.

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Meccanica dell'Università di Trieste.

(**) Nella seduta del 13 giugno 1953.

curvilinea $\Delta\sigma$ del centro istantaneo di rotazione nell'istante considerato ovvero dal tempo Δt intercorrente tra l'istante iniziale e l'istante in esame.

2. Estensione del concetto di coniugio tra due punti. – Come è noto, è stata estesa al moto rigido di una sfera su se stessa la formula di Savary [1], che mette in risalto una proprietà differenziale di tale moto. Per studiare e presentare detta proprietà, nonché altre proprietà differenziali di ordine superiore, sotto forma sistematica e il più possibile unitaria, si è pensato d'introdurre, in analogia con quanto è stato fatto per i moti rigidi piani [2], il concetto di *cammino cinematico* tra due punti P e P′, l'uno da considerarsi solidale con la sfera mobile, l'altro con la sfera fissa sulla quale quella si muove. Secondo quanto ci detta la semplicità e la naturalezza, per cammino cinematico fra tali due punti, intenderemo la somma delle lunghezze s e s' degli archi di cerchio massimo compresi, rispettivamente, tra i punti P e P′ e il centro istantaneo di rotazione I. Il cammino cinematico può riguardarsi, indifferentemente, come funzione dell'intervallo temporale Δt, intercorrente tra l'istante t cui corrisponde la configurazione di riferimento e l'istante generico $t + \Delta t$, ovvero come funzione dell'ascissa curvilinea $\Delta\sigma$ del punto I, centro istantaneo di rotazione in detto istante. Orbene, in analogia sempre con quanto si fa nel caso piano, si dirà che due punti P e P′, appartenenti rispettivamente alla sfera mobile ed a quella fissa, presentano un « coniugio di ordine m », se il cammino cinematico intercorrente fra essi risulta costante, nell'intorno della considerata configurazione, a meno di infinitesimi di ordine m; come infinitesimo principale avendo assunto l'ascissa curvilinea $\Delta\sigma$ del punto I, ovvero l'intervallo di tempo Δt cui tale punto corrisponde.

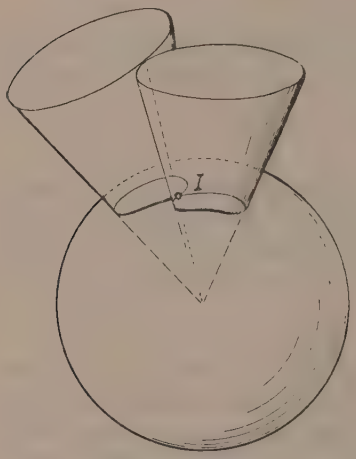


Fig. 1.

Ammesse tutte le ipotesi di continuità e derivabilità necessarie, perché due punti P e P′ presentino un coniugio di ordine m, occorrerà e basterà che sia:

$$\frac{dc}{d\sigma} = \frac{d^2c}{d\sigma^2} = \frac{d^3c}{d\sigma^3} = \cdots = \frac{d^{m-1}c}{d\sigma^{m-1}} = 0 \quad , \qquad \text{per} \quad \Delta\sigma = 0 .$$

(1) Cfr. René Garnier. *Cours de Cinématique*, Paris 1940. Tome II, Chap. VI, p. 103, n. 162.

(2) Cfr. Luigi Sobrero. *Di una elementare proprietà cinematica analoga al principio di Fermat*. « Rendiconti dell'Accademia Nazionale de Lincei », ser. VIII, fasc. 4 (1950).

3. CARATTERIZZAZIONE DELLE COPPIE DI PUNTI CHE PRESENTANO UN CONIUGIO DEL SECONDO, TERZO, QUARTO E QUINTO ORDINE [3]. – Detti α e α' gli angoli che il cerchio massimo, tangente alle due polodie in I, ed orientato come la polodia fissa, forma rispettivamente con i cerchi massimi IP, IP', facili calcoli mostrano che, perché i due punti P e P' presentino un coniugio del secondo ordine, occorre e basta che sia $\alpha' = \pi + \alpha$. Donde: *Coppie di punti coniugati di ordine 2 sono tutte le coppie di punti sul medesimo cerchio massimo per il centro istantaneo di rotazione.* Fra queste ∞^3 coppie di punti vi saranno le eventuali coppie di punti che presentano un coniugio del terzo ordine, caratterizzate dalla ulteriore relazione:

$$\frac{d^2 c}{d\sigma^2} = \sin\alpha \frac{d\alpha}{d\sigma} + \sin\alpha' \frac{d\alpha'}{d\sigma} = 0$$

che diviene, tenuta presente la condizione di coniugio del secondo ordine,

$$\frac{d\alpha}{d\sigma} = \frac{d\alpha'}{d\sigma} \quad \text{per} \quad \Delta\sigma = 0.$$

Per determinare i valori di $d\alpha/d\sigma$ e $d\alpha'/d\sigma$ in funzione degli elementi che individuano sulle due sfere i punti P e P' (angoli α e α', lunghezze degli

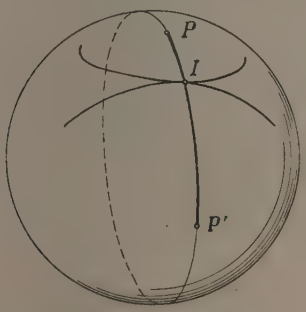


Fig. 2.

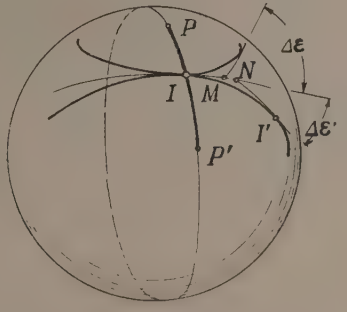


Fig. 3.

archi PI, P'I) osserviamo che è (vedi fig. 3, con le notazioni in essa usate), a meno d'infinitesimi di ordine superiore rispetto a $\Delta\sigma$:

$$\Delta\alpha = \frac{\sin\alpha}{\sin\frac{s}{r}} \frac{\Delta\sigma}{r^2} - \frac{\Delta e}{r^2} - \Delta\varepsilon$$

e, analogamente:

$$\Delta\alpha' = \frac{\sin\alpha'}{\sin\frac{s'}{r}} \frac{\Delta\sigma}{r^2} - \frac{\Delta e'}{r^2} - \Delta\varepsilon',$$

(3) Per una qualsiasi coppia di punti P e P' il cammino cinematico è sempre costante a meno di infinitesimi del primo ordine rispetto a $\Delta\sigma$. Il coniugio del primo ordine non presenta quindi alcun interesse.

ove Δe è l'eccesso sferico del triangolo IMI', $\Delta e'$ è l'analogo del triangolo INI'. Notoriamente poi, $d\varepsilon/d\sigma$ ($d\varepsilon'/d\sigma$) fornisce la curvatura sferica della polodia mobile (fissa) in I, ed eguaglia l'inverso $1/R_m$ ($1/R_f$) del raggio di curvatura sferica in detto punto. Non altrettanto noto, ma acquisibile con facili calcoli e semplici osservazioni, è che $de/d\sigma$ e $de'/d\sigma$ sono legati a α, s e a α', s' rispettivamente, dalle relazioni:

$$\frac{de}{d\sigma} = 2r \operatorname{tg} \frac{1}{2}\frac{s}{r} \sin\alpha \quad ; \quad \frac{de'}{d\sigma} = 2r \operatorname{tg} \frac{1}{2}\frac{s'}{r} \sin\alpha'.$$

Si ha quindi:

$$\frac{d\alpha}{d\sigma} = \frac{\sin\alpha}{r} \operatorname{cotg} \frac{s}{r} - \frac{1}{R_m} \quad ; \quad \frac{d\alpha'}{d\sigma} = \frac{\sin\alpha'}{r} \operatorname{cotg} \frac{s'}{r} - \frac{1}{R_f}.$$

Eguagliando tali espressioni, come richiede il coniugio del terzo ordine, e tenendo conto della relazione $\alpha' = \pi + \alpha$, si perviene alla ben nota formula di Savary:

$$\frac{1}{r} \operatorname{cotg} \frac{s}{r} + \frac{1}{r} \operatorname{cotg} \frac{s'}{r} = \left(\frac{1}{R_m} - \frac{1}{R_f}\right) \frac{1}{\sin\alpha}.$$

Le coppie di punti che presentano un coniugio del terzo ordine, sono quelle coppie di punti, sul medesimo cerchio massimo per il centro istantaneo di rotazione, che soddisfano la formula di Savary. È facile a questo punto prevedere che, come accade del resto nel caso piano, fra tali ∞^2 coppie di punti ve ne sia un certo numero con coniugio del quarto ordine. I fatti confermano la previsione. Per tali punti con coniugio del quarto ordine dovrà essere verificata la condizione di coniugio del secondo ($\alpha' = \pi + \alpha$) e del terzo ordine (formula di Savary), ed inoltre dovrà essere:

$$\frac{d^3 c}{d\sigma^3} = 0,$$

ovvero, come mostrano calcoli immediati, $d^2\alpha/d\sigma^2 = d^2\alpha'/d\sigma^2$ per $\Delta\sigma = 0$.

Tali ultime derivate, espresse in funzione di α, s e di α', s', rispettivamente, risultano fornite dalle relazioni:

$$\frac{d^2\alpha}{d\sigma^2} = \frac{\cos\alpha}{r} \operatorname{cotg} \frac{s}{r} \frac{d\alpha}{d\sigma} + \frac{\sin\alpha\cos\alpha}{r^2 \sin^2 \frac{s}{r}} - \frac{d}{d\sigma}\frac{1}{R_m};$$

$$\frac{d^2\alpha'}{d\sigma^2} = \frac{\cos\alpha'}{r} \operatorname{cotg} \frac{s'}{r} \frac{d\alpha'}{d\sigma} + \frac{\sin\alpha'\cos\alpha'}{r^2 \sin^2 \frac{s'}{r}} - \frac{d}{d\sigma}\frac{1}{R_f}.$$

Eguagliando queste ultime espressioni e tenendo conto delle condizioni di coniugio del secondo e terzo ordine, si perviene, a semplificazioni eseguite, alle relazioni:

$$\frac{1}{r} \operatorname{cotg} \frac{s}{r} = \frac{1}{X\cos\alpha} - \frac{1}{Y\sin\alpha} \quad ; \quad \frac{1}{r} \operatorname{cotg} \frac{s'}{r} = \frac{1}{X'\cos\alpha} - \frac{1}{Y'\sin\alpha},$$

dove si è posto:

$$\frac{1}{L} = \frac{1}{R_m} - \frac{1}{R_f} \quad ; \quad \frac{1}{X} = \frac{1}{3} L \frac{d}{d\sigma} \frac{1}{L} = \frac{1}{X'} ;$$

$$\frac{1}{Y} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{R_m} + \frac{1}{L}\right) \quad ; \quad \frac{1}{Y'} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{R_f} - \frac{1}{L}\right).$$

Dette equazioni in α è in s, in α e in s', rispettivamente rappresentano due cubiche sferiche [4], sulle quali risultano distribuirsi i punti P e P', che presentano un coniugio del quarto ordine. Tali curve sono quindi le corrispondenti, per il moto di una sfera su se stessa, delle cubiche di Allievi, introdotte da questi [5], per il moto di un piano su se stesso.

Su queste cubiche sferiche poi si troveranno quegli eventuali punti che, a due a due, presentano un coniugio del quinto ordine, la cui distanza cioè rimane inalterata, nel moto della sfera nell'intorno della configurazione da essa occupata nell'istante iniziale, a meno di infinitesimi del quinto ordine. Per individuare tali punti, basta conoscere il cerchio massimo, e quindi l'angolo α che lo determina, sul quale essi si trovano.

La condizione di coniugio del quinto ordine, $d^4c/d\sigma^4 = 0$, analogamente per quanto accade alle condizioni di coniugio del secondo, terzo, quarto ordine, richiede l'ulteriore condizione: $d^3\alpha/d\sigma^3 = d^3\alpha'/d\sigma^3$. Valutando tali derivate, con calcoli concettualmente facili ma piuttosto laboriosi, nei quali si deve tenere conto della relazione $\alpha' = \pi + \alpha$, della formula di Savary e delle equazioni delle due cubiche sferiche testè introdotte, si perviene alla seguente equazione in cotg α. Tale equazione, con le sue soluzioni reali, permette di individuare i punti con coniugio del quinto ordine (punti che diremo *principali*):

$$\frac{1}{YY'}\operatorname{cotg}^2\alpha - \left(\frac{3}{XY} + \frac{1}{Y^2}\frac{d}{d\sigma}Y\right)\operatorname{cotg}\alpha - \left(\frac{1}{X^2} - \frac{d}{d\sigma}\frac{1}{X}\right) -$$

$$- \frac{1}{X}\left(\frac{1}{Y} + \frac{1}{Y'}\right)\frac{1}{\operatorname{cotg}\alpha} + \frac{1}{X^2\operatorname{cotg}^2\alpha} - \frac{\operatorname{cotg}^2\alpha}{r^2(1+\operatorname{cotg}^2\alpha)} = 0$$

ovvero:

$$\frac{1}{YY'}\operatorname{cotg}^6\alpha - \left(\frac{3}{XY} + \frac{1}{Y^2}\frac{d}{d\sigma}Y\right)\operatorname{cotg}^5\alpha + \left(\frac{1}{YY'} - \frac{1}{X^2} - \frac{1}{r^2} + \frac{d}{d\sigma}\frac{1}{X}\right)\operatorname{cotg}^4\alpha -$$

$$- \left(\frac{4}{XY} + \frac{1}{XY'} + \frac{1}{Y^2}\frac{d}{d\sigma}Y\right)\operatorname{cotg}^3\alpha + \frac{d}{d\sigma}\frac{1}{X}\operatorname{cotg}^2\alpha - \frac{1}{X}\left(\frac{1}{Y} + \frac{1}{Y'}\right)\operatorname{cotg}\alpha + \frac{1}{X^2} = 0.$$

4. BREVE DISCUSSIONE DEI RISULTATI. – Le cubiche sferiche, luogo dei punti, rispettivamente sulla sfera mobile e su quella fissa, con coniugio del quarto ordine, si presentano con equazioni del tutto analoghe a quelle

(4) Si ricordi che per ordine di una curva sopra una sfera si intende il numero delle intersezioni che essa presenta con un generico cerchio massimo della stessa sfera su cui essa giace.

(5) Cfr. L. ALLIEVI, *Cinematica della biella piana*, Tipogr. F. Giannini e Figli, Napoli 1895.

delle cubiche di Allievi. Ad esse possiamo dunque estendere facilmente il metodo di determinazione per punti applicato alle cubiche di Allievi. È noto poi che, nel caso piano, due dei sei punti principali significativi coincidono con i punti ciclici [6]. Avendo carattere di continuità il passaggio dal caso sferico, qui studiato, al caso piano, è opinabile che nel caso sferico vi siano solo quattro punti principali significativi reali.

Per sottoporre a prima indagine quanto ora affermato, consideriamo un caso particolare, ma importante, il caso cioè in cui le due polodie presentino stazionarietà di curvatura nel loro punto di contatto I. L'equazione dei punti principali si riduce allora alla seguente:

$$\operatorname{cotg}^6\alpha + \left(1 - \frac{YY'}{r^2} + YY'\frac{d}{d\sigma}\frac{1}{X}\right)\operatorname{cotg}^4\alpha + YY'\frac{d}{d\sigma}\frac{1}{X}\operatorname{cotg}^2\alpha = 0,$$

nella quale si legge che due punti principali coincidono col punto d'intersezione del cerchio massimo, normale alle due polodie nel loro punto di contatto, con la cubica sferica, prima introdotta. Perché vi siano poi altri punti principali reali, sia per il caso sferico che per il caso piano, è necessario che sia: $\frac{d}{d\sigma}\frac{1}{X} \leq 0$. *Per il caso piano*, si verifica che, soddisfatta tale condizione, due punti principali vanno a cadere, come si sapeva, nei punti ciclici del piano, i rimanenti due, reali, risultano simmetrici rispetto alla normale comune alle due polodie. *Per il caso sferico*, data l'influenza del segno di $YY'\frac{d}{d\sigma}\frac{1}{X}$ sui termini che l'accompagnano nella espressione delle soluzioni dell'equazione dei punti principali, sempre nel caso particolare in cui ci siamo posti, si vede analogamente che due punti principali risultano reali e simmetrici rispetto al cerchio massimo normale alle due polodie in I e i rimanenti due risultano immaginari.

La possibilità di determinare coppie di punti coniugati del quarto e quinto ordine, permette di realizzare con il moto di una biella, un moto iperosculatore del generico moto rigido di una sfera su se stessa (moto rigido con un punto fisso) nell'intorno di una sua generica configurazione istantanea. Di ciò daremo esempi in altra successiva comunicazione.

(6) Tale circostanza è sottoponibile a verifica immediata. Infatti se nella equazione dei punti principali, caso sferico, si fa tendere il raggio r della sfera all'infinito, l'equazione che così si ottiene, equazione dei punti principali, caso piano, è soddisfatta per cotg α $\cdot$ i.

Meccanica. — *Sul principio dell'azione potenziale stazionaria.* Nota di EDOARDO STORCHI, presentata (*) dal Corrisp. B. FINZI.

1. È ben noto come le equazioni di movimento di un sistema materiale si possano dedurre da princìpi variazionali altamente espressivi dal punto di vista fisico. Tali princìpi, che sono sostanzialmente equivalenti all'equazione simbolica della dinamica, esprimono di solito che il moto naturale del sistema avviene in condizioni tali da rispettare la stazionarietà di qualche significativa quantità meccanica o geometrica, che può essere un'energia media, un'azione, la costrizione dei vincoli, la curvatura della traiettoria descritta dal punto rappresentativo del sistema, ecc. Si hanno così i princìpi di Hamilton, di Hölder, di Gauss, di Hertz, ecc.

Fra questi princìpi riveste singolare importanza il principio di Hamilton il quale afferma che fra tutti i moti variati sincroni che rispettano le configurazioni estreme, il moto naturale è quello per cui risulta:

$$\int_{t_0}^{t_1} (\delta^* \mathrm{L} + \delta \mathrm{T})\, dt = 0 \tag{1}$$

dove $\delta^* \mathrm{L}$ denota il lavoro virtuale delle forze attive (che è funzione del tempo t) e $\delta \mathrm{T}$ la variazione di energia cinetica. In particolare nel caso conservativo, il moto naturale è quello per cui risulta stazionaria l'azione Hamiltoniana:

$$\mathrm{A} = \int_{t_0}^{t_1} (\mathrm{T} - \mathrm{V})\, dt$$

o, se si vuole, è quello per cui l'energia totale del sistema si ripartisce in media più equamente fra le due forme che ha a disposizione, l'energia cinetica e l'energia potenziale.

Dal principio di Hamilton, introdotto il concetto di moto variato asincrono, si deduce poi il principio di Hölder o dell'azione stazionaria.

Dopo aver notato che la variazione asincrona $\delta_a \mathrm{T}$ dell'energia cinetica corrispondente ad una generica δt funzione arbitraria del tempo t è legata alla variazione sincrona $\delta \mathrm{T}$ nel modo seguente (1):

$$\delta_a \mathrm{T} = \delta \mathrm{T} - 2\,\mathrm{T} \frac{d}{dt}(\delta t)$$

(*) Nella seduta del 13 giugno 1953.

(1) Vedasi ad esempio: B. FINZI, *Meccanica razionale*. Zanichelli, vol. II, pp. 308 312 (1946).

la (1) diviene, nel caso conservativo:

$$(2) \qquad \int_{t_0}^{t_1} \left[\delta U + \delta_a T + 2T \frac{d}{dt}(\delta t)\right] dt = 0.$$

Di qui, assumendo la funzione *a priori* arbitraria δt in modo tale che risulti:

$$(3) \qquad \delta_a T = \delta U \; (= \delta_a U)$$

si deduce:

$$\int_{t_0}^{t_1} \left[\delta U + \delta_a T + 2T \frac{d}{dt}(\delta t)\right] dt = \int_{t_0}^{t_1} \left[2\,\delta_a T + 2T \frac{d}{dt}(\delta t)\right] dt =$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} \delta_a (2T dt) = \delta_a \int_{t_0}^{t_1} 2T dt = 0.$$

Poiché la (3), detta E la somma dell'energia cinetica e dell'energia potenziale ossia l'energia totale, può scriversi:

$$\delta_a E = 0$$

i moti variati asincroni per i quali la (3) è rispettata si dicono isoenergetici e pertanto si giunge alla formulazione seguente del principio di Hölder:

Fra tutti i moti variati asincroni isoenergetici che rispettano le configurazioni estreme, il moto naturale è quello per cui risulta stazionaria l'azione:

$$A = \int_{t_0}^{t_1} 2T dt.$$

Non mi consta che sia stato studiato il problema di riconoscere se, con opportune precisazioni della funzione *a priori* arbitraria δt si possa giungere alla formulazione di altri princîpi variazionali, espressivi dal punto di vista fisico [2].

Oggetto della presente Nota è l'analisi della questione. Dopo aver indicato un metodo che permette di esaminare rapidamente le varie possibilità, si perviene alla conclusione che esiste un secondo significativo principio variazionale affine a quello di Hölder, e che anzi completa quest'ultimo, facente pure capo alla nozione di moto variato asincrono.

(2) Sui princîpi variazionali della Meccanica e in particolare sul principio della minima azione, oltre alla Nota originale dell'Hölder (« Gött. Nach. », 1862, p. 122), vedansi i trattati di Meccanica dell'Appell, del Levi-Civita, del Maggi. Si consultino inoltre H. Poincaré, *Les Methodes Nouvelles de la Mecanique celeste*, vol. III; E. T. Wittaker, *A treatise on the analytical dynamics*, Cambridge 1927; B. Finzi, *Princîpi variazionali*, Libreria Politecnica Tamburini 1949; Cornelius Lanczos, *The variational principles of Mechanics*, University of Toronto Press 1949.

2. Ponendoci da un punto di vista generale, supponiamo che la (2) esprima un principio variazionale relativo ad una certa azione:

$$A = \int_{t_0}^{t_1} f dt .$$

In queste condizioni deve risultare:

$$\int_{t_0}^{t_1} \left[\delta U + \delta_a T + 2 T \frac{d}{dt} (\delta t) \right] dt = \delta_a \int_{t_0}^{t_1} f dt = \int_{t_0}^{t_1} \delta_a (f dt) = \int_{t_0}^{t_1} [\delta_a f \cdot dt + f \delta_a (dt)] .$$

Questa per essere: $\frac{d}{dt} (\delta t)\, dt = \delta_a (dt)$, può scriversi:

$$\delta U + \delta_a T - \delta_a f = (f - 2 T) \frac{d}{dt} (\delta t) . \tag{4}$$

È chiaro che, utilizzando nella (4) opportunamente l'arbitrarietà della funzione δt si possano ottenere formalmente nuovi princìpi variazionali ma è dubbio che tali princìpi siano tutti fisicamente espressivi.

Si cominci con l'osservare che, assunto nella (4) $\delta t = 0$, o più generalmente $\delta t = \text{cost.}$, il secondo membro si annulla, le variazioni diventano sincrone, affinché si annulli anche il primo membro deve assumersi: $f = T + U$ e il corrispondente principio variazionale è quello di Hamilton.

Calcolando invece la funzione δt in modo che risulti $\delta_a T = \delta U$, la (4) diviene:

$$\delta_a (2 T - f) = (f - 2 T) \frac{d}{dt} (\delta t)$$

ed è soddisfatta per $f = 2 T$. Il corrispondente principio variazionale è quello di Hölder.

Nei due casi esaminati la (4) è soddisfatta per essere nullo contemporaneamente il primo ed il secondo membro.

Se più generalmente si calcola la funzione arbitraria δt in modo da soddisfare la (4), per quanto detto sopra, risulta nel moto naturale:

$$\delta_a \left[\int_{t_0}^{t_1} f dt \right] = 0 .$$

Si può allora enunciare il seguente principio variazionale, affatto generale:

Fra tutti i moti variati tali che nel passaggio dal moto naturale al moto variato è verificata la (4) e che rispettano le configurazioni estreme, il moto naturale è quello per cui risulta stazionaria l'azione:

$$A = \int_{t_0}^{t_1} f dt . \tag{5}$$

Questo principio, diciamolo subito, per nulla significativo dal punto di vista fisico qualora la f sia generica, ha tuttavia il pregio di essere il più generale principio deducibile da quello di Hamilton, tenuto conto della possibilità di moti variati asincroni, e contiene quindi in germe tutte le possibili estensioni del principio dell'azione stazionaria.

Nella (4), che scriveremo nel modo seguente:

$$dt\,\delta_a(T + U - f) + (2T - f)\,\delta_a(dt) = 0 \tag{6}$$

la f deve essere una quantità meccanica avente le dimensioni di una energia. Anzi, trattandosi di caso conservativo, è spontaneo ritenere che f sia una funzione delle due variabili indipendenti T e $-U$ che rappresentano le due sole forme di energia a disposizione, l'energia cinetica e l'energia potenziale.

Il principio enunciato diventa espressivo dal punto di vista fisico se sono verificate nel contempo le due condizioni seguenti:

1° La (6) esprime l'annullarsi della variazione $\delta_a Q$ di una quantità meccanica Q (che sia funzione di T ed U, oppure di T , U , dt; oppure un funzionale di T ed U: nel caso più semplice $Q = \int_{t_0}^{t_1} q\,(T , U)\,dt$).

2° La funzione $f = f(T , U)$ è tale da rendere significativa l'azione definita dalla (5).

La prima condizione, di carattere strettamente matematico, pone naturalmente un vincolo alla $f(T , U)$; la scelta di quest'ultima funzione, allo scopo di ottenere un significativo principio variazionale, deve poi essere subordinata alla seconda condizione.

Casi particolari del principio enunciato sono ad esempio il principio di Hamilton $\left(Q = dt \text{ oppure } Q = \int_{t_0}^{t_1} dt \text{ e conseguentemente } f = T + U\right)$ e il principio di Hölder ($Q = T - U$ e conseguentemente $f = 2T$).

3. Dalla (6) segue:

$$dt\left(1 - \frac{\partial f}{\partial T}\right)\delta_a T + dt\left(1 - \frac{\partial f}{\partial U}\right)\delta_a U + (2T - f)\,\delta_a(dt) = 0 .$$

Posto per semplicità di notazione:

$$T = x \quad , \quad U = y \quad , \quad dt = z$$

e indicando semplicemente con d il simbolo di variazione asincrona, la precedente relazione si scrive:

$$z\left(1 - \frac{\partial f}{\partial x}\right)dx + z\left(1 - \frac{\partial f}{\partial y}\right)dy + (2x - f)\,dz = 0 . \tag{7}$$

Il primo membro si presenta come una forma differenziale a tre variabili e affinché la (7) traduca l'annullarsi della variazione asincrona di una quantità meccanica Q funzione delle tre variabili indipendenti x, y, z occorre e basta che la forma differenziale ammetta un fattore integrante $\mu = \mu(x, y, z)$.

Escludendo allora il caso di Hölder ($f = 2x$) e tenendo presente che è $z = dt \neq 0$ dalla (7) segue, moltiplicando ambo i membri per $\varphi(x, y, z) = \frac{1}{(2x-f)z}$:

$$(7') \qquad \frac{1-\frac{\partial f}{\partial x}}{2x-f}dx + \frac{1-\frac{\partial f}{\partial y}}{2x-f}dy + \frac{1}{z}dz = 0.$$

Il primo membro della (7') con f generica non è un differenziale esatto, giacché, mentre due delle condizioni di irrotazionalità sono verificate, lo stesso non accade per la terza risultando:

$$\frac{\partial}{\partial y}\frac{1-\frac{\partial f}{\partial x}}{2x-f} - \frac{\partial}{\partial x}\frac{1-\frac{\partial f}{\partial y}}{2x-f} = \frac{\left(1-\frac{\partial f}{\partial x}\right)\cdot\frac{\partial f}{\partial y} + \left(1-\frac{\partial f}{\partial y}\right)\left(2-\frac{\partial f}{\partial x}\right)}{(2x-f)^2}.$$

Si desume però da quest'ultima relazione che se la $f(x, y)$ verifica la equazione alle derivate parziali:

$$(8) \qquad \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} = 2$$

il primo membro della (7') è un differenziale esatto. Se dunque la funzione $f(x, y)$ soddisfa l'equazione (8), la forma differenziale al primo membro della (7') possiede un fattore integrante, il seguente:

$$\mu(x, y, z) = \frac{1}{(2x-f)z}.$$

Viceversa si verifica immediatamente che la condizione (8) è appunto quella che deve essere soddisfatta affinchè l'espressione differenziale al primo membro della (7') ammetta un fattore integrante.

Poiché l'equazione (8) ammette l'integrale generale seguente:

$$(9) \qquad f(x, y) = F(x-y) + x + y$$

con F funzione arbitraria dell'argomento $x - y$, il fattore integrante della forma risulta poi:

$$\mu(x, y, z) = \frac{1}{[2x - F(x-y) - x - y]z} = \frac{1}{[(x-y) - F(x-y)]z}$$

e la (7') conseguentemente ci dà:

$$\frac{-F'(x-y)}{(x-y) - F(x-y)}d(x-y) + \frac{dz}{z} = 0.$$

Ripristinando le antiche notazioni e osservando che $x - y = T - U$ altro non è che l'energia totale E, l'ultima relazione si scrive così:

$$(10) \qquad \frac{-F'(E)}{E - F(E)} \delta_a E + \delta_a (\log dt) = 0 .$$

È interessante rilevare che, in forza al risultato ora conseguito: se la (6) esprime l'annullarsi della variazione asincrona di una quantità meccanica Q, funzione di T , U e dt, necessariamente la quantità Q deve dipendere soltanto dall'energia totale T — U e dal tempo. È poi ovvio che allo stesso risultato si perviene ritenendo che la quantità Q sia un funzionale lineare del tipo:

$$Q = \int_{t_0}^{t_1} q\,(T , U)\, dt .$$

La funzione $f(x , y)$, per la (9) si esprime poi nel modo seguente:

$$(11) \qquad f(T , U) = 2T - [E - F(E)]$$

con F funzione arbitraria dell'energia totale E.

Operato il cambio:

$$(12) \qquad E - F(E) = \lambda G(E)$$

in cui λ denota un parametro arbitrario e G la nuova funzione arbitraria dell'energia totale, la (10) diviene:

$$\frac{\lambda G'(E) - 1}{\lambda G(E)} \delta_a E + \delta_a \log dt = 0$$

ossia:

$$\delta_a \log \left[dt \cdot G(E) \cdot \exp\left(-\frac{1}{\lambda} \int \frac{dE}{G(E)} \right) \right] = 0 .$$

Nel passaggio dal moto naturale al moto variato rimane dunque stazionaria la quantità meccanica: $\bar{Q} = \log \left[G(E) \exp\left(-\frac{1}{\lambda} \int \frac{dE}{G(E)} \right) dt \right]$ od anche una qualsiasi funzione di $\bar{Q}$ come ad esempio: $Q = [G(E)]^{\lambda} \exp \left[-\int \frac{dE}{G(E)} \right] dt^{\lambda}$ oppure il funzionale: $Q^* = \int_{t_0}^{t_1} G(E) \exp\left(-\frac{1}{\lambda} \int \frac{dE}{G(E)} \right) dt$.

Per le (11) e (12) possiamo dunque enunciare il seguente principio variazionale:

« Fra tutti i moti variati che rispettano le configurazioni estreme e tali che nel passaggio dal moto naturale al moto variato sia verificata la equazione variazionale:

$$\delta_a \left\{ [G(E)]^{\lambda} \exp \left[-\int \frac{dE}{G(E)} \right] dt^{\lambda} \right\} = 0$$

il moto naturale è quello per cui risulta stazionaria l'azione:

$$A = \int_{t_0}^{t_1} [2T - \lambda G(E)]\, dt$$

ove λ è un parametro arbitrario e G funzione arbitraria dell'energia totale ».

Questo principio variazionale costituisce la più generale estensione dei princìpi di Hamilton e di Hölder che si possa stabilire nell'ipotesi che la funzione f che interviene nell'azione dipenda solo da T e da U e che la quantità che rimane inalterata nel passaggio dal moto naturale al moto variato sia funzione di T, U, dt o sia un funzionale del tipo:

$$Q = \int_{t_0}^{t_1} q(T, U)\, dt.$$

Nell'attuale formulazione del principio variazionale si è tenuto però soltanto conto della prima condizione, di carattere matematico, e non della seconda, di carattere fisico.

Per soddisfare a quest'ultima abbiamo a disposizione la funzione arbitraria G (E). Precisando G in modo conveniente, potremo così ottenere dei princìpi variazionali, fisicamente significativi.

Un caso particolarmente espressivo è quello corrispondente a $G(E) = E$. Il relativo principio variazionale è il seguente:

(*) « Fra tutti i moti variati che rispettano le configurazioni estreme e tali che nel passaggio dal moto naturale al moto variato risulti:

$$\delta_a [E^{\lambda-1}\, dt^{\lambda}] = 0$$

il moto naturale è quello per cui si mantiene stazionaria l'azione:

$$A = \int_{t_0}^{t_1} (2T - \lambda E)\, dt = \int_{t_0}^{t_1} [(2-\lambda)T + \lambda U]\, dt ».$$

Casi particolari notevoli:

1° Per $\lambda = 0$, il principio (*) è il principio di Hölder [3]. La quantità che rimane invariata nel passaggio dal moto naturale al moto variato è l'energia totale E mentre l'azione che rimane stazionaria nel moto naturale e quella che può dirsi l'*azione cinetica*:

$$A = \int_{t_0}^{t_1} 2T\, dt.$$

(3) Il principio di Hölder per il quale $f = 2T$, era stato in realtà a suo tempo escluso, ma con la posizione (12) può farsi rientrare nel principio generale ora enunciato come caso limite ($\lambda = 0$).

2° Per $\lambda = 1$ il principio (*) si identifica col principio di Hamilton. La quantità che rimane invariata nel passaggio dal moto naturale al moto variato è $Q = dt$ $\left(\text{oppure } Q = \int_{t_0}^{t_1} dt\right)$ il che significa che il moto variato è sincrono. L'azione che rimane stazionaria nel moto naturale è poi l'*azione hamiltoniana*:

$$A = \int_{t_0}^{t_1} L\,dt = \int_{t_0}^{t_1} (T + U)\,dt.$$

Nei due casi segnalati la Q o non contiene il tempo o non contiene l'energia. In tutti gli altri casi, in corrispondenza cioè a generici valori di λ, l'energia e il tempo entrano ambedue nella quantità meccanica Q.

3° Per $\lambda = 2$, si ottiene un terzo principio che riteniamo particolarmente significativo e che chiameremo *principio dell'azione potenziale stazionaria*.

La quantità Q che rimane inalterata nel passaggio dal moto naturale al moto variato è:

$$Q = E\,dt^2 \quad \text{oppure:} \quad Q = \sqrt{E}\,dt; \quad \text{oppure ancora:} \quad Q = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{E}\,dt.$$

L'azione che risulta stazionaria nel moto naturale è invece quella definita nel modo seguente:

$$A = \int_{t_0}^{t_1} 2U\,dt$$

e che quindi ragionevolmente chiameremo *azione potenziale*.

Nel caso attuale chiameremo *isocronoenergetici* i moti variati asincroni, giacché nel passaggio dal moto naturale al moto variato rimane inalterato il prodotto fra l'energia totale e il quadrato del tempo impiegato dal sistema per portarsi da una posizione ad una posizione infinitamente vicina.

Si giunge allora alla formulazione del seguente principio:

« Fra tutti i moti variati asincroni isocronoenergetici che rispettano le configurazioni estreme, il moto naturale è quello per cui risulta stazionaria l'azione potenziale:

$$A = \int_{t_0}^{t_1} 2U\,dt$$

o anche, se si vuole, risulta stazionario il valor medio dell'energia potenziale nell'intervallo di tempo $t_0 - t_1$ ».

Con altro linguaggio:

« Fra tutti i moti variati asincroni isocronoenergetici compatibili coi vincoli, il sistema sceglie quello per cui assume in media energia potenziale stazionaria ».

Astronomia. — *Sull'equilibrio stellare convettivo in condizioni politropiche generalizzate.* Nota di MASSIMO CIMINO, presentata (*) dal Socio G. ARMELLINI.

1. È noto che per *trasformazione politropica* di un gas si intende, con Emden (1), una trasformazione termodinamica espressa dalla legge elementare:

$$dQ = \xi\, dT \tag{1}$$

dQ essendo la variazione della quantità di calore in 1 gr. di gas, dT la corrispondente variazione di temperatura e ξ una *costante* (2).

La variazione dell'entropia è allora:

$$dS = \frac{dQ}{T} = \xi \frac{dT}{T} \tag{2}$$

e sarà positiva o negativa secondo che è $\xi \gtrless 0$.

Vale d'altra parte per la trasformazione termodinamica la relazione fondamentale:

$$dQ = c_v\, dT + A p\, dv \tag{3}$$

[c_v = calore specifico a volume costante; p = pressione; v = volume occupato dal grammo di gas; A = equivalente termico del lavoro]; confrontandola con la (1), e tenendo presente l'equazione di stato dei gas:

$$p = \frac{R}{q} \mu T \tag{4}$$

[R = costante dei gas; q = peso molecolare; μ = densità], si ha subito la ben nota relazione:

$$\frac{dp}{p} = \gamma \frac{d\mu}{\mu} \quad ; \quad \gamma = \frac{c_p - \xi}{c_v - \xi} \tag{5}$$

[c_p = calore specifico a pressione costante].

È pure noto che la (5) – assieme all'equazione dell'idrostatica:

$$dp = \mu\, dU \tag{6}$$

(*) Nella seduta del 13 giugno 1953.

(1) Cfr. la classica opera di: R. EMDEN, *Gaskügeln*. Leipzig 1907.

(2) In particolare, per $\xi = 0$ si ha una *trasformazione adiabatica*; per $\xi = \pm \infty$ una *isoterma*.

[U = potenziale newtoniano interno], e all'equazione di Poisson:

$$\Delta U = -4\pi f \mu \tag{7}$$

[Δ = operatore di Laplace; f = costante attrattiva], – porta, *nel caso di distribuzioni sferiche*, all'equazione di Emden:

$$\frac{d^2U}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{dU}{dr} + 4\pi f \alpha^2 \cdot U^n = 0 \quad ; \quad n = \frac{1}{\gamma - 1} \tag{8}$$

[α^2 essendo una costante], la quale permette di calcolare U – e quindi anche μ, p, e T –, in funzione del raggio r della distribuzione sferica. Notoriamente, sulla (8) sono fondate le teorie della costituzione interna stellare.

Ora, sempre rimanendo nell'ambito delle teorie classiche (equilibrio convettivo) – per le quali le equazioni (3) e (4) conservano la loro piena validità –, può avere interesse, specialmente in relazione ai problemi di stabilità, di generalizzare ancora la condizione imposta all'entropia del gas, ammettendo che nella (1) la quantità ξ, anzicché una costante, sia una *funzione della temperatura* T. In particolare supporremo che essa abbia la forma (che facilmente si presta per le applicazioni):

$$\xi(T) = \xi_0 + \xi_1 T^{m_1} + \xi_2 T^{m_2} + \cdots + \xi_\lambda T^{m_\lambda} \tag{9}$$

$\xi_0, \xi_1, \cdots, \xi_\lambda$; $m_1, m_2, \cdots, m_\lambda$ essendo *costanti*. E poichè, per la (4), la temperatura T è proporzionale (per q costante) al rapporto: p/μ, noi adotteremo per la ξ l'espressione:

$$\xi(t) = \xi_0 + \xi_1 t^{m_1} + \xi_2 t^{m_2} + \cdots + \xi_\lambda t^{m_\lambda} \quad ; \quad t = \frac{p}{\mu}. \tag{10}$$

2. Vediamo che cosa si può dire *in generale* allorché si ammette l'ipotesi (10) per la ξ. Dal solito confronto delle (1), (3) e (4) si arriva alla (5), ove però *questa volta* la quantità γ è funzione [3] di p/μ attraverso ξ. La (5) può scriversi:

$$\frac{dp}{d\mu} = f\left(\frac{p}{\mu}\right) \tag{11}$$

con:

$$f(t) = t\,\frac{c_p - \xi(t)}{c_v - \xi(t)}, \tag{12}$$

(3) Non sarà inutile osservare che l'ipotesi di una γ *funzione di* T NON va confusa con quella di γ *funzione di* r, introdotta da alcuni autori [cfr. per esempio P. LEDOUX in «Astrophysica Norvegica», *3*, p. 193 (1939)] Nel primo caso l'ipotesi deriva da considerazioni di carattere fisico [legge (2) per l'entropia di un gas perfetto], nel secondo da ipotesi sul comportamento *locale* della materia stellare.

e risulta, notoriamente, integrabile per quadratura. È quindi [4]:

$$\mu = C e^{\int \frac{dt}{f(t)-t}} \quad ; \quad t = \frac{p}{\mu} \tag{13}$$

C essendo una costante arbitraria. Per le (10) (12) avremo:

$$\begin{cases} f(t)-t = t\left[\dfrac{c_p-\xi(t)}{c_v-\xi(t)} - 1\right] = t\,\dfrac{c_p-c_v}{c_v-\xi(t)} \\ \dfrac{1}{f(t)-t} = \dfrac{1}{c_p-c_v}\left[\dfrac{c_v-\xi_0}{t} - \xi_1 t^{m_1-1} - \xi_2 t^{m_2-1} - \cdots - \xi_\lambda t^{m_\lambda-1}\right] \end{cases} \tag{14}$$

e quindi:

$$\int \frac{dt}{f(t)-t} = \frac{1}{c_p-c_v}\left[(c_v-\xi_0)\log t - \frac{\xi_1}{m_1} t^{m_1} - \frac{\xi_2}{m_2} t^{m_2} - \cdots - \frac{\xi_\lambda}{m_\lambda} t^{m_\lambda}\right]$$

e infine per la (13):

$$\mu = C\left(\frac{p}{\mu}\right)^{\frac{1}{\gamma_0-1}} e^{-\frac{1}{c_p-c_v}\left[\frac{\xi_1}{m_1}\left(\frac{p}{\mu}\right)^{m_1} + \cdots + \frac{\xi_\lambda}{m_\lambda}\left(\frac{p}{\mu}\right)^{m_\lambda}\right]} ; \quad \gamma_0 = \frac{c_p-\xi_0}{c_v-\xi_0} \tag{15}$$

Si vede subito che per $\xi =$ *costante* (cioè: $\xi=\xi_0$; $\xi_1=\xi_2=\cdots=\xi_\lambda=0$) si ha:

$$\mu = C\left(\frac{p}{\mu}\right)^{\frac{1}{\gamma_0-1}} \quad ; \quad \text{ossia:} \quad p = h\mu^{\gamma_0}$$

che è la nota trasformazione politropica.

Ciò fatto, per scrivere l'equazione corrispondente alla (8), partiamo dalla (6), scrivendola:

$$d\left(\frac{p}{\mu}\right) + \frac{p}{\mu}\,\frac{d\mu}{\mu} = d\mathrm{U}\,. \tag{16}$$

Ma è dalla (13):

$$\frac{d\mu}{\mu} = \frac{dt}{f(t)-t} \quad ; \quad t = \frac{p}{\mu}$$

e tenendo presente la 2ª delle (14) e sostituendo nella (16):

$$\left\{1 + \frac{1}{c_p-c_v}\left[(c_v-\xi_0) - \xi_1 t^{m_1} - \cdots - \xi_\lambda t^{m_\lambda}\right]\right\} dt = d\mathrm{U},$$

e integrando:

$$t\left\{1 + \frac{1}{c_p-c_v}\left[(c_v-\xi_0) - \frac{\xi_1}{m_1+1} t^{m_1} - \cdots - \frac{\xi_\lambda}{m_\lambda+1} t^{m_\lambda}\right]\right\} = \mathrm{U}, \tag{17}$$

avendo scelto uguale a zero la costante additiva di integrazione.

(4) Cfr. per esempio E. GOURSAT, *Cours d'Analyse Mathématique*, Gauthier-Villars. Paris (1929), T. II, p. 317.

A questo punto rimangono tre passi da compiere: 1° risolvere la (17) rispetto a : $t = p/\mu$; 2° introdurre la soluzione (che è una funzione di U) nella (15); 3° introdurre la funzione così ottenuta: $\mu = \mu(U)$ nella equazione (7) di Poisson:

$$\frac{d^2U}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{dU}{dr} + 4\pi f \mu(U) = 0, \tag{18}$$

e discutere l'esistenza e le proprietà di quelle soluzioni che, per $r \to +0$, tendono ad un valore di U *finito*.

3. La (17) potrà ammettere, in generale, più radici reali e positive (le sole che abbiano un interesse fisico). D'altra parte però, il caso che chiameremo *politropico* – cioè $\xi = costante$ – fornisce già una discreta approssimazione dell'equilibrio stellare. Si comprende perciò l'utilità di studiare quella radice della (17) che, per $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_\lambda$ tendenti allo zero, tende alla soluzione politropica:

$$t^* = \frac{c_p - c_v}{c_p - \xi_0} U = \frac{\gamma_0 - 1}{\gamma_0} U. \tag{19}$$

Per semplicità supponiamo $\xi_1 \neq 0$ e $\xi_2 = \xi_3 = \cdots = \xi_\lambda = 0$; la discussione che segue potrà poi facilmente estendersi al caso generale. La (17) può scriversi allora:

$$t = \frac{\gamma_0 - 1}{\gamma_0}\left[U + \frac{\xi_1}{(c_p - c_v)(m_1 + 1)} t^{m_1 + 1}\right]$$

applicando alla quale una ben nota formula del Lagrange si ha, limitatamente ai termini del 1° ordine in ξ_1:

$$t = \frac{\gamma_0 - 1}{\gamma_0} U\left[1 + \frac{\xi_1}{(c_p - c_v)(m_1 + 1)} U^{m_1}\right], \tag{20}$$

che è la radice cercata.

Ciò posto, scriviamo la (15) fino ai termini del 1° ordine (nella ξ_1):

$$\mu^{\gamma_0 - 1} = C^{\gamma_0 - 1} \cdot \frac{p}{\mu} \cdot \left[1 - \frac{(\gamma_0 - 1)\xi_1}{(c_p - c_v) m_1}\left(\frac{p}{\mu}\right)^{m_1}\right]$$

e sostituendovi la (20) [ricordando che è: $t = \frac{p}{\mu}$]:

$$\mu^{\gamma_0 - 1} = C^{\gamma_0 - 1} \cdot \frac{\gamma_0 - 1}{\gamma_0} U\left[1 + \frac{\xi_1}{(c_p - c_v)(m_1 + 1)} U^{m_1}\right]\left[1 - \frac{(\gamma_0 - 1) m_1 + 1 \xi_1}{\gamma_0^{m_1} (c_p \quad c_v) m_1} U^{m_1}\right]$$

$$= C^{\gamma_0 - 1} \frac{\gamma_0 - 1}{\gamma_0} U\left[1 + \frac{\xi_1}{c_p - c_v} \frac{m_1 \gamma_0^{m_1} - (m_1 + 1)(\gamma_0 - 1)^{m_1 + 1}}{m_1 (m_1 + 1) \gamma_0^{m_1}} U^{m_1}\right.$$

e quindi:

$$(21)\qquad \begin{cases} \mu = \alpha^2 U^{\frac{1}{\gamma_0 - 1}} [1 + h\xi_1 U^{m_1}]^{\frac{1}{\gamma_0 - 1}} = \alpha^2 U^n [1 + h\xi_1 U^{m_1}]^n \\ h = \dfrac{1}{c_p - c_v} \dfrac{m_1 \cdot n (n+1)^{m_1} - (m_1 + 1)}{m_1 (m_1 + 1) \cdot n (n+1)^{m_1}} \quad ; \quad n = \dfrac{1}{\gamma_0 - 1} \end{cases}$$

α^2 essendo una costante. Per la soluzione politropica (19) avremmo avuto invece:

$$(22)\qquad \mu^* = \alpha^2 U^{\frac{1}{\gamma_0 - 1}} = \alpha^2 U^n.$$

4. Osserviamo che l'equazione:

$$(23)\qquad h = 0$$

definisce le coppie di valori (m_1, n) per le quali si cade in una soluzione politropica, *pur senza essere politropica* (nel senso di Emden) *la trasformazione termodinamica del sistema*, in quanto nella (1) la ξ *non è costante*, essendo eguale a $\xi_0 + \xi_1 T^{m_1}$.

Se la (23) non è verificata, introducendo la (21) nella equazione (18) otteniamo:

$$(24)\qquad \frac{d^2U}{dr^2} + \frac{2}{r} \cdot \frac{dU}{dr} + 4\pi f \alpha^2 \cdot \varphi(U) = 0 \quad ; \quad \varphi(U) = U^n [1 + h\xi_1 U^{m_1}]^n.$$

Sulle soluzioni: $U = U(r)$ di questa equazione – le quali per $r \to +0$ tendano ad un valore U_0 finito (e siano positive) – è stato dimostrato dallo scrivente [5]:

1° il teorema di esistenza ed unicità nell'ipotesi che la $\varphi(U)$ sia *positiva, non decrescente* e con *derivata limitata* in $0 < U \leq U_0$;

2° una *limitazione inferiore* per gli zeri delle soluzioni;

3° una *condizione sufficiente* per assicurare gli zeri delle soluzioni.

Rimandando al citato lavoro per ogni particolare, mi limiterò, in questa Nota, a trarre dai miei teoremi questa conseguenza: sia $n < 5$. Allora, come è ben noto [6], la soluzione politropica ($\xi_1 = 0$) ammette certamente uno zero per un valore R^* (finito) di r. Orbene, se per tutti i valori di U dell'intervallo: $0 < U \leq U_0$ è:

$$(25)\qquad \varphi(U) > U^n$$

(ciò che certamente ha luogo se è: $h\xi_1 > 0$), allora anche la soluzione della (24) ammette uno zero per un valore:

$$R < R^*,$$

e l'astro avrà pertanto dimensioni finite.

(5) Cfr. M. CIMINO, *Sulle soluzioni dell'equazione generale del potenziale newtoniano di una sfera fluida in equilibrio*. « Boll. Unione Mat. Ital. », ser. III, Anno VIII (1953), n. 2.

(6) Cfr. G. SANSONE, *Sulle soluzioni di Emden dell'equazione di Fowler*. « Rend. di Mat. del Seminario dell'Università di Roma », ser. V, vol. I (1940), pp. 163-176.

Fisica-matematica. — *Deduzione di un'equazione di stato dei solidi dalla teoria delle trasformazioni termoelastiche finite.* Nota di PIERO GIORGIO BORDONI, presentata (*) dal Socio A. SIGNORINI.

1. PREMESSA. – In una Nota precedente (1) si è mostrato come sia possibile ottenere relazioni fisicamente significative tra gli sforzi e le deformazioni finite di solidi omogenei ed isotropi, a trasformazioni reversibili, sostituendo alle ordinarie caratteristiche di deformazione dell'elasticità linearizzata i coefficienti che si ottengono considerando lo spostamento inverso (2), cioè quello che porta il corpo dalla configurazione finale a quella iniziale, ed introducendo un comune fattore costituito da una opportuna funzione dei loro invarianti.

Le relazioni stabilite risultano applicabili non soltanto a deformazioni isoterme, ma, in generale, a qualsiasi trasformazione termoelastica reversibile, di ampiezza finita. Valendosi di tale circostanza, nel seguito si ricaverà un'*equazione di stato* dei solidi, cioè la forma particolare che assumono le relazioni tra la deformazione e lo stress quando quest'ultimo si riduca ad una pressione o trazione uniforme, in tutto il corpo, P, ed inoltre la temperatura T abbia lo stesso valore in ogni punto.

Una sollecitazione del tipo indicato lascia necessariamente il solido simile a sé stesso (3); le sue deformazioni risultano quindi completamente individuate dalle variazioni di volume, e P viene così a dipendere soltanto dalle variabili scalari V e T.

Valendosi dell'equazione di stato ottenuta si mostrerà successivamente come l'espressione della compressibilità isoterma che essa fornisce coincida, per qualsiasi valore della temperatura, con quella che si ricava dalla teoria linearizzata delle deformazioni isoterme. Si calcolerà inoltre la pressione prodotta da un aumento di temperatura a volume costante, facendo vedere come l'espressione ottenuta si accordi con quella fornita dalla teoria statistica dei solidi.

Si mostrerà infine che il valore del coefficiente di Grüneisen relativo ad ogni solido risulta anch'esso determinato dalla sola ipotesi fondamentale

(*) Nella seduta del 13 giugno 1953.

(1) P. G. BORDONI, *Sopra le trasformazioni termoelastiche finite di certi solidi omogenei ed isotropi.* (In corso di pubblicazione nei « Rendiconti di Matematica »).

(2) Infatti i coefficienti di deformazione relativi allo spostamento diretto non individuano, in generale, le direzioni degli sforzi principali; in proposito cfr. A. SIGNORINI, *Trasformazioni termoelastiche finite* (memoria I), « Annali di Matematica », *22*, 33 (1943) e inoltre: *Trasformazioni termoelastiche finite* (memoria II), « Annali di Matematica », *30*, 1 (1949).

(3) Si vedano in proposito il lavoro citato nella nota (1) n. 8, oppure il secondo dei lavori citati nella nota (2), cap. II, n. 9.

posta a base della precedente teoria delle deformazioni termoelastiche, risultando soddisfacentemente prossimo ai valori sperimentali, specialmente per i solidi in cui il rapporto delle costanti di Lamé non si discosta troppo dall'unità.

2. EQUAZIONE DI STATO. – Quando la temperatura ha il valore uniforme τ, e la sollecitazione esterna è nulla, il solido assume una configurazione di equilibrio spontaneo C_τ. Le ipotesi di isotropia ed omogeneità assicurano che C_τ, oltre ad essere totalmente esente da stress, è anche simile ad ogni altra configurazione di equilibrio spontaneo $C_{\tau'}$, relativa ad un diverso valore della temperatura [4]. Il rapporto di similitudine tra le due configurazioni coincide evidentemente con quello tra la lunghezza l_τ di un segmento in C_τ e la lunghezza $l_{\tau'}$ del segmento corrispondente in $C_{\tau'}$.

Per ricavare l'equazione di stato, conviene prendere come riferimento proprio il valore limite C_o cui tende C_τ al diminuire della temperatura [5]. Con $\overline{E}$ si indicherà il comune valore dei coefficienti principali della deformazione inversa [6] e con $\mathfrak{D}$ il determinante funzionale relativo alla configurazione finale del solido C ed a quella di riferimento C_o. Prendendo con il segno positivo le pressioni, secondo l'abitudine termodinamica, la P risulta allora espressa da [7]

$$(1) \qquad P = \left(\frac{3}{2}\lambda_T + \mu_T\right)\left(\frac{l_T}{l_o}\right)^{5+3\frac{\lambda}{\mu}} \cdot \mathfrak{D}^{\frac{2}{3}+\frac{\lambda}{\mu}} \left(\frac{l_T^2 - l_o^2}{l_T^2} + 2\overline{E}\right)[1 + \psi(y)],$$

dove l_T ed l_o rappresentano la lunghezza di segmenti corrispondenti in C_T e C_o; λ_T e μ_T sono i valori delle costanti di Lamé in C_T, il cui rapporto risulta indipendente dalla temperatura, e pertanto non è contrassegnato da alcun indice. Inoltre $\psi(y)$ è una funzione che si annulla con la variabile y, e quest'ultima è legata ad $\overline{E}$ ed a $\mathfrak{D}$ dalla relazione

$$(2) \qquad y = \frac{\mu_T^2}{\lambda_T \cdot k_o}\left(\frac{l_T}{l_o}\right)^3 \left\{1 - \left(\frac{l_T}{l_o}\right)^{2+\frac{3\lambda}{\mu}} \cdot \mathfrak{D}^{\frac{\lambda}{\mu}} \cdot \left[1 - \left(1 + \frac{3}{2}\frac{\lambda}{\mu}\right)\left(\frac{l_T^2 - l_o^2}{l_T^2}\right) - 3\frac{\lambda}{\mu}\overline{E}\right]\right\},$$

essendo k_o la densità in C_o.

(4) Cfr. loc. cit. nota (2) memoria I, cap. III, n. 16 e memoria II, cap. I, n. 4.

(5) Una simile scelta non dà luogo ad inconvenienti, in relazione alla irraggiungibilità dello zero assoluto, in quanto, per τ tendente a zero, la C_τ tende ad una configurazione limite ben definita. Considerazioni statistiche e dati sperimentali si accordano infatti nel mostrare che la differenza $(l_\tau - l_o)$ è infinitesima del 4° ordine rispetto alla temperatura.

(6) Per l'espressione di $\overline{E}$ in funzione delle componenti di spostamento cfr. ad esempio loc. cit. nota (2), n. 2. Per deformazioni infinitesime i coefficienti di deformazione si confondono con le ordinarie caratteristiche cambiate di segno.

(7) Cfr. loc. cit. nota (1), nn. 5, 8, 10. La P della formula (1) corrisponde al comune valore dei tre coefficienti dell'omografia di tensione β data dalla formula (39) del lavoro citato, nel caso di uno stress uniforme. Si è inoltre posto $\frac{d\varphi}{dy} = 1 + \psi(y)$. Per la successiva espressione (2) della variabile y si veda il n. 5 dello stesso lavoro.

Si considererà dapprima il caso in cui sia $\psi(y) \equiv 0$; successivamente si mostrerà come i risultati relativi a questo caso rimangano sostanzialmente validi anche quando $\psi(y)$ non sia identicamente nulla.

Per far comparire esplicitamente la temperatura nella (1) occorre esprimere l_T/l_0 in funzione di T; dalla definizione del coefficiente di dilatazione lineare $\alpha_l(T) = d \log l_T / dT$ si ha subito

$$\frac{l_T}{l_0} = e^{\int_0^T \alpha_l \, dT'} = 1 + A(T) = 1 + \int_0^T \alpha_l \, dT' + \cdots, \tag{3}$$

e l'*allungamento termico* A (T) così definito soddisfa, per la grandissima maggioranza dei solidi, alla limitazione [8] $0 < A \ll 1$.

Si può inoltre eliminare $\bar{E}$ valendosi della relazione [9]

$$\bar{\mathfrak{D}} = (1 + 2\bar{E})^{\frac{2}{3}} = \mathfrak{D}^{-1} \tag{4}$$

dove $\mathfrak{D}$ è il determinante funzionale relativo allo spostamento *diretto*.

Sostituendo le (3) e (4) nella (1) si ricava allora

$$P = \left(\frac{3}{2}\lambda_T + \mu_T\right)(1+A)^{3\frac{\lambda+\mu}{\mu}} \cdot \left[(1+A)^2 \mathfrak{D}^{-1-\frac{\lambda}{\mu}} - \mathfrak{D}^{-\frac{1}{3}-\frac{\lambda}{\mu}}\right]. \tag{5}$$

L'espressione lagrangiana della dilatazione cubica, quando la deformazione si riduce ad una similitudine,

$$\mathfrak{D} = 1 - \frac{V_0 - V}{V_0} \tag{6}$$

consente infine di far comparire nella (5) il volume al posto del determinante funzionale. Sostituendo la (6) nella (5) e sviluppando in serie conviene porre:

$$\left\{\begin{aligned} P_0 &= \left(\frac{3}{2}\lambda_T + \mu_T\right)(1+A)^{3\frac{\lambda+\mu}{\mu}} \cdot [2A + A^2] \\ P_1 &= \left(\frac{3}{2}\lambda_T + \mu_T\right)(1+A)^{3\frac{\lambda+\mu}{\mu}} \left[\frac{2}{3} + 2A\left(1 + \frac{\lambda}{\mu}\right) + A^2\left(1 + \frac{\lambda}{\mu}\right)\right] \\ P_2 &= \left(\frac{3}{2}\lambda_T + \mu_T\right)(1+A)^{3\frac{\lambda+\mu}{\mu}} \cdot \left[\frac{2\cdot\lambda}{3\cdot\mu} + \frac{7}{9} + 2A\left(\frac{\lambda^2}{2\mu^2} + \frac{3}{2}\frac{\lambda}{\mu} + 1\right) + \right. \\ &\quad \left. + A^2\left(\frac{\lambda^2}{2\mu^2} + \frac{3}{2}\frac{\lambda}{\mu} + 1\right)\right]. \end{aligned}\right. \tag{7}$$

(8) Ad esempio nei metalli α_l è dell'ordine di $2 \cdot 10^{-5}$, in modo che per temperature fino a 1.000 °K, risulta $A \leq 2 \cdot 10^{-2}$.

(9) Cfr. ad esempio loc. cit. nota (1), n. 7, in fine.

La (5) assume allora la forma

$$(8) \qquad P(V, T) = P_0(T) + P_1(T) \cdot \frac{V_0 - V}{V_0} + P_2(T) \cdot \left(\frac{V_0 - V}{V_0}\right)^2 + \cdots,$$

che costituisce l'equazione di stato cercata, relativa ai solidi cui sia applicabile la (1).

3. DILATAZIONI TERMICHE E COMPRESSIBILITÀ. – Quando la deformazione si riduce ad una dilatazione termica, che porti il solido dalla configurazione di riferimento C_0 ad un'altra configurazione di equilibrio spontaneo C_T, la pressione nello stato finale deve annullarsi. Per controllare che la (8) soddisfa a tale condizione, occorre innanzi tutto calcolare il rapporto V_T/V_0 dei volumi occupati dal solido rispettivamente in C_T ed in C_0; nel caso indicato tale rapporto si ottiene semplicemente elevando alla terza potenza ambo i membri della (3)

$$(9) \qquad \frac{V_T}{V_0} = \frac{l_T^3}{l_0^3} = (1 + A)^3.$$

Sostituendo questo valore nella (8), e tenendo conto delle (7), si verifica che i coefficienti della serie che figura a secondo membro risultano proprio identicamente nulli.

Mediante la (8) è anche possibile calcolare in maniera esatta il valore della compressibilità isoterma. A questo scopo occorre innanzi tutto osservare che lo sforzo specifico P è relativo all'unità di superficie *nella configurazione di riferimento* C_0. Se si vuole invece calcolare la compressibilità $\chi_T^{(\mathfrak{I})}$ [10] in una diversa configurazione di equilibrio C_T, occorre innanzi tutto moltiplicare ambo i membri della (8) per $(1 + 2\overline{E}) = D^{-2/3}$, in modo da riferire lo sforzo specifico all'unità di superficie in C_T. La relazione che definisce $\chi_T^{(\mathfrak{I})}$

$$(10) \qquad \frac{1}{\chi_T^{(\mathfrak{I})}} = -V_T \left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T^{(\mathfrak{I})}$$

e la (10) dànno allora

$$(11) \qquad \frac{1}{\chi_T^{(\mathfrak{I})}} = \frac{V_T}{V_0}\left[P_1(T) + 2P_2(T)\frac{V_T - V_0}{V_0} + \cdots\right].$$

Introducendo nella (11) la (10), e tenendo conto delle (7), si trova che tutti i coefficienti delle potenze di A che figurano in parentesi quadra si elidono a due a due, in modo che si ha *esattamente*

$$(12) \qquad \frac{1}{\chi_T^{(\mathfrak{I})}} = \frac{3\lambda_T + 2\mu_T}{3}$$

(10) La lettera T caratterizza la temperatura dello stato di equilibrio spontaneo nel quale si vuole calcolare la compressibilità; per indicare che si tratta proprio del valore isotermo di questa grandezza si è aggiunto l'indice ($\mathfrak{I}$).

in completo accordo con il valore fornito dalla teoria linearizzata dell'elasticità, in quanto λ_T e μ_T rappresentano proprio i valori delle costanti di Lamé in C_T.

4. Pressione termica: accordo con il valore fornito dalla meccanica statistica. – Per conservare costante il volume V_0, quando la temperatura varia, occorre esercitare sul solido una pressione eguale alla *pressione termica* $P(V_0, T)$, che, in base alla (8), non differisce da $P_0(T)$.

Quando si schematizza il solido in un insieme di oscillatori quantizzati, la meccanica statistica fornisce per la pressione termica il valore [11]

$$P(V_0, T) = \int_0^T \frac{\alpha(T')}{\chi_T^{(\mathfrak{I})}} dT' \tag{13}$$

dove α = coefficiente di dilatazione cubica.

Si può osservare che è con ottima approssimazione $\alpha = 3\alpha_l$, e si possono inoltre trascurare le piccole variazioni della compressibilità con la temperatura portando $\chi_T^{(\mathfrak{I})}$ fuori del segno di integrale [12]. Tenendo conto della (3) e della (12) la meccanica statistica fornisce per la pressione termica il valore

$$P(V_0, T) = (3\lambda_T + 2\mu_T)\cdot A + \cdots \tag{13'}$$

che eguaglia ciò che si ricava dalla teoria delle deformazioni finite trascurando nella prima delle (7) l'allungamento termico A di fronte all'unità.

5. Calcolo del coefficiente di Grüneisen e generalizzazione dei risultati. – Come misura della non-linearità delle forze di coesione dei solidi si prende di solito il rapporto tra le variazioni isoterme di una generica autofrequenza ν e le corrispondenti variazioni del volume V, introducendo a tale scopo il coefficiente di Grüneisen $\gamma_T = -\left(\frac{\partial \log \nu}{\partial \log V}\right)_T^{(\mathfrak{I})}$. Si comprende come γ_T sia necessariamente legato ai coefficienti P_1 e P_2 dell'equazione (8); tenendo conto dell'espressione (10) di $\chi_T^{(\mathfrak{I})}$ e della relazione fra ν e $\chi_T^{(\mathfrak{I})}$ fornita dalla teoria delle onde elastiche si trova [13].

$$\gamma_T = \frac{P_2}{P_1} - \frac{2}{3} \tag{14}$$

(11) Cfr. ad esempio J. C. Slater, *Introduction to Chemical Physics*. McGraw Hill Ed., New York (1939), p. 217. Per ricavare la (13) occorre tener conto della relazione che lega α al valore specifico a volume costante.

(12) Ciò è lecito in quanto al tendere di T a zero $\chi_T^{(\mathfrak{I})}$ tende ad un limite diverso da zero, a differenza di quanto si verifica per α.

(13) Cfr. loc. cit. nota (11), p. 239. Con ottima approssimazione di può confondere il valore isotermo della compressibilità con quello adiabatico.

La seconda e la terza delle (7), quando si trascuri A di fronte all'unità, forniscono per γ_T la notevole espressione:

$$\gamma_T = \frac{\lambda}{\mu} + \frac{1}{2}. \tag{15}$$

Nel confrontare i valori di γ_T calcolati mediante la (15) con quelli forniti dall'esperienza, occorre tener presente che questi ultimi sono sempre ottenuti in maniera indiretta, ad esempio mediante misure di dilatazione termica [14], oppure mediante misure di frequenza in funzione della temperatura, come è stato indicato in un precedente lavoro [15]. Sarebbe inoltre opportuno che i valori λ/μ fossero misurati direttamente sullo stesso solido per il quale si è determinato il valore di γ_T. È infatti noto che il processo di preparazione ed i trattamenti subìti dal solido influiscono, e talvolta in misura assai sensibile, sul suo comportamento elastico. Anche in mancanza di questi dati può tuttavia essere interessante confrontare i valori di γ_T calcolati mediante la (15), e mediante i valori di λ/μ desunti dalla letteratura [16], con quelli ottenuti sperimentalmente, come è fatto nella Tabella I.

Il confronto si rivela abbastanza soddisfacente, specialmente per quei solidi in cui λ/μ si discosti poco dall'unità. Si osserva inoltre che quando $\lambda/\mu < 1$, la (15) fornisce dei valori di γ_T alquanto minori di quelli sperimetali, mentre l'opposto si verifica per $\lambda/\mu \gg 1$.

I precedenti risultati, riassunti nelle (12), (13') e (15), sono stati ricavati nel caso particolare in cui sia $\psi(y) = 0$; si vede tuttavia che essi rimangono sostanzialmente validi anche nel caso generale in cui la $\psi(y)$ non sia identicamente nulla. Ricordando infatti che quest'ultima funzione si annulla con y, conviene svilupparla in serie nell'intorno di $y = 0$, facendo comparire esplicitamente T e V in quest'ultima variabile, come si è fatto per P. Introducendo nella (2) le (3), (4) e (6), si ha

$$y = A \cdot \frac{\mu_T}{k_\tau}\left(2 + 3\frac{\lambda}{\mu}\right)\frac{V_0 - V}{V_0} + \cdots \tag{16}$$

Quando si moltiplica la (8) per $[1 + \psi(y)]$ si vede quindi che alle espressioni (7) di P_1, P_2 vengono aggiunti termini di ordine non inferiore ad A. Trascurando le dilatazioni termiche rispetto all'unità, le espressioni trovate per la compressibilità, per la pressione termica e per il coefficiente di Grüneisen risultano pertanto valide anche quando $\psi(y) \neq 0$.

(14) Cfr. loc. cit. nota [11], p. 451.

(15) P. G. BORDONI, *Dipendenza delle autofrequenze di un solido dalla temperatura e dal volume, secondo la meccanica statistica*. «Nuovo Cimento», 10, p. 280 (1953).

(16) J. C. LANDOLT, R. BÖRNSTEIN, *Physikalisch-Chemische Tabellen*. J. Springer. Ed., Berlin, Eg. I, p. 14 (1936).

TABELLA I.

Confronto tra i valori sperimentali medi di γ_T *e quelli forniti dalla* (15).

Metallo	$\frac{\lambda}{\mu} + \frac{1}{2}$	Valori sperimentali medi γ_T
W	1,04	1,91
Mg	1,50	1,74
Th	1,58	1,31
Fe	1,80	2,10
Cd	2,01	2,95
Ni	2,17	2,09
Rh	2,28	2,20
Zn	2,43	2,68
Al	2,43	2,12
Cu	2,73	1,96
Ag	3,65	2,42
Pt	3,85	2,84
Pd	4,05	2,41

6. CONCLUSIONI. – La sostituzione delle caratteristiche di deformazione dell'elasticità linearizzata con i coefficienti relativi allo spostamento inverso, e l'introduzione di un comune fattore costituito da una opportuna funzione dei loro invarianti, consente di ricavare una forma dell'equazione di stato dei solidi omogenei ed isotropi che si accorda bene con quella fornita dalla meccanica statistica e con i risultati dell'esperienza.

Resta così confermata, anche fuori del campo delle trasformazioni isoterme, la possibilità di applicare a qualche categoria di solidi le relazioni generali tra lo stress e le deformazioni finite che si ottengono mediante la sostituzione indicata.

Dal confronto tra i valori del coefficiente di Grüneisen calcolati mediante l'equazione di stato e quelli ottenuti sperimentalmente sembra inoltre che tale applicazione possa riuscire particolarmente efficace per quei solidi in cui il rapporto delle costanti di Lamé non si discosta troppo dall'unità.

Fisica matematica (Elettrotecnica). — *Sul periodo transiente dello «skin effect»* (*). Nota di DINO ZANOBETTI, presentata (**) dal Socio Q. MAJORANA.

1. La distribuzione di una corrente in un conduttore è problema ben noto seppure la vastissima bibliografia sia quasi esclusivamente dedicata alla considerazione di correnti sinusoidali in regime permanente.

Alcune questioni della tecnica attuale – tra le quali mi limito a citare la misura delle correnti ad impulso e il progetto dei trasformatori ad impulso (1) – rendono peraltro desiderabile la conoscenza della distribuzione della corrente in un conduttore cilindrico sia pieno sia cavo, anche nel periodo transitorio intercorrente tra l'istante di applicazione brusca di una d.d.p. e il raggiungimento delle condizioni di regime.

L'argomento fu considerato già vari anni fa da Cocci e Sartori (2) i quali si limitarono però all'espressione della ammettenza di un conduttore cilindrico pieno nella forma operazionale di Heaviside e Giorgi.

In questa Nota, in vista delle applicazioni tecniche, ho ripreso tutto il problema col metodo della trasformazione di Laplace ed ho trattato sia il cilindro pieno sia quello cavo pervenendo a formole, forse nuove, che si possono adattare al calcolo numerico.

Ho limitato la trattazione alla considerazione di c. e. sinusoidali bruscamente applicati (3) ma risulterà evidente come essa si presti ad estensioni ai casi di c. e. impressi variabili con legge qualsiasi. Il caso di c. e. impresso di tipo esponenziale è particolarmente importante e mi riservo di considerarlo in una Nota ulteriore.

2. Si fanno qui le stesse ipotesi che sono alla base del lavoro di Cocci e Sartori (4). In sostanza si considera in questa prima parte della Nota (§§ 2 e 3) un conduttore cilindrico di sezione circolare piena di raggio a e di lunghezza talmente grande da poter prescindere dagli effetti di estremità.

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Elettrotecnica e delle Comunicazioni Elettriche dell'Università di Bologna.

(**) Nella seduta del 13 giugno 1953.

1) Sulla prima questione ved. PARK, *Shunts and Inductors for Surge Current Measurements*. « J. Res. Nat. Bur. Stand, Wash. », *39*, 191 (1947); sulla seconda ved. REDFEARN, *Skin Effects in Conductors with Single Rectangular Pulses of Current*. Metro-Vick Elect. Co., Rep. C. 530, 1945; anche il vol. 5 della «M. I. T. Rad. Lab. Series», *Pulse Generators*, McGraw-Hill, 1948, P. III (BOSTICK, *Pulse Transformers*), § 15.7.

2) *Espressione operazionale dell'effetto pelle in un conduttore cilindrico*. « Rend. Ist. Lomb. » (II), LXVII, 879 (1934).

3) Più correttamente di c. e. di valore nullo per ogni $t \leq 0$ e di valore

$$e = E \sin(\omega t + \varphi) \text{ per } t > 0.$$

4) Loc. cit., p. 889.

Si immagina inoltre l'esistenza di un conduttore di ritorno costituito da un cilindro di sezione anulare di raggio interno a' coassiale e circondante il precedente.

Chiamiamo γ e μ rispettivamente la conducibilità elettrica e la permeabilità magnetica (che supporremo costante) del conduttore interno, μ' la permeabilità magnetica del dielettrico tra i due conduttori, supponiamo infinita la conducibilità elettrica del conduttore esterno.

Le equazioni di Maxwell, applicate al conduttore interno, forniscono per la densità di corrente in esso nei punti distanti r dall'asse e nell'istante t successivo alla applicazione di un c. e.:

$$\frac{\partial^2 G(r,t)}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial G(r,t)}{\partial r} - \mu\gamma\frac{\partial G(r,t)}{\partial t} = 0, \qquad 0 \leq r < a\ ,\ t > 0\ ; \tag{1}$$

cui si aggiungono le condizioni limiti risultanti dalle considerazioni seguenti.

a) È ovviamente per definizione

$$G(r,t) = 0\ ,\quad 0 \leq r \leq a\ ,\quad t = 0\ ; \tag{2}$$

b) sull'asse del conduttore la densità di corrente rimane di valore finito

$$G(r,t) \neq \infty\ ,\quad r = 0\ ,\quad t = 0\ ; \tag{3}$$

c) le sezioni rette del conduttore, per quanto si è supposto circa la simmetria del sistema e l'esclusione degli effetti di estremità, sono equipotenziali: detti cioè $H(r,t)$ e $H'(r',t)$ il c. m. rispett. nel conduttore e nel dielettrico

$$e(t) = \frac{1}{\gamma}G(r,t) + \frac{\partial}{\partial t}\left[\mu\int_r^a H(r,t)\,dr + \mu'\int_a^{a'} H'(r',t)\,dr'\right], \tag{4}$$

$$0 \leq r \leq a\ ,\quad t > 0.$$

Scrivendo tale relazione per la superficie esterna del conduttore interno e facendo uso della relazione di Biot e Savart tra c. m. e corrente:

$$e(t) = \frac{1}{\gamma}G(a,t) + \frac{\mu'}{2\pi}\ln\frac{a'}{a}\frac{di(t)}{dt}, \qquad t > 0 \tag{5}$$

dove

$$i(t) = 2\pi\int_0^a G(r,t)\,r\,dr\,. \tag{6}$$

3. Il sistema costituito dalle (1), (2), (3) e (5) è di risoluzione immediata facendo uso della trasformazione di Laplace. Esso diviene infatti [5]

$$\frac{dG^*{}^2(r,s)}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dG^*(r,s)}{dr} - \alpha^2 G^*(r,s) = 0, \qquad \alpha^2 = \mu\gamma s, \tag{7}$$

$$0 \leq r < a\ ,\ s > 0\ ;$$

(5) Qui e nel seguito l'aggiunta di un asterisco * indica la trasformata della funzione.

$$G^*(r, s) = \infty, \qquad r = 0, \ s = 0; \tag{8}$$

$$e^*(s) = \frac{1}{\gamma} G^*(r, s) + \frac{\mu' s}{2\pi} \ln \frac{a'}{a} i^*(s), \qquad r = a, \ s > 0; \tag{9}$$

$$i^*(s) = 2\pi \int_0^a G^*(r, s) r \, dr, \qquad s > 0; \tag{10}$$

il cui integrale è

$$G^*(r, s) = \gamma e^*(s) \frac{I_0(\alpha r)}{I_0(\alpha a) + h \alpha a I_1(\alpha a)}, \tag{11}$$

$$h = \frac{\mu'}{\mu} \ln \frac{a'}{a}, \quad 0 \leq r \leq a, \ s > 0.$$

Il caso che qui ci limitiamo a considerare è quello di un c. e. alternativo sinusoidale $e = E \sin(\omega t + \varphi)$ ossia $e^* = (\omega \cos \varphi + s \sin \varphi)/(\omega^2 + s^2)$.

Il teorema d'inversione fornisce

$$G(r, t) = \frac{\gamma E}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} \exp zt \, \frac{\omega \cos \varphi + z \sin \varphi}{\omega^2 + z^2} \, \frac{I_0(\beta a)}{I_0(\beta a) + h \beta a I_1(\beta a)} dz, \tag{12}$$

$$\beta^2 = \mu \gamma z;$$

dove c è un reale così grande che tutte le singolarità dell'integrando vengano a trovarsi alla sinistra della retta $(c - j\infty, c + j\infty)$.

Si verifica abbastanza facilmente che sono realizzate le condizioni per le quali l'integrale nella (12) vale $2\pi j$ volte la somma dei residui dell'integrando ai poli [6].

Ora l'integrando ha poli semplici per

a) $z = \pm j\omega$ ossia $\beta = (\pm j)^{1/2} k$ con $k^2 = \mu\gamma\omega$;

b) $\beta = j\delta_n$ ossia $z = -\frac{\delta_n^2}{k^2} \omega$ dove con δ_n si indicano le radici (reali e distinte) [7], dell'equazione

$$J_0(\delta a) = h \delta a J_1(\delta a). \tag{13}$$

Il residuo al polo $z = j\omega$ vale

$$\frac{1}{2j} \exp j(\omega t + \varphi) \frac{I_0(j^{1/2} kr)}{I_0(j^{1/2} ka) + j^{1/2} hka I_1(j^{1/2} ka)}.$$

6) Cfr. CARSLAW e JAEGER, *Some two dimensional Problems in Conduction of Heat with circular Simmetry*. « Proc. London Math. Soc. » (2), *46* 361, § 5 (1940).

(7) WATSON, *Bessel Functions*, Cambridge, 1922, § 15.23.

Il residuo al polo $z = -j\omega$ è il coniugato del precedente. Per i residui ai poli $z = -\delta_n^2 \omega / k^2$, nel derivare il denominatore dell'integrando si tiene presente la (13) e si fa uso della nota formula di ricorrenza delle funzioni cilindriche

$$z\,C_n'(z) = -nC_n(z) + zC_{n-1}(z). \tag{14}$$

Risulta in definitiva

$$G(r,t) = \gamma E \left\{ \mathrm{Re}\left[\frac{I_0(j^{1/2} kr)}{jI_0(j^{1/2} ka) + j^{3/2} hk\, a I_1(j^{1/2} ka)} \exp j(\omega t + \varphi) \right] + \right.$$

$$\left. + 2h \sum_1^\infty{}_n \frac{\delta_n^2 (k^2 \cos\varphi - \delta_n^2 \sin\varphi)\, J_0(\delta_n r)}{(\delta_n^4 + k^4)(1 + h^2 \delta_n^2 a^2)\, J_0(\delta_n a)} \exp n \frac{\delta_n^2}{k^2} \omega t \right\}. \tag{15}$$

Da questa è facile passare al valore dell'intensità totale di corrente nel conduttore. Per la (6) infatti:

$$i(t) = 2\pi\gamma a^2 E \left\{ \mathrm{Re}\left[\frac{I_1(j^{1/2} ka)}{j^{3/2} ka I_0(j^{1/2} ka) - hk^2 a^2 I_1(j^{1/2} ka)} \exp j(\omega t + \varphi) \right] + \right.$$

$$\left. + \frac{2}{a^2} \sum_1^\infty{}_n \frac{(k_n^2 \cos\varphi - \delta_n^2 \sin\varphi)}{(\delta_n^4 + k^4)(1 + h^2 \delta_n^2 a^2)} \exp n \frac{\delta_n^2}{k^2} \omega t \right\}. \tag{16}$$

4. Un procedimento analogo si può applicare nel caso che il conduttore cilindrico interno sia cavo. Diciamo b il suo raggio interno.

La (1) vale ancora per $b < r < a$, mentre le condizioni limiti si modificano come segue:

a) Alla superficie interna del conduttore interno il c. m. è nullo onde in luogo della (3) si ha

$$\frac{\partial G(r,t)}{\partial r} = 0, \qquad r = b\ ,\ t > 0; \tag{17}$$

b) la (6) vale ancora ma i limiti d'integrazione che erano 0–a, divengono invece b–a.

L'integrale del sistema trasformato, tenuto conto di queste modifiche, diviene

$$G^*(r,s) = \gamma e^*(s) \frac{I_0(\alpha r) + \Phi_1(\alpha b) K_0(\alpha r)}{I_0(\alpha a) + \Phi_1(\alpha b) K_0(\alpha a) - h\alpha a [I_1(\alpha a) - \Phi_1(\alpha b) K_1(\alpha a)]} \tag{18}$$

dove si è posto per economia di scrittura

$$\frac{I_n(x)}{K_n(x)} = \Phi_n(x)$$

e dove $e^*(s)$ ha l'espressione già indicata a p. 793.

L'antitrasformazione della (18) non presenta difficoltà se non formali. Si può ancora usare il teorema d'inversione già usato e sono ancora realizzate le condizioni per cui all'integrale che compare nella antitrasformata è possibile applicare il teorema dei residui [8].

Viene

$$(19)\qquad G(r,t) = \gamma E \Big\{ \mathrm{Re}\left[\frac{I_0(j^{1/2}kr) + \Phi_1(j^{1/2}kb)\,K_0(j^{1/2}kr)}{j[I_0(j^{1/2}ka) + \Phi_1(j^{1/2}kb)\,K_0(j^{1/2}ka)] + j^{3/2}hka[I_1(j^{1/2}ka) - \Phi_1(j^{1/2}kb)\,K_1(j^{1/2}ka)]} \cdot \right.$$

$$\left. \cdot \exp j(\omega t + \varphi) \right] - \pi \sum_1^\infty{}_n \frac{J_1^2(\lambda_n b)}{[J_0(\lambda_n a) - h\lambda_n a J_1(\lambda_n a)]^2 - (1 + h^2\lambda_n^2 a^2)\,J_1^2(\lambda_n b)} \cdot$$

$$\cdot \{[Y_0(\lambda_n a) - h\lambda_n a Y_1(\lambda_n a)]\,J_0(\lambda_n r) - [J_0(\lambda_n a) - h\lambda_n a J_1(\lambda_n a)]\,Y_0(\lambda_n r)\} \cdot$$

$$\cdot \frac{\lambda_n^2(k^2\cos\varphi - \lambda_n^2\sin\varphi)}{k^4 + \lambda_n^4} \cdot \exp n\,\frac{\lambda_n^2}{k^2}\omega t \Big\}$$

dove i λ_n sono le radici (reali e semplici) [9] dell'equazione

$$(20)\qquad [Y_0(\lambda a) - h\lambda a Y_1(\lambda a)]\,J_1(\lambda b) = [J_0(\lambda a) - h\lambda a J_1(\lambda a)]\,Y_1(\lambda b).$$

Infine

$$(21)\quad i(t) = 2\pi\gamma a^2 E \Big\{ \mathrm{Re}\left[\frac{I_1(j^{1/2}ka) + \Phi_1(j^{1/2}kb)\,K_1(j^{1/2}ka)}{j^{3/2}ka[I_0(j^{1/2}ka) + \Phi_1(j^{1/2}kb)\,K_0(j^{1/2}ka)] - hk^2a^2[I_1(j^{1/2}ka) - \Phi_1(j^{1/2}kb)\,K_1(j^{1/2}ka)]} \cdot \right.$$

$$\left. \cdot \exp j(\omega t + \varphi) \right] - \frac{2}{a^2} \sum_1^\infty{}_n \frac{J_1^2(\lambda_n b)}{[J_0(\lambda_n a) - h\lambda_n a J_1(\lambda_n a)]^2 - (1 + h^2\lambda_n^2 a^2)\,J_1^2(\lambda_n b)} \cdot$$

$$\cdot \frac{k^2\cos\varphi - \lambda_n^2\sin\varphi}{k^4 + \lambda_n^4} \cdot \exp n\,\frac{\lambda_n^2}{k^2}\omega t \Big\}.$$

Ringrazio vivamente il prof. D. Graffi per i preziosi consigli e le indicazioni bibliografiche.

(8) CARSLAW e JAEGER, op. cit., §§. 7, 8.

(9) GRAY e MATHEWS, *Bessel Functions*, Londra, 1922, p. 82 e CARSLAW e JAEGER, op. cit., § 16.

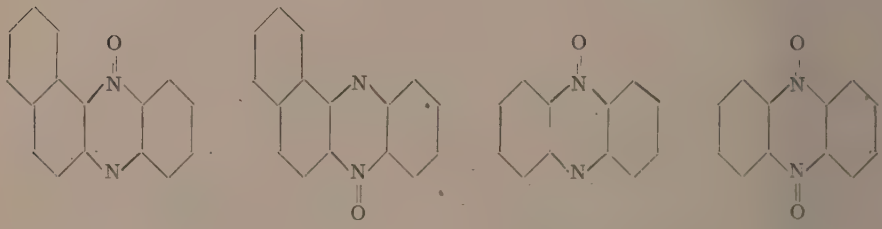
Chimica fisica. — *Studio polarografico di alcuni* N*–ossidi* (*). Nota di Renato Curti e Stelio Locchi, presentata (**) dal Corrisp. G. Semerano.

Il comportamento ossido–riduttivo degli N–ossidi si presenta attualmente di particolare interesse per la frequenza con la quale si incontrano queste sostanze in processi biologici ed enzimatici: specialmente le sostanze riferibili al nucleo della fenazina.

I dati riferiti sulla riduzione di N–ossidi si limitano ad uno studio polarografico di Ochiai (1) che ha esaminato un certo numero di derivati della piridina e della chinolina, confrontandone il potenziale di riduzione dell'ossigeno con quello dei corrispondenti nitroderivati a pH 3,0–3,5.

Come parte di uno studio più ampio su derivati riferibili al nucleo fenazinico, diamo qui i risultati dell'esame polarografico e potenziometrico di alcuni N–ossidi che mostrano un singolare comportamento che ci pare degno di attenzione.

Il gruppo di N–ossidi costituito da



I. 12–N–monossibenzofenazina.

II. 7–N–monossibenzofenazina.

III. N–monossifenazina.

IV. N–diossifenazina.

si presenta molto omogeneo come proprietà chimiche, solubilità, stabilità, e questo permette di eliminare l'introduzione di fattori che possono influire in modo discordante sui risultati ottenuti; abbiamo particolarmente curato l'identità delle condizioni sperimentali nello studio di questi composti, specialmente dei primi tre, in modo da poter confrontare agevolmente i risultati; le sostanze scelte dànno onde di riduzione regolari su tutto il campo di pH e non presentano fenomeni di adsorbimento in misura rilevante.

Per la preparazione di queste sostanze abbiamo potuto avvalerci della lunga serie di intermedi che S. Maffei e collaboratori hanno gentilmente

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica Generale dell'Università di Pavia.
(**) Nella seduta del 9 maggio 1953.
(1) « J. Pharm. Soc. Japan. », *69*, 1 (1949); « C.A. », *44*, 1400 f (1950).

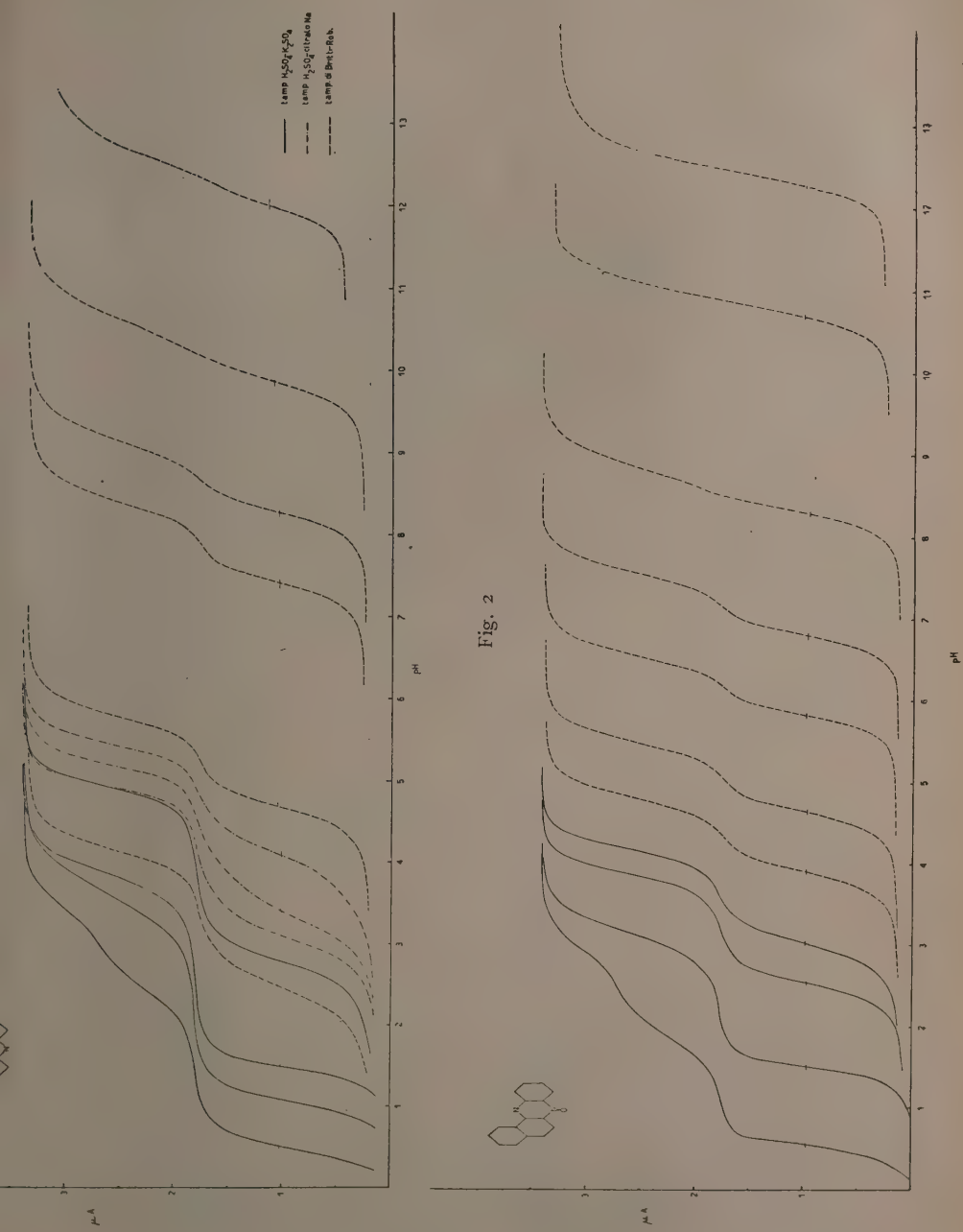


Fig. 2

messo a nostra disposizione in quantità notevole. La preparazione di questi quattro composti è stata condotta sugli schemi abituali e non necessita di dettagli.

Parte sperimentale. – I prodotti già puri in partenza, vennero portati al più alto grado di purezza per ripetute cristallizzazioni dallo stesso solvente idroacetonico impiegato per le misure polarografiche. Partendo da 5 gr. di ogni termine, si ottenne circa 0,5 gr. di prodotto estremamente puro [2]. Vennero usati sia un polarografo Sargent XXI, sia un Heyrovsky Leybold a registrazione fotografica. La cella era di tipo Lingane Laitinen termostatata a 25°, con elettrodo ad Hg_2SO_4 saturo immerso. Non si resero mai necessari soppressori di massimo. Il capillare impiegato aveva un tempo di caduta di 4,5 sec.; velocità di efflusso del mercurio m = 0,875 mg/sec. in KCl 0,1/N. I dati polarografici furono riscontrati con misure potenziometriche di ossido-riduzione eseguite con un millivoltmetro elettronico Metrohm ed apparecchiatura in vetro speciale della stessa Casa, titolando con benzochinone la sostanza organica ridotta con idrogeno e palladio secondo la tecnica abituale. Le intensità vennero controllate, quando necessario, con un microamperometro Weston tarato su ponte e galvanometro, tanto per la riduzione polarografica, quanto per l'ossidazione potenziometrica.

La soluzione per le misure polarografiche era costituita dalla sostanza organica sciolta in acqua–acetone 30 %; acqua–alcool etilico 30 %.

Concentrazioni esaminate: M/2000 ; M/3000 ; M/5000 ; M/6000 ; M/9000 per le sostanze I, II, III. La concentrazione M/3000 è la massima compatibile con una curva regolare. Per la sostanza IV, meno solubile delle precedenti, sono state esaminate le concentrazioni M/3000 e M/6000. Questa ultima è la preferibile.

Le stesse sostanze sono state polarografate in soluzione acquosa col 30 % di alcool etilico alle stesse concentrazioni delle soluzioni idroacetoniche; le curve sono strettamente confrontabili, ma si rende necessaria un'aggiunta di tilosio e la corrente di diffusione è poco uniforme.

I tamponi impiegati sono stati i seguenti:

1° pH	0 — 4	$H_2SO_4 + K_2SO_4$
2° pH	2 — 6	H_2SO_4 + citrato trisodico
3° pH	3 — 13	Britton–Robinson.

Sono state rilevate le curve capillari del mercurio nel campo di potenziale impiegato, a temperature diverse: le sostanze I, II e III non dànno variazioni apprezzabili rispetto alla curva della soluzione acqua–acetone al 30 %; la sostanza IV dà una curva più appiattita rispetto alla soluzione acqua–acetone, ma con lo stesso andamento.

Oscillograficamente la formazione della goccia è stata seguìta adottando uno spezzone di capillare di 2 cm. e una prevalenza di mercurio di circa 1 m.: in queste condizioni il tempo di goccia è di circa 1/15 di sec.,

(2) p.f. (I) 182,5° ; (II) 182° ; (III) 226,5° ; (IV) 204° decomp.

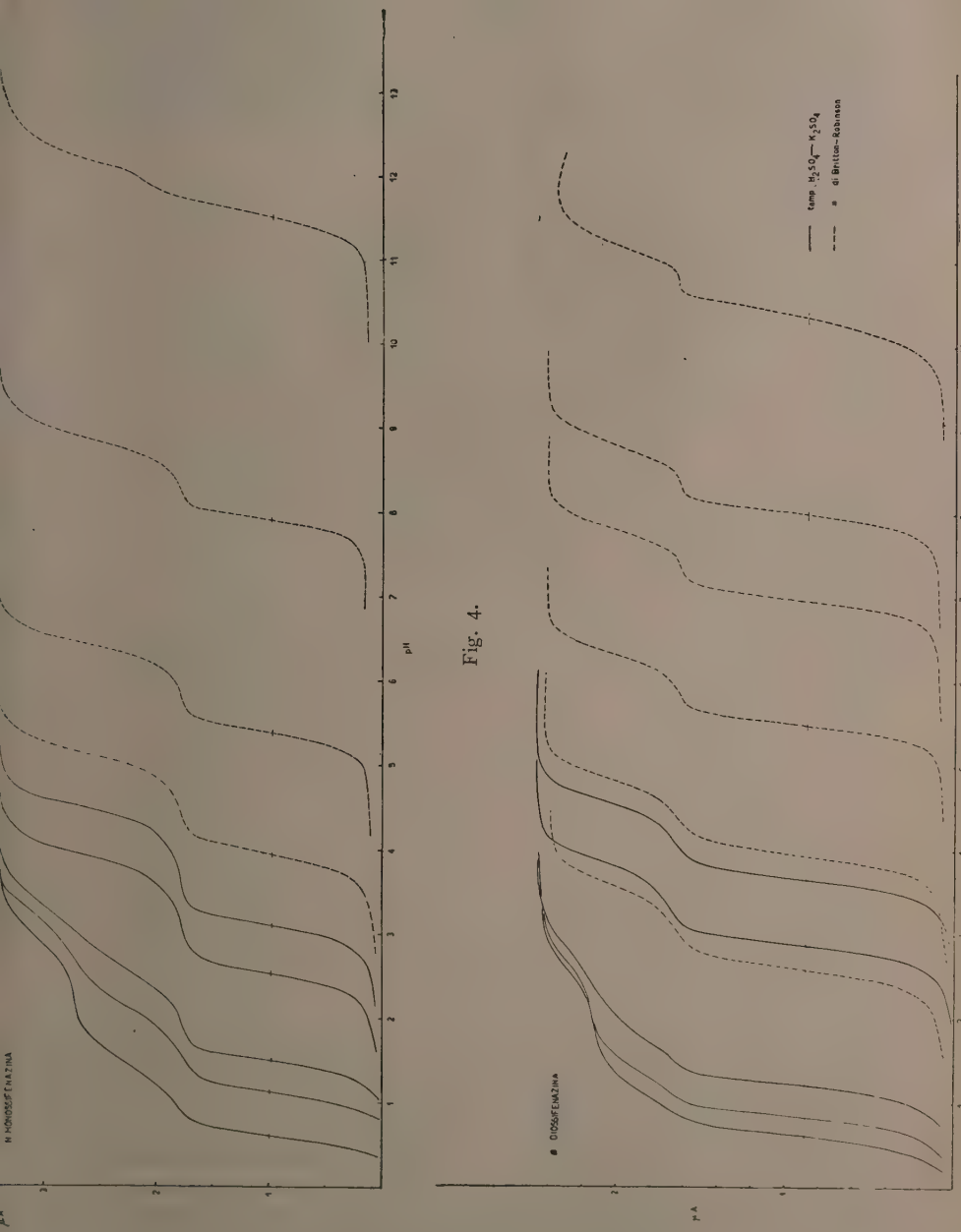

N MONOSFENAZINA
pH
μA
DIOSFENAZINA
tampone H_3PO_4—K_2SO_4
di Britton-Robinson

Fig. 4.

sufficiente per la persistenza dell'immagine sul tubo catodico; l'esame è stato condotto qualitativamente, inviando sull'elettrodo a goccia un segnale a dente di sega prelevato dall'oscilloscopio stesso (un Ribet e Desjardins 267 A, a fluorescenza verde) con 1 MΩ in serie e 10 KΩ in parallelo alla cella. Per quanto si possa ritenere che la risposta non sia l'*optimum*, data la frequenza molto bassa, si è considerata poco adsorbibile la sostanza che

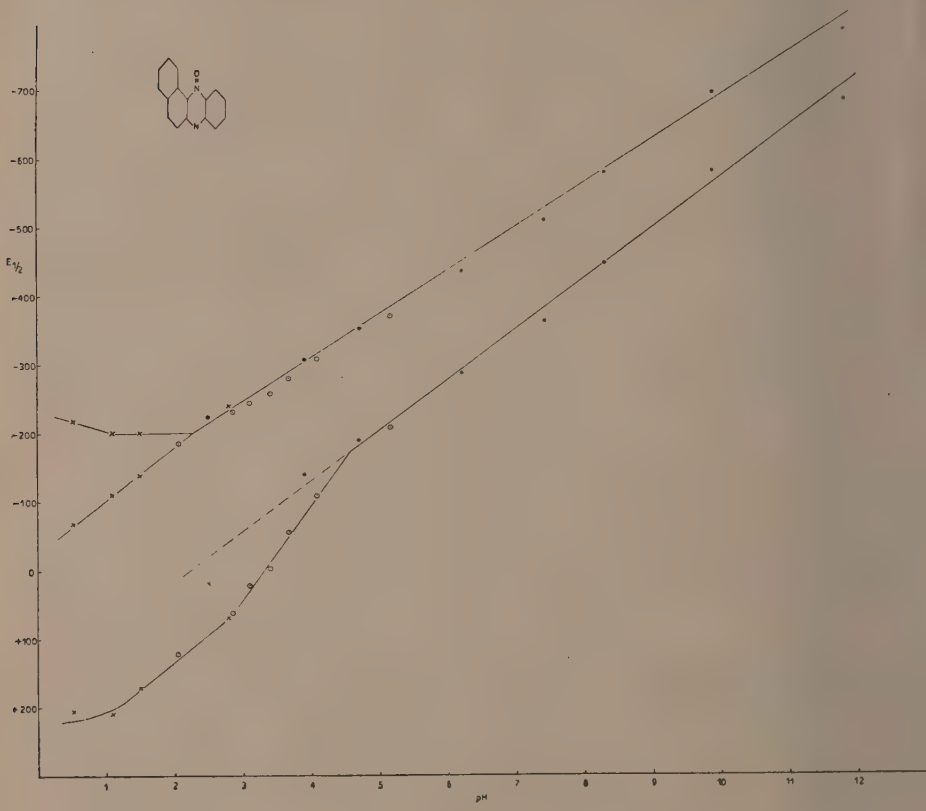


Fig. 5

meno alterava il segnale originario. Una resistenza da 10 a 100 KΩ forniva la ripartizione delle tensioni. L'esame è stato condotto ad un potenziale applicato costante, 500 mV sugli elettrodi.

Tra le molte sostanze dello stesso gruppo da noi esaminate, la (I), (II), (III), sono quelle che mostrano l'adsorbimento più ridotto, come del resto lascia supporre la regolarità delle curve polarografiche ottenute. Non è estranea a questo comportamento la forte aggiunta di alcool o acetone; meno soddisfacente, riguardo all'adsorbimento, si è rivelato il comportamento della sostanza (IV).

Nei grafici, con la riproduzione delle curve, è posto in ascissa il pH della soluzione anziché la tensione applicata, come nell'uso più comune, e la posizione sul grafico è determinata da $E_{1/2}$ per la riduzione all'ossigeno: questa disposizione permette di seguire meglio la discussione successiva.

Le tensioni corrispondenti sono facilmente reperibili sul diagramma pH/$E_{1/2}$.

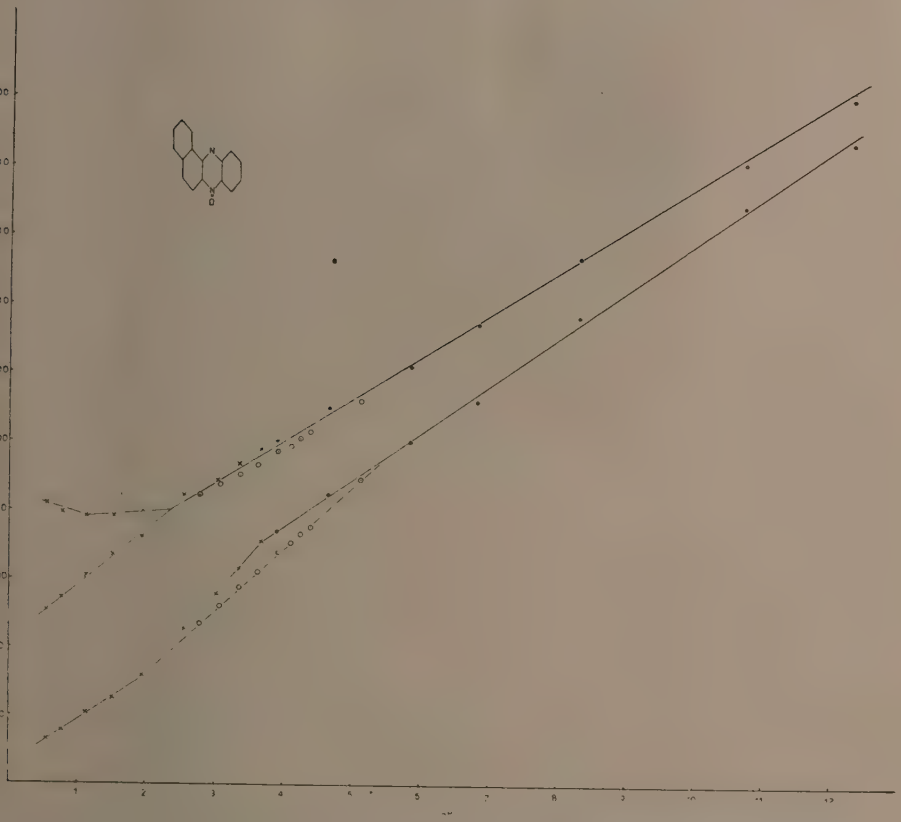


Fig. 6.

Esame delle curve. – L'intensità della corrente di diffusione calcolata per gli stadi di riduzione ad 1, 2, 4 elettroni si accorda con quella osservata, in campo fortemente acido e in presenza di acido solforico, entro il ± 4,5%, assumendo $D = 0{,}8 \times 10^{-5}$. L'intensità osservata diminuisce del 4 % circa con tamponi citrico e Britton-Robinson, ma si verifica sempre la proporzionalità fra intensità di corrente e concentrazione, almeno tra 1/2000 M — 1/6000 M e nel campo di pH 0,5 — 9, in cui l'intervallo di potenziale fra la riduzione all'ossigeno e all'azoto della sostanza studiata è più forte.

Dall'andamento delle curve polarografiche, sono evidenti gli stadi attraverso i quali passa la riduzione all'elettrodo a goccia di mercurio. L'onda di riduzione inferiore corrisponde alla riduzione all'ossigeno; la superiore alla riduzione del gruppo fenazinico. Nelle soluzioni più acide, la riduzione all'ossigeno è bielettronica nei monossidi, tetraelettronica nei diossidi, mentre la riduzione all'azoto presenta due stadi caratteristici

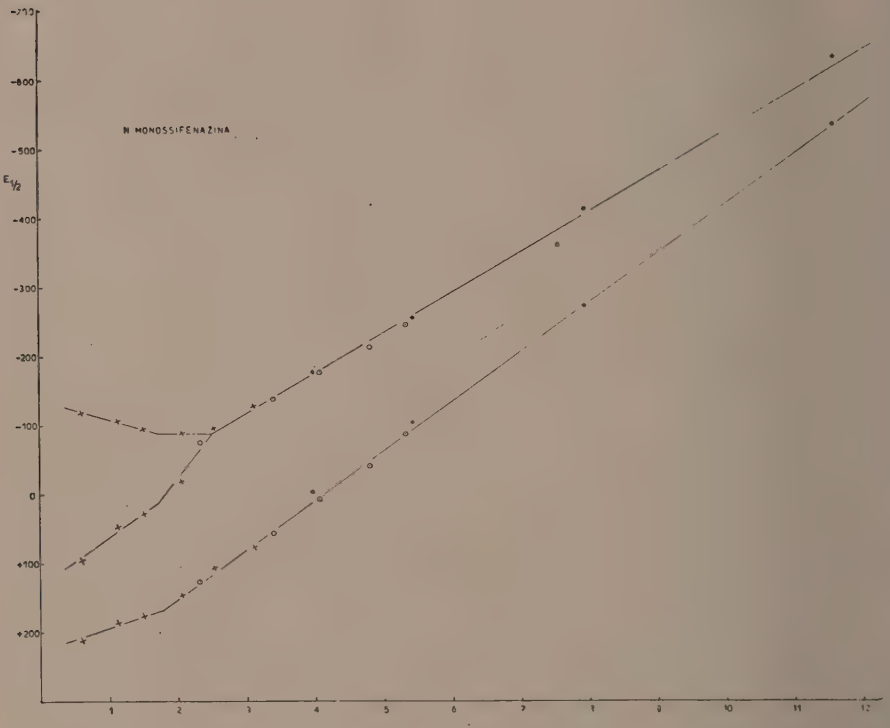


Fig. 7.

di una forte aliquota di semichinone. A pH più elevati, con il ravvicinarsi dei potenziali di riduzione, la curva polarografica tende ad assumere l'aspetto di riduzione a 4 elettroni per la I, II, III; per la IV la riduzione all'ossigeno rimane sempre ben distinguibile da quella del nucleo fenazinico.

Rimane da mettere in rilievo il diverso comportamento della (I) rispetto alla (II). In soluzione fortemente acida, le due sostanze sono pressoché totalmente salificate e la riduzione non provoca sensibile formazione di radicali liberi ossidrilici [3]. Col progredire dell'idrolisi del sale, cioè nel-

(3) Verranno resi noti in seguito i risultati delle titolazioni con $HClO_4$ di queste basi e della idrolisi dei perclorati insolubili.

l'intervallo di pH compreso fra 2 e 5, i due isomeri mostrano un comportamento ben differente: l'ossigeno in (12) aumenta la stabilità del radicale libero ossidrilico.

Questo comportamento è caratteristico della 12–N–monossibenzofenazina e si differenzia notevolmente da quello degli altri composti studiati. Le ipotesi che permetterebbero di dare una spiegazione plausibile sono attualmente allo studio sperimentale mediante l'analisi polarografica di clorosostituiti in 1 e 4, e dell'idroderivato in 8–9–10–11.

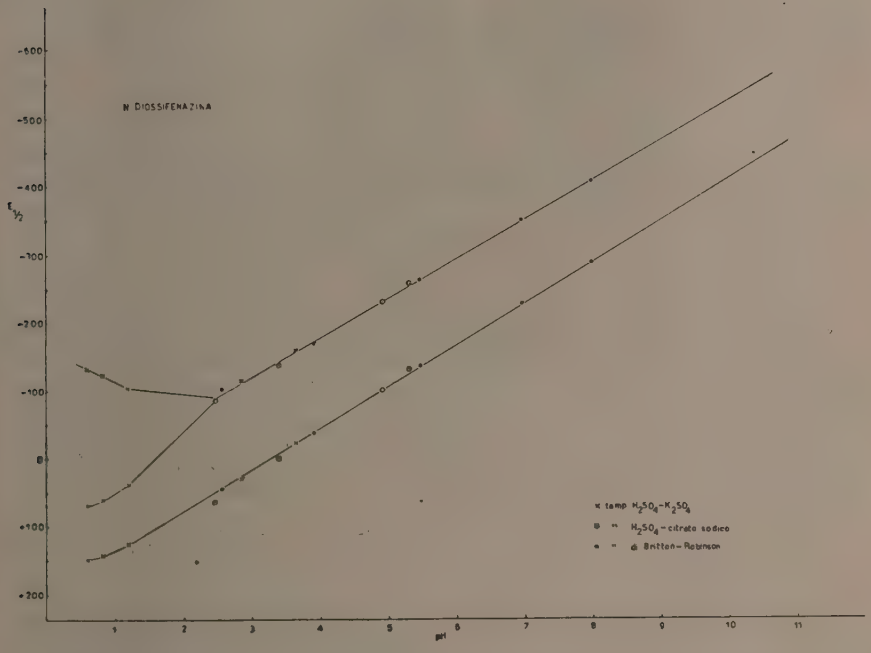


Fig. 8.

Una misura quantitativa è data dalle costanti di formazione delle forme semichinoniche, che sono state calcolate per i quattro composti dai dati sperimentali ottenuti.

Lo sviluppo logaritmico delle curve riportate nelle figg. 1–4 o è rettilineo e simmetrico attorno a $E_{1/2}$ dove non compaia semichinone, oppure è spezzato in due segmenti che si incontrano ad un potenziale più negativo di 20 mV circa rispetto ad $E_{1/2}$ allorché la costante K_1, di formazione di semichinone, è superiore ad 1.

Riteniamo di poter escludere una dimerizzazione sensibile anche dal confronto con (III) e (IV) in cui è presumibile una possibilità per lo meno pari di dimerizzazione. Nei grafici da 5 a 8 è indicato come varia $E_{1/2}$ col pH della soluzione.

La titolazione potenziometrica di ossido–riduzione ci è stata utilissima per il controllo dei potenziali di semigradino; i valori ottenuti con questo metodo concordano, entro i limiti di errore sperimentale, con quelli ottenuti polarograficamente.

Per le maggiori difficoltà tecniche incontrate, con questo metodo si confermano solo qualitativamente i risultati ottenuti polarograficamente: le curve di titolazione ossido–riduttiva si presentano più « depresse » nella (I) rispetto alla (II).

Siamo profondamente grati all'illustre prof. G. Semerano, direttore del Centro di Polarografia del C.N.R. per la proficua discussione cui gentilmente ha voluto accedere e per gli utili consigli datici in tale occasione.

Chimica fisica. — *Sulla cinetica della reazione tra nitroclororderivati aromatici e idrato potassico in soluzione idroalcolica* (*). Nota di Massimo Simonetta e Giorgio Favini, presentata (**) dal Socio L. Cambi.

Abbiamo recentemente comunicato (1) i risultati delle nostre esperienze sulla cinetica della reazione tra nitrocloroderivati aromatici e idrato potassico in soluzione, in miscele acqua–diossano; nella presente Nota esponiamo i risultati ottenuti in soluzione idroalcolica. I derivati alogenati presi in esame sono: 1–nitro, 2–cloronaftalina, 1–nitro, 4–cloronaftalina, 1–cloro, 2–nitronaftalina, o–cloronitrobenzolo; p–cloronitrobenzolo.

Parte sperimentale.

a) Preparazione dei composti: per i metodi di preparazione e purificazione e per le proprietà delle tre cloronitronaftaline esaminate rimandiamo alla Nota precedente (1); l'orto e il para cloronitrobenzolo sono stati ottenuti dai prodotti del commercio purificandoli per distillazione sotto vuoto e ricristallizzazione da alcool.

b) Preparazione delle soluzioni: i solventi usati erano acqua distillata e alcool etilico anidro. Le soluzioni titolate di cloronitrocomposto erano preparate pesando il soluto e portando a volume con alcool anidro; quelle di KOH alcolica pesando la potassa, sciogliendola in un egual peso di acqua distillata e portando a volume con alcool anidro.

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica Industriale dell'Università di Milano e nell'Istituto di Chimica Generale del Politecnico di Milano.

(**) Nella seduta del 13 giugno 1953.

(1) M. Simonetta e G. Favini, questi « Rendiconti », vol. XIV, ser. 8ª, fasc. 4, pp. 505–511 (1953).

c) Isolamento e riconoscimento dei prodotti di reazione: nelle condizioni delle nostre esperienze si potevano ottenere il composto fenolico o l'etere etilico corrispondente o una miscela dei due. Era pertanto necessario mettere a punto un metodo pratico e rapido per la separazione e il dosaggio di questi due prodotti di reazione: a tale scopo abbiamo scelto il trattamento con un eccesso di NaOH al 5 % per due minuti, dopo aver verificato che, come era facilmente prevedibile, tale trattamento lascia inalterato l'etere, mentre discioglie quantitativamente il fenolo.

Ad esempio 0,5 gr. di 4–nitro, 1–naftolo e 0,5 gr. di 4–nitro, 1–etossinaftalina in miscela sottoposti a tale trattamento dànno 0,455 gr. di residuo indisciolto e 0,43 gr. di precipitato ottenuto dopo acidificazione della soluzione. Una miscela di 0,073 gr. di 4–nitro, 1–naftolo e 0,73 gr. di 4–nitro, 1–etossinaftalina ha dato analogamente 0,70 gr. di residuo e 0,05 gr. di precipitato dopo acidificazione. Abbiamo quindi proceduto alle seguenti prove:

gr. 5,2 di 1–nitro, 4–cloronaftalina sciolti in 200 cc. di alcool vengono trattati con 50 cc. di KOH alcolica 0,5 N per 8 ore a 75 °C.

Si evapora l'alcool e si lava con acqua per eliminare il KCl; rimane un residuo di 4,8 gr. a p. f. 114 °C. Per trattamento con NaOH al 5 % si ottiene una soluzione debolmente colorata dalla quale per acidificazione si ottengono circa 0,1 gr. di 4–nitro, 1–naftolo a p. f. 164 °C. Rimangono invece indisciolti 4,5 gr. di 4–nitro, 1–etossinaftalina (p. f. 116° dopo purificazione);

gr. 5,2 di 1–nitro, 2–cloronaftalina trattati come nella prova precedente danno 3,9 gr. di residuo a p. f. 68 °C. Dal trattamento con NaOH al 5 % risulta assenza pressoché completa di naftolo. La determinazione analitica del cloro nel residuo, eseguita in Carius, ha mostrato che si tratta di una miscela del 62 % circa del prodotto di partenza (p. f. 99°) e 38 % circa di 1–nitro, 2–etossinaftalina (p. f. 105°).

Da 4,5 gr. di 1–cloro, 2–nitronaftalina trattati come nella prova precedente sono stati ottenuti col solito metodo di separazione gr. 2 di 2–nitro, 1–etossinaftalina (p. f. 84°) e gr. 0,15 di 2–nitro, 1–naftolo (p. f. 127°).

d) Modalità e risultati delle prove cinetiche: le reazioni sono state eseguite in un ultratermostato nel quale la temperatura era controllata a ± 0,05°. Ciascuna determinazione è stata eseguita secondo le modalità seguenti: 20 cc. della soluzione 0,125 N alcolica del cloroderivato e 5 cc. di soluzione di KOH alcolica 0,5 N venivano introdotti separatamente nel termostato; raggiunto l'equilibrio termico la reazione era iniziata mescolando le due soluzioni; dopo il tempo voluto si arrestava la reazione versando in 100 cc. di acido nitrico diluito; veniva quindi determinata la quantità di cloroioni presenti nel solito modo [1].

I risultati per le varie sostanze e per le varie temperature sono raccolti nelle tabelle seguenti (% Cl^- formato):

1–cloro, 2–nitronaftalina				1–nitro, 4–cloronaftalina			
t (ore)	55°	65°	75°	t (ore)	55°	65°	75°
1	18,44	34,92	55,68	1	11,00	23,52	46,68
2	29,04	49,80	68,24	2	20,40	35,88	59,24
3	38,84	59,32	76,48	3	27,08	46,68	67,08
4	44,72	65,52	82 —	4	33,36	54,92	72,96

1–nitro, 2–cloronaftalina			
t (ore	65°	70°	75°
2	6,08	7,66	12,74
4	10,20	15,30	22,94
6	13,72	19,40	29,60
8	17,94	23,14	36,08

Paracloronitrobenzolo				Ortocloronitrobenzolo			
t (ore)	65°	70°	75°	t (ore)	65°	70°	75°
2	4,92	8,17	13,32	2	2,18	4,43	8,08
4	9,44	16,95	24,43	4	4,82	10,70	14,52
6	14,14	—	—	6	7,58	13,14	20,80
6,25	—	25,47	33,20	7,75	9,04	—	—
8	16,09	27,26	—	8	—	—	25,08
8,25	—	—	39,52	8,50	—	15,88	—

DISCUSSIONE DEI RISULTATI. – L'equazione della reazione studiata si può formulare nel modo seguente:

$$(I) \qquad R{-}Cl + OR_1^- \longrightarrow R{-}OR_1 + Cl^-$$

dove R—Cl indica i vari cloronitroderivati presi in esame e OR_1 gli ioni ossidrile o C_2H_5O . Per lo ione OH sarebbe da prendersi in considerazione anche il successivo equilibrio:

$$(II) \qquad R{-}OH + OH^- \rightleftarrows R{-}O^- + H_2O$$

come nel caso delle reazioni in solvente acqua–diossano [1].

Poiché dalle nostre analisi risulta che il prodotto di reazione, almeno nel caso dei derivati della naftalina, è quasi esclusivamente o comunque in grande prevalenza l'etere, abbiamo ritenuto trascurabile la scomparsa di ioni OH^- dovuta all'equilibrio (II) e abbiamo calcolato le costanti di velocità k_1 per la reazione globale di sostituzione applicando all'equazione (I) le ordinarie formule delle reazioni del secondo ordine. I valori ottenuti sono riportati nella Tabella I (k_1 in ore^{-1} (moli/litro)$^{-1}$).

TABELLA I.

t° C.	1-cloro, 2-nitro naftalina	1-nitro, 4-cloro naftalina	1-nitro, 2-cloro naftalina	p-cloro nitrobenzolo	o-cloro nitrobenzolo
55°	2,11	1,25	—	—	—
65°	5,03.	2,96	0,28	0,26	0,13
70°	—	—	0,41	0,49	0,22
75°	11,42	7,64	0,72	0,79	0,43

Anche per queste soluzioni abbiamo cercato di sostituire alle concentrazioni brute degli ioni valori almeno grossolanamente approssimati delle loro attività, mediante determinazioni orientative, in base a misure di conducibilità, delle costanti di dissociazione basica di R_1OK. I valori ottenuti sono stati:

a 55° $K_B = 0{,}0304$ moli/litro
a 65° $K_B = 0{,}0224$ » »
a 75° $K_B = 0{,}0144$ » »

Da questi dati si ricava $K_B = 0{,}018$ a 70 °C.

I valori di k_1 ricalcolati integrando per via grafica le nuove equazioni cinetiche sono riportati nella tabella II.

TABELLA II.

t °C.	1-cloro, 2 nitro naftalina	1-nitro, 4-cloro naftalina	1-nitro, 2 cloro naftalina	p-cloro nitrobenzolo	o-cloro nitrobenzolo
55°	4,68	2,85	—	—	—
65°	11,80	7,25	0,695	0,679	0,335
70°	—	—	1,155	1,390	0,726
75°	27,77	19,24	2,161	2,389	1,318

Con questi valori di k_1 il grafico di figura 1 ha permesso il calcolo delle energie di attivazione apparenti nei vari casi.

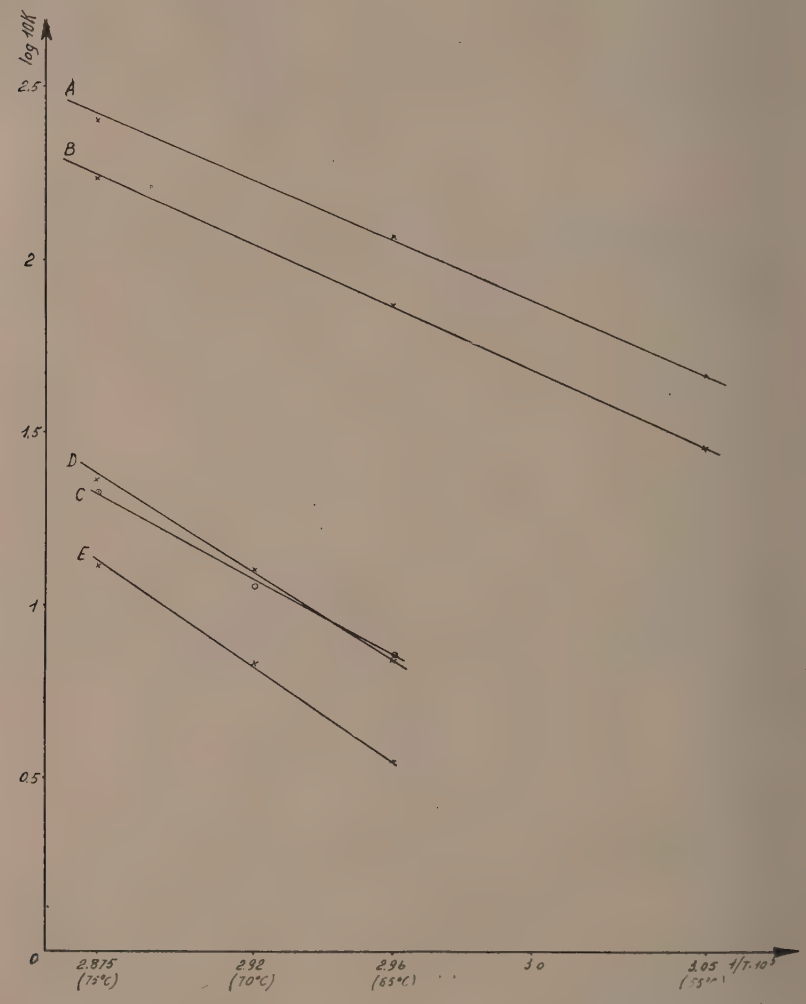


Fig. 1. – Calcolo delle energie di attivazione.

A = 1-cloro, 2-nitronaftalina E = 19850 cal/mole
B = 1-nitro, 4-cloronaftalina E = 20600 »
C = 1-nitro, 2-cloronaftalina E = 25300 »
D = para-cloronitrobenzolo E = 29000 »
E = orto-cloronitrobenzolo E = 32000 »

Possiamo concludere che siamo in presenza di una sostituzione nucleofila aromatica a meccanismo bimolecolare. Tale sostituzione è notevolmente più veloce in ambiente alcolico che non in solvente acqua–diossano; poiché i valori della costante dielettrica per i due solventi sono circa eguali (ad

esempio a 55° è $\varepsilon = 20{,}3$ per le soluzioni acqua–alcool e $\varepsilon = 20{,}1$ per le soluzioni acqua–diossano, mentre a 75° è $\varepsilon = 17{,}9$ per entrambi i solventi), tale diversità di comportamento è attribuibile al fatto che la reattività dello ione $C_2H_5O^-$ è maggiore che quella dello ione ossidrile [2]: ciò è anche in accordo con la scarsa percentuale di naftolo tra i prodotti della reazione in ambiente alcoolico. Anche per le soluzioni alcoliche le velocità di reazione dei derivati della naftalina decrescono nell'ordine:

1–cloro, 2–nitronaftalina > 1–nitro–, 4–cloronaftalina > 1–nitro, 2–cloronaftalina.

Chimica. — *Ricerche sugli* N*–ossidi aromatici. – Spettro di assorbimento U. V. dell'*N*–ossido della 2–fenilchinolina e comportamento chimico* [*]. Nota di MARTINO COLONNA e AMERIGO RISALITI, presentata [**] dal Socio G. B. BONINO.

A seguito di precedenti ricerche sulla reattività [1] e spettri di assorbimento U.V. [2] degli N–ossidi aromatici, e in relazione alle ricerche spettroscopiche delle 2–arilchinoline [3], riferiamo ora sullo studio spettroscopico e comportamento chimico dell'N–ossido della 2–fenilchinolina.

Le variazioni spettrali che comporta l'aggruppamento $\diagup\!\!\diagdown \overset{+}{N} \rightarrow \overset{-}{O}$, che entra a formare i cosidetti N–ossidi organici – come del resto era da attendersi – sono di ordine diverso per l'N–ossido di dimetilanilina, e per l'N–ossido di piridina, rispetto alle basi da cui derivano. Lo spettro dell'N–ossido di dimetil–anilina, analogamente allo ione anilinio, è molto vicino a quello del benzolo [4], mentre l'N–ossido di piridina mostra uno spettro che rispetto a quello della piridina, risulta spostato verso valori maggiori, come lunghezza d'onda e specialmente come intensità [5] (Fig. 1). Questo diverso aspetto ottico trova riscontro nel diverso comportamento chimico dei due composti: l'N–ossido di dimetilanilina orienta in meta le sostituzioni elettrofile [6] ed

(2) E. D. HUGHES, C. K. JUGOLD, A. D. SCOTT, « J. Chem. Soc. », 1201 (1937).

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto Chimico dell'Università di Trieste e nell'Istituto di Chimica Industriale dell'Università di Bologna, col contributo del C. N. R.

(**) Nella seduta del 13 giugno 1953.

(1) M. COLONNA, « Gazz. chim. ital. », *82*, 503 (1952); M. COLONNA e A. RISALITI, « Gazz. chim. ital. », *83*, 58 (1953); F. MONTANARI e L. PENTIMALLI, « Gazz. chim. ital. », *83*, 173 (1953).

(2) M. COLONNA e A. RISALITI, « Boll. sci. fac. chim. ind. » (Bologna), *10*, 157 (1952).

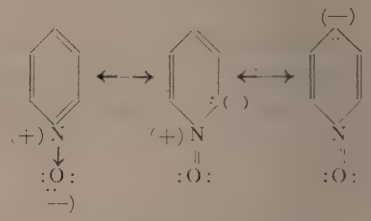
(3) Questi « Rend. », ser. VIII, *11*, 268 (1951).

(4) H. S. FRENCH e C. M. GENS, « J. Am. Chem. Soc. », *59*, 2600 (1937); E. H. RODD, *Chemistry of Carbon Compounds*, Elsevier Publishing Company, N. Y. vol. I, p. 90, (1951).

(5) Nota (*); vèd. anche E. SHAW, « J. Am. Chem. Soc. », *71*, 67 (1949).

(6) BAMBERGER e TSCHINER, « Ber. », *32*, 1882 (1899).

ossida l'idrato ferroso a idrato ferrico [7], l'N–ossido di piridina invece orienta in para le sostituzioni elettrofile [8] e non ossida l'idrato ferroso [7]. Questi fatti, in accordo con le misure dei momenti dipolari [9], stanno a dimostrare che mentre nell'N–ossido di dimetilanilina il gruppo $-\overset{(+)}{N}\rightarrow\overset{(-)}{O}$ mostra soltanto « effetto induttivo » (elettron–attrattivo) – come il gruppo $-\overset{(+)}{N}(CH_3)_3$ nello ione del trimetilanilinio – e quindi disattiva le posizioni orto– para– alle sostituzioni elettrofile, nell'N–ossido di piridina esiste un « effetto mesomero » e possono essere presenti le seguenti strutture in risonanza:



attraverso le quali si vede come le sostituzioni elettrofile vengono dirette verso la posizione orto– o para–. Tali strutture mostrano altresì che nell'N–ossido di piridina l'ossigeno è più intimamente legato all'azoto, di quanto non sia nell'N–ossido di dimetilanilina.

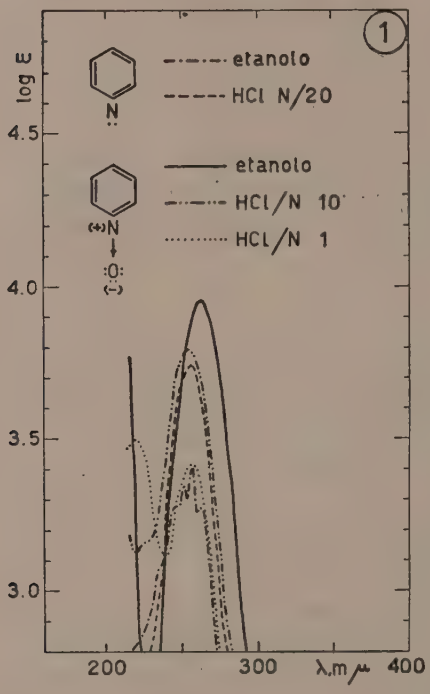


Fig. 1.

Così potremmo anche dire [10] che per l'N–ossido di piridina, contribuiscono all'assorbimento U.V. le strutture polari sopra riportate (cromoforo 8 π), in cui cioè all'eccitazione fotochimica partecipano due elettroni dell'ossigeno con i sei elettroni π nucleari, mentre – com'è noto – all'assorbimento dell'N ossido di dimetilanilina partecipano soltanto i sei elettroni π del nucleo benzenico (cromoforo 6 π) [11].

(7) P. Baumgarten, « Ber. », *71*, 2603 (1938).

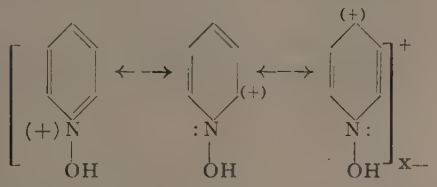
(8) « Chem. Abs. », *45*, 2476, 5152 (1951); H. J. Den Hertog e J. Overhoff, « Rec. trav. Pays Bas », *69*, 468 (1950).

(9) E. P. Linton, « J. Am. Chem. Soc. », *62*, 1945 (1940).

(10) Le proprietà chimiche e spettroscopiche di un composto organico riflettono stati di eccitazioni elettroniche differenti, tuttavia delle relazioni sono possibili porsi tra dette proprietà. (Ved. J. M. Hearn, R. A. Morton e J. C. E. Simpson, « J. Chem. Soc. », 1951, 3328).

(11) E. H. Rodd, *Chemistry of Carbon Compounds*, Elsevier Publishing Company, N. Y. vol. I, p. 90 (1951).

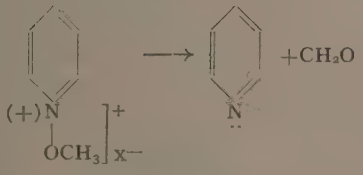
D'altra parte, nel corso di precedenti ricerche [2], abbiamo osservato che lo spettro dell'N-ossido di piridina in acqua, e meglio in acidi, viene retrocesso rispetto a quello in alcool, tanto che in acido cloridrico N/1, l'assorbimento si avvicina – a meno della struttura fine – a quello caratteristico della piridina (Fig. 1) [12]. Queste variazioni spettrali sono state da noi interpretate, ammettendo che in mezzo acido si abbia una protonizzazione all'ossigeno, in seguito alla quale viene inibita la coniugazione dello stesso ossigeno col nucleo piridinico, e che ad una data concentrazione dell'acido, si ritorna al cromoforo esaelettronico della piridina. In tali circostanze le strutture più probabili, responsabili dell'assorbimento, dell'N-ossido di piridina, sono le seguenti:



Anche nel caso dell'N-ossido di chinolina si possono fare le stesse considerazioni: si ha una retrocessione dello spettro in mezzo acido, rispetto a quello in soluzione alcoolica, e in acido cloridrico N/1 si ha uno spettro che non è molto diverso da quello della chinolina in acido cloridrico N/10 (Fig. 2).

In base a questi fatti si può prevedere che impegnando comunque l'ossigeno degli N-ossidi aromatici, questi perdono il loro carattere peculiare, per assumere quello comune degli N-ossidi alifatici [13].

Infatti ciò trova perfetta corrispondenza nel comportamento chimico degli alchilalogenuri degli N-ossidi aromatici, di fronte all'ossido di argento, che come gli N-ossidi alifatici vengono decomposti nelle basi di origine ed aldeidi [14]:



Premesse queste considerazioni abbiamo voluto studiare lo spettro di assorbimento U.V. e di conseguenza il comportamento chimico dell'N

(12) Tali risultati sono in accordo con quelli trovati recentemente da autori giapponesi («Chem. Abs.», *47*, 3314 (1953).

(13) Sono cioè paragonabili agli azossi-composti; BIGIAVI («Rend. Accad. Lincei», V, 44 (1927) a tale proposito così si esprime «gli azossi composti somigliano più alle arilidrossilamine o agli amino-ossidi delle amine terziarie che non ai nitroderivati».

(14) «Chem. Abs.», *45*, 5154 (1951).

ossido della 2–fenilchinolina. In un lavoro precedente uno di noi ha riferito in questi «Rendiconti»[3] sulle caratteristiche spettroscopiche delle 2–arilchinoline, in base alle quali si è potuto stabilire che il cromoforo responsa-

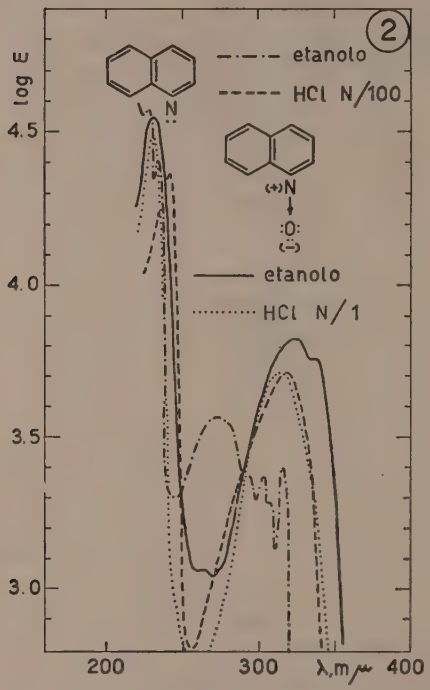


Fig. 2.

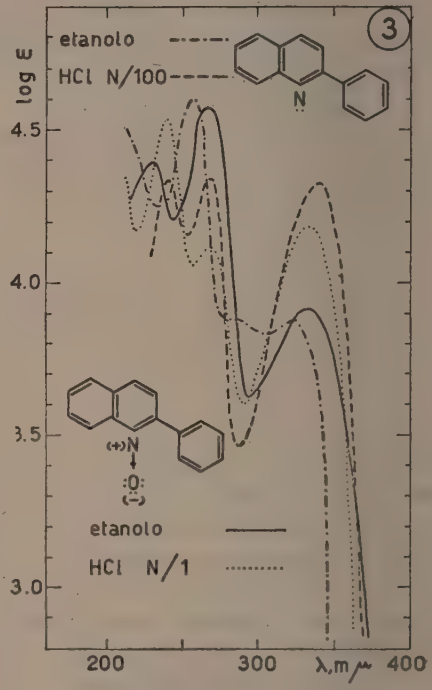
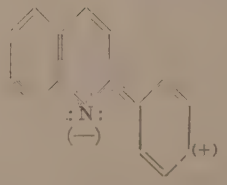


Fig. 3

bile dell'assorbimento U.V. della banda verso le maggiori lunghezze d'onda è quello risultante dalla interazione elettronica dei nuclei:

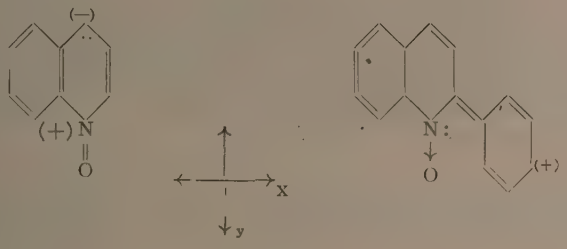


Se ora confrontiamo lo spettro della 2–fenil–chinolina con quello del suo N ossido entrambi in soluzione etanolica (Fig. 3), si notano degli spostamenti batocromi ed ipercromi che possono considerarsi di poco valore se si paragonano con quelli più notevoli della chinolina e del suo N ossido, nel medesimo solvente (Fig. 2).

Un altro fatto che noi riteniamo di notevole interesse è che, se si confronta lo spettro dell'N ossido della 2–fenilchinolina, in alcool etilico, con

quello in soluzione acida, si notano spostamenti di un certo rilievo, verso valori maggiori, specialmente nell'intensità (Fig. 3). Tali variazioni sono cioè nello stesso senso di quelli della 2–fenil–chinolina, in etanolo e in soluzione acida, ma diverse da quelle dell'N–ossido di chinolina, che come abbiamo già detto, in mezzo acido mostra una retrocessione dello spettro rispetto a quello in soluzione etanolica.

Questo diverso comportamento spettroscopico dei due N–ossidi in mezzo acido, potrebbe voler dire che siamo di fronte a due diverse eccitazioni elettroniche direzionali [15]. Si può cioè pensare che mentre nel caso dell'N–ossido di chinolina siamo di fronte ad una eccitazione elettronica di « coniugazione » nel senso verticale (Banda Y), che viene interdetta in mezzo acido, nel caso dell'N–ossido della 2–fenilchinolina si ha invece – per solo effetto induttivo (elettron–attrattivo) dell' $\rangle N \rightarrow O$ – un'eccitazione elettronica orizzontale (Banda X) fra i due nuclei, che viene invece favorita dal mezzo acido.



Se le cose stanno realmente in questi termini, ne dovrà derivare che nell'N–ossido della 2–fenilchinolina, l'ossigeno dovrà essere legato meno saldamente all'azoto nucleare, che non nell'N–ossido di chinolina. Infatti noi abbiamo potuto dimostrare che mentre l'N–ossido di chinolina, non ossida l'idrato ferroso e rimane tale, dopo diversi giorni di contatto, anche con anidride solforosa, l'N–ossido della 2–fenilchinolina viene invece ridotto a 2–fenilchinolina sia con idrato ferroso che con anidride solforosa, comportamento analogo cioè agli azossi–composti, al diazotato normale [16] e agli N–ossidi alifatici [7].

Assai diverso è anche il comportamento dei due N–ossidi in parola, di fronte al reattivo del Grignard. Infatti mentre l'N–ossido di chinolina con bromuro di fenil–magnesio – come abbiamo di recente dimostrato [17] – fornisce la 2–fenilchinolina, l'N–ossido della 2–fenilchinolina, con lo stesso

(15) G. N. LEWIS e M. CALVIN, « Chem. Rev. », *25*, 273 (1939); ved. anche R. N. JONES, « Chem. Rev. », *41*, 353 (1947).

(16) A. ANGELI e Z. JOLLES, questi « Rend. », *10*, II, 321 (1929); Z. JOLLES e J. KRUGLIAKOFF, questi « Rend. » (VI), *11*, I, 197 (1930); A. ANGELI, « Gazz. chim. ital. », *60*, 372 (1930).

(17) M. COLONNA e A. RISALITI, « Gazz. chim. ital. », *83*, 58 (1953).

reattivo, subisce una desossidazione, fornendo la 2-fenilchinolina. Comportamento analogo cioè agli azossicomposti che – come ha dimostrato Angeli – con bromuro di fenil-magnesio forniscono gli azocomposti corrispondenti [18].

Da quanto abbiamo esposto appare chiaramente come gli spettri di assorbimento spesso possono dare utili informazioni, oltre che sulla struttura, anche sul comportamento chimico di alcune sostanze organiche, e che sostanze apparentemente simili mostrano talvolta caratteristiche spettroscopiche e comportamento chimico diverse.

Chimica organica. — *Sulla condensazione di Knoevenagel: azione disidratante dei sali di alcune basi organiche* [*]. Nota di Luigi Canonica, Cesare Cardani e Roberto Trave, presentata [**] dal Socio L. Cambi.

Due di noi avevano altre volte [1] rilevato come i sali sodici delle aciforme dei nitroalcooli (I) (risultanti dalla condensazione delle aldeidi aromatiche con le nitroparaffine in presenza di NaOH), per trattamento con acidi fornissero normalmente o i nitroalcooli liberi, o i nitrostiroli (II) o una miscela dei due prodotti

$$\underset{\text{(I)}}{R{-}CH(OH){-}CH{=}NOONa} \qquad \underset{\text{(II)}}{R{-}CH{=}CH{-}NO_2}$$

Secondo Knoevenagel [2] ed altri Autori [3] la condensazione tra le aldeidi aromatiche e le nitroparaffine viene determinata da piccole quantità di ammine, quali la piperidina e la metilammina, nonché dall'acetato ammonico in soluzione acetica [4] generando però direttamente i nitrostiroli.

Pare logica l'ipotesi che i prodotti primari della condensazione siano, anche in questo caso, i nitroalcooli e che questi disidratino poi a nitrostiroli. Noi abbiamo potuto provare che la disidratazione del fenil- e del-

(18) A. Angeli, questi « Rend. », XXV, 5ª serie, 12 (1916); « Gazz. chim. ital. », *46*, 305 (1916); Ved. anche « Chem. Zentr. », 1939, I, 4930.

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica Industriale dell'Università di Milano e nell'Istituto di Chimica Generale del Politecnico di Milano.

(**) Nella seduta del 13 giugno 1953.

(1) L. Canonica, « Gazz. Chim. It. », *79*, 192 (1949); L. Canonica e C. Cardani, ibid., 262.

(2) E. Knoevenagel e L. Walter, « Ber. », *37*, 4502 (1904).

(3) Ved. ad esempio F. A. Ramirez e A. Burger, « J. Am. Chem. Soc. », *78*, 2781 (1950); G. Hahn e K. Stiehl, « Ber. », *71*, 2154 (1938).

(4) M. G. Srinivasa Rao, C. Srikantia e M. S. Iyengar, « Helv. Chim. Acta », *12*, 581 (1929); Raiford e Fox, « J. Org. Chem. », *9*, 170 (1944); Gairaud e Lappin, « J. Org. Chem. », *18*, 1 (1953).

l'anisil–nitrometil–carbinolo ai corrispondenti nitrostiroli, che spontaneamente avviene in modo lentissimo, risulta grandemente accelerata da piccole quantità di piperidina o di metilammina: l'acidità del mezzo in cui la disidratazione veniva condotta, l'influenza della quale abbiamo nelle precedenti ricerche accertato, veniva mantenuta in ogni caso costante, operando in soluzioni tamponante.

La difficoltà di dosare i nitrostiroli, in presenza dei nitroalcooli, senza intervenire sulla possibile disidratazione di questi, non ci ha permesso di dare forma quantitativa a tali nostre osservazioni. Abbiamo però constatato che mentre una dispersione dei due predetti nitroalcooli in una soluzione tampone (acido citrico – Na_2HPO_4) a pH 3 rimaneva molto a lungo apparentemente inalterata, l'aggiunta dell'1 % di acetato di piperidina accelera la disidratazione del nitroalcool, tanto da trasformare nello spazio di 2–3 giorni le gocce oleose di questo in masse solide cristalline del nitrostirolo corrispondente.

L'azione catalitica che i sali di alcune basi organiche esercitano sulla disidratazione dei nitroalcooli, poteva essere un caso particolare della più generale disidratazione dei carbinoli aventi in α un gruppo metilenico attivo.

Ciò abbiamo voluto accertare.

È noto che gli alcali catalizzano l'equilibrio:

$$\text{acetone} \rightleftharpoons \text{diacetonalcool}$$

ed altre condensazioni aldoliche, ed anche che le ammine agiscono in tal senso [5]. È noto altresì che agenti acidi provocano la disidratazione del diacetonalcool (III) ad ossido di mesitile (IV)

$$\underset{\text{(III)}}{(CH_3)_2C(OH)—CH_2—CO—CH_3} \qquad \underset{\text{(IV)}}{(CH_3)_2C=CH—CO_3—CH_3}$$

ma non ci risulta che sia mai stata saggiata l'azione dei sali delle basi organiche.

Esperienze da noi condotte hanno dimostrato che il diacetonalcool bollito per breve tempo con sali di basi organiche disidrata, trasformandosi per l'80–85 % in ossido di mesitile, il 10–15 % rimane inalterato, ed il 2–5% si trasforma in acetone.

I sali che hanno mostrato avere tale azione sono, oltre a quelli di piperidina con gli acidi cloridrico, bromidrico, iodidrico, solforico e perclorico, anche i cloridrati della monometil–, dimetil– e trimetil–ammina, N , N-dimetil–anilina, piridina, nonché il cloruro ammonico. Inattivi sono invece

(5) ÅKERLÖF, « J. Am. Chem. Soc. », *51*, 984 (1929); J. MILLER e M. KILPATRICK, ibid., *53*, 3217 (1931); F. H. WESTHEIMER e H. COHEN, ibid., *60*, 90 (1938); F. H. WESTHEIMER e W. A. JONES, ibid., *63*, 3283 (1941); R. P. KOOB, J. G. MILLER e A. R. DAY, ibid., *73*, 5775 (1951).

i sali delle basi ammoniche quaternarie, quali il bromuro di tetrametilammonio, purché ben purificato da tracce di sali dell'ammina terziaria.

Invero l'azione del cloruro ammonico è più lenta di quella dei sali delle ammine, ma pare probabile che ciò sia da attribuire alla quasi completa insolubilità del sale nel sistema reagente. Nel caso del cloridrato di piperidina la disidratazione è invece tanto rapida che praticamente è sufficiente distillare il diacetonalcool in presenza di tale sale per ottenere l'ossido di mesitile. Questo è anzi un metodo assai pratico ed utile dal punto di vista preparativo, essendo gli altri metodi fin qui noti [6] nettamente inferiori come praticità e come rese.

Il non completarsi della reazione, cioè la presenza di diacetonalcool dopo prolungato riscaldamento, pareva indicare che la reazione fosse un equilibrio. Ed in realtà bollendo ossido di mesitile ed acqua in presenza dei sali suddetti, si forma, sia pur in piccolissime quantità, del diacetonalcool. Che la percentuale di diacetonalcool che così si ottiene sia inferiore a quella di prodotto rimasto inalterato nella reazione inversa, è da attribuire alla solubilità relativamente bassa dell'acqua nell'ossido di mesitile. Tale risultato qualitativo ci è parso sufficiente a dimostrare l'esistenza di un equilibrio, anche senza ricorrere ad ulteriori più complicate esperienze.

Da tutto ciò si possono trarre alcune conclusioni.

Se si considera il sistema di equilibri

$$R{-}CO{-}R' + R''{-}CH_2{-}X \rightleftarrows R{-}\underset{\displaystyle R'}{C(OH)}{-}\underset{\displaystyle R''}{CH}{-}X \rightleftarrows R{-}\underset{\displaystyle R'}{C}{=}\underset{\displaystyle R''}{C}{-}X + H_2O$$

$$R, R', R'' = H \text{ oppure alchile}$$
$$X = CHO, \quad COR, \quad NO_2, \text{ ecc.}$$

si osserva che le ammine allo stato di base libera agiscono sul primo equilibrio tendenzialmente spostato verso la scissione del prodotto di condensazione. Quando piccole quantità di acido salificano parte dell'ammina, il sale presente promuove il raggiungimento anche del secondo equilibrio, tendenzialmente spostato nel senso della disidratazione del carbinolo: questo viene via via sottratto al primo equilibrio ed in definitiva il prodotto disidratato può aversi con buone rese complessive. È questo il caso della condensazione di Knoevenagel e tale interpretazione è in accordo con la scelta che Kuhn e collaboratori [7] empiricamente facevano dell'acetato di piperidina quale agente condensante: questo sale, idrolizzato in notevole misura, assicura la presenza di piperidina sia libera che salificata.

La piperidina salificata da acidi forti come il cloridrico è invece praticamente inattiva sul primo equilibrio, come è provato dal fatto che l'acetone riscaldato a lungo in sua presenza rimane praticamente inalterato.

(6) Cfr. ad esempio J. B. Conant e N. Tuttle, « Org. Syntheses », Coll. vol. I, 345 (1946).

(7) R. Kuhn, W. Badstübner e C. Grundmann, « Ber. », *69*, 98 (1936).

Non potrà però in alcun caso escludersi un'azione attribuibile alle piccole quantità di ammina liberata dall'equilibrio idrolitico del sale (per forte che sia l'acido), o viceversa alla sia pur piccola quantità di ammina presente in forma ionica (derivante per esempio dall'addizione di idrogenoioni dell'acqua) anche in assenza di acidi introdotti a salificarla. A ciò può attribuirsi la formazione delle esigue quantità di acetone che si riscontrano nella disidratazione del diacetonalcool con cloridrato di piperidina e risp. riscaldando l'ossido di mesitile con acqua e piperidina base libera. Nel caso studiato, ed in sostanza anche nelle esperienze di Kuhn, il comportamento della base libera risulta nettamente differenziabile da quello del suo sale.

Analogamente al diacetonalcool, l'acetaldolo viene rapidamente disidratato ad aldeide crotonica per riscaldamento in presenza di piccole quantità di cloridrato di piperidina, metilammina, trimetilammina. Le rese sono in questi casi minori a causa del formarsi di notevoli quantità di prodotti di polimerizzazione.

PARTE SPERIMENTALE.

1. *Disidratazione del diacetonalcool.* – Il diacetonalcool [8] viene riscaldato all'ebolizione in apparecchio di Marcusson, in presenza del sale in esame. Quando il liquido che ricade dal refrigerante non è più torbido si protrae il riscaldamento per un tempo pari alla metà di quello trascorso dall'inizio dell'ebollizione. Dopo raffreddamento si filtra per eliminare il sale eventualmente separatosi e si distilla in palloncino munito di piccola colonna di rettifica.

A titolo di esempio si riporta la prova eseguita con cloridrato di piperidina.

Grammi 150 di diacetonalcool vengono bolliti come sopra detto con g 1 di cloridrato di piperidina. Nella provetta dell'apparecchio si sono misurati cm^3 12 di acqua dopo 12 min.; cm^3 21 dopo 25 min.; cm^3 21,5 dopo 35 min.; cm^3 21,5 dopo 60 min.

Inizialmente la separazione di acqua è tanto rapida da far ritenere che la sua durata dipenda unicamente dal tempo necessario a che venga asportata come azeotropo.

La rettifica del prodotto di reazione dà, dopo una minima frazione di testa contenente acetone, g 105,2 di ossido di mesitile bollente a 129–130.5 °C ed avente n_D^{20} 1,4434. Tenendo conto del fatto che l'ossido di mesitile presenta a 25° una solubilità in acqua pari al 3,4 %, sono da aggiungere a questo quantitativo g 0,7 di prodotto eliminato con l'acqua. La resa in ossido di mesitile ammonta così complessivamente all'83,5 % del teorico; l'acqua separata ammonta a cm^3 20,8 (89,6 % del teorico).

8) Si usa un prodotto che distilla completamente tra 167°.5 e 168°.5 ed avente n_D^{20} 1,4234.

Il residuo della rettifica è costituito da diacetonalcool (g 19 pari al 12,7 % della quantità introdotta); la sua identità risulta dalla temperatura di ebollizione, dall'indice di rifrazione nonché dal fatto che bollito nuovamente con cloridrato di piperidina dà altro ossido di mesitile.

Risultati sostanzialmente identici sono stati ottenuti con i cloridrati di monometilammina, dimetilammina, trimetilammina, butilammina, N , N–dimetilanilina, piridina, nonché con bromidrato, iodidrato, solfato e perclorato di piperidina.

Con cloruro ammonico è stata necessaria una più prolungata ebollizione per portare a termine la separazione di acqua. La quantità di acqua separata ammonta al 46 % del teorico dopo 20 min. al 77 % dopo 100 min. all'82 % dopo 130 min. La resa in ossido di mesitile è risultata dell'81,5 % del teorico.

2. *Idratazione dell'ossido di mesitile.* – Grammi 100 di ossido di mesitile (p. eb. 129–130°) e g 0,6 di piperidina neutralizzata con HCl N/2 (cm³ 14,1) vengono bolliti a ricadere per 1 ora. Dopo raffreddamento si separa lo strato acquoso e lo strato di ossido di mesitile viene lavato con 20 cm³ di acqua. Dopo essiccamento su Na_2SO_4 si distilla con piccola colonna di rettifica, raccogliendo il distillato fino ad una temperatura di 132°. Il residuo della distillazione (g 8 circa) viene rettificato con colonna di Todd, raccogliendo una frazione (g 1 circa) distillante a 164–167° identificata per diacetonalcool oltre che dalla temperatura di ebollizione anche dall'indice di rifrazione, trovato n_D^{20} 1,4256 (secondo la letteratura si hanno valori varianti tra 1,4235 e 1,4242).

3. *Azione della piperidina sull'ossido di mesitile.* – Si bollono a ricadere per 50 min. cm³. 10 di ossido di mesitile, cm³ 2 di acqua e cm³ 0,2 di piperidina. Si distilla raccogliendo la frazione che passa fino a 100°, si separa lo strato acquoso (cm³ 2 circa) e lo si ridistilla raccogliendo la prima metà che si può ritenere contenga la massima parte dell'acetone formatosi. Separate per filtrazione le scarse goccioline di ossido di mesitile, l'acetone si identifica aggiungendo alla soluzione acquosa un eccesso di soluzione acetica di p–nitrofenilidrazina. Il precipitato formatosi fonde a 148° dopo due cristallizzazioni da benzina e viene identificato per *p*–nitrofenilidrazone dell'acetone anche dal saggio di fusione in miscela con lo stesso prodotto preparato per il confronto.

In assenza di piperidina l'ossido di mesitile trattato in maniera analoga non dà luogo alla formazione neppure di tracce di acetone.

4. *Azione della piperidina sul diacetonalcool.* – Grammi 20 di diacetonalcool e g 0,5 di piperidina vengono lasciati a sé per 48 ore. Rettificando si ottengono g 1,7 di prodotto bollente tra 60 e 74° (costituiti essenzialmente da acetone) e g 3,2 di prodotto distillante tra 74 e 163°, il restante distilla

tra 163 e 168°. In nessuna delle due prime frazioni si è potuta dimostrare la presenza di ossido di mesitile.

5. *Disidratazione dell'acetaldolo ad aldeide crotonica.* – L'acetaldolo riscaldato con il cloridrato delle ammine prima indicate disidrata in modo rapidissimo. Dalla distillazione rimane un notevole residuo di prodotti altobollenti. Il distillato seccato su Na_2SO_4 e rettificato dà aldeide crotonica con rese del 68 % del teorico.

L'andamento dell'operazione e le rese sono state praticamente identiche con tutti i sali provati.

Anatomia. — *Contributo alla conoscenza della commessura bianca anteriore dell'encefalo* (*). Nota di LUIGI CATTANEO, presentata (**) dal Socio A. PENSA.

La commessura bianca anteriore suole essere considerata come risultante dalla fusione di due sistemi di fibre commessurali: uno anteriore, chiamato braccio frontale della commessura associante fra loro i bulbi olfattivi ed un altro posteriore teso fra i poli temporali degli emisferi e per la qual cosa detto braccio temporale. Non solo però sono descritte fibre di origine olfattiva e temporale come formanti la commessura bianca anteriore ma anche numerose fibre di altra provenienza come: fibre del peduncolo olfattivo, dello striato, neopalliali, del nucleo amigdaleo e forse anche del tubercolo olfattivo.

Ricollegandomi a mie precedenti Note e Comunicazioni riguardanti il rinencefalo mi occuperò in questa Nota del braccio frontale della commessura bianca anteriore; dirò pertanto della sua origine, della sua costituzione e del suo decorso come ho potuto osservare in preparati, appositamente allestiti, di encefali di cane e di gatto.

Tralascio di citare la bibliografia che esporrò nella Memoria definitiva dopo aver completate le ricerche in questi animali ed aver esaurito anche lo studio, ora solo intrapreso, della commessura bianca anteriore dell'uomo.

Ho studiato per ora i cervelli di cane e di gatto perché, come è noto, la commessura bianca anteriore è nei macrosmatici particolarmente sviluppata e ciò in rapporto alla preminenza che il rinencefalo ha in questi animali.

Ho allestito preparati col metodo di Weigert che mi servirono specie per orientamento sul decorso della commessura; per uno studio più minuto e particolareggiato della sua costituzione sono invece dovuto ricorrere ai metodi

(*) Lavoro eseguito nel Centro di studio del sistema nervoso della Università di Pavia diretto dal prof. Antonio Pensa.

(**) Nella seduta del 9 maggio 1953.

all'argento ridotto e tra questi ho preferito il metodo Bielschowsky nella modificazione Palumbi.

I pezzi furono sezionati in serie con tagli orizzontali, sagittali e frontali. Le sezioni frontali sono quelle che servono maggiormente infatti, avendo il braccio frontale della commessura nel suo decorso antero-posteriore anche una direzione ascendente e in senso latero-mediale, non è possibile colpirlo interamente coi tagli orizzontali e sagittali ed inoltre i brevi tratti della commessura che, tagliati di sbieco, vengono ad essere compresi nelle sezioni così condotte, si confondono facilmente coi fasci della capsula interna che,

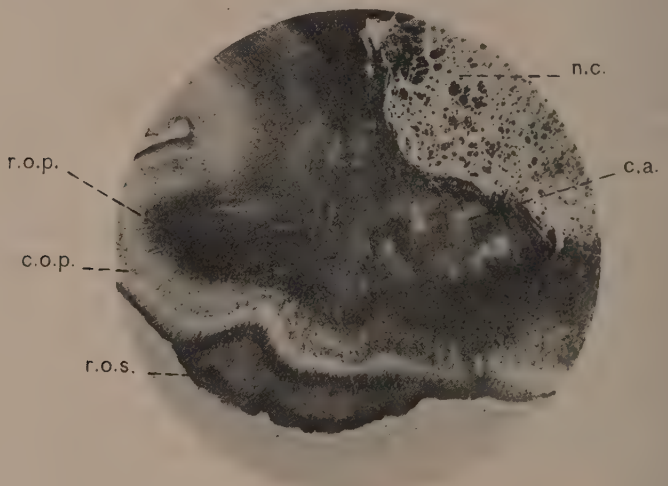


Fig. 1. – Sezione frontale della estremità posteriore del peduncolo olfattivo di cane.

c. a., commessura bianca anteriore; c. o. p., corteccia olfattiva del peduncolo; n. c., testa del nucleo caudato; r. o. p. radiazione olfattiva profonda; r. o. s., radiazione olfattiva superficiale (microfot. di preparato ottenuto col metodo Bielschowsky-Palumbi; 11×).

come verrà detto in seguito, è posta immediatamente sopra alla commessura stessa. Nei tagli frontali la commessura anteriore tagliata trasversalmente è sempre ben evidente ed individualizzabile dai fasci della capsula interna e pertanto, solo dopo aver studiato le sezioni praticate in tale direzione, è possibile orientarsi anche nei tagli sagittali e orizzontali, pure essi indispensabili per una completa conoscenza della formazione.

Il braccio frontale della commessura bianca anteriore si origina dalla radiazione olfattiva profonda del peduncolo poco dopo la fusione di questo col soprastante lobo frontale dell'emisfero cerebrale, quasi in corrispondenza dell'estremità posteriore del peduncolo stesso, poco al davanti quindi del tubercolo olfattivo.

Un taglio frontale condotto in questo punto ci permette di scorgere l'origine di detto braccio frontale della commessura anteriore (fig. 1). Tale se-

zione dimostra che la radiazione olfattiva profonda mentre nella parte laterale si presenta coll'aspetto suo tipico, cioè di un fascio formato da fibre midollate e anche amidollate non stipate e contenente numerose cellule nervose di aspetto polimorfo, nella parte mediale presenta fibre midollate ammassate che vengono a formare un fascio compatto ben distinguibile dalla rimanente parte della radiazione stessa; questo fascio che si differenzia in corrispondenza della parte mediale della radiazione olfattiva profonda è l'origine del braccio frontale della commessura bianca anteriore. Provenendo detto fascio dalla radiazione olfattiva profonda, è da ritenersi che alla sua costituzione partecipino fibre olfattive originatesi dal bulbo e fibre originatesi dal peduncolo; queste ultime sono da considerarsi provenienti dalle cellule piramidali della corteccia olfattiva come anche da quelle cellule polimorfe che tanto numerose si trovano fra le fibre della radiazione olfattiva profonda stessa.

Oltre a queste fibre di natura olfattiva, il braccio frontale della commessura anteriore riceve alla sua origine anche fibre della sostanza bianca del lobo frontale dell'emisfero cerebrale. Una modesta lamina di sostanza bianca del lobo frontale infatti, dopo la fusione del peduncolo olfattivo con detto lobo, si mette in continuità con la radiazione olfattiva profonda e, trovandosi così di conseguenza in continuità anche col fascio di origine della commessura anteriore, cede a questo un certo contingente di fibre; queste fibre sono da considerarsi commessurali neopalliali.

La sezione in esame, oltre a mostrarci l'origine del braccio frontale della commessura, rivela pure la posizione che questa alla sua origine ha rispetto alla testa del nucleo caudato. Tale rapporto è da tener presente; non bisogna infatti dimenticare che macroscopicamente la commessura bianca anteriore risulta tesa fra le teste dei due nuclei caudati. Qui alla sua origine il braccio frontale della commessura si trova vicino alla superficie ventrale del cervello appena sopra alla corteccia olfattiva del peduncolo e trovasi lateralmente alla testa del nucleo caudato, a contatto della parte più bassa della sua faccia laterale.

Sezioni frontali posteriori condotte in corrispondenza della parte anteriore del tubercolo olfattivo (fig. 2), ci mostrano quanto segue; il fascio di origine della commessura che abbiamo visto differenziarsi nella parte più mediale della radiazione olfattiva profonda del peduncolo si è staccato dalla radiazione ed è entrato nella testa del nucleo caudato.

Quivi detto fascio dirigendosi all'indietro, medialmente e un po' verso l'alto va mano mano allontanandosi dalla radiazione olfattiva profonda la quale si è d'altra parte portata più in fuori per entrare nel giro olfattivo laterale.

Dalla parte più mediale della radiazione olfattiva profonda si differenzia frattanto e si unisce alla commessura fondendosi col primo, un nuovo fascio identico nei caratteri al precedente e che però, oltre a contenere fibre della radiazione olfattiva profonda e della sostanza bianca del lobo frontale dell'emisfero cerebrale, riceve in gran numero anche fibre dello strato più pro-

fondo (strato plessiforme) della corteccia del tubercolo olfattivo a ridosso della quale il fascio in questione, alla sua origine, viene a trovarsi.

In tagli frontali condotti ancora in corrispondenza del tubercolo olfattivo, ma più all'indietro dei precedenti, si può constatare chiaramente che nella testa del nucleo caudato i due fasci sono fusi fra loro. D'altra parte fibre della radiazione olfattiva profonda unitamente ad un contingente di fibre provenienti dal lobo frontale e dal tubercolo olfattivo formano un terzo e a volte un quarto fascio i quali pure si portano nello striato per fondersi coi due precedenti. Tutti i fasci descritti vengono dunque a costituire nella testa del nucleo caudato un unico e grosso fascio che è il braccio frontale della commessura bianca anteriore.

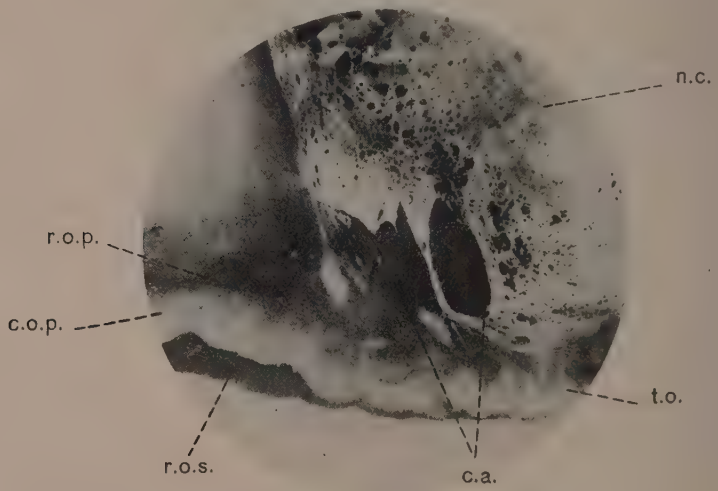


Fig. 2. – Sezione frontale della parte anteriore del tubercolo olfattivo di cane.
t. o., tubercolo olfattivo. Le altre indicazioni come nella fig. 1. (microfot. di preparato ottenuto col metodo Bielschowsky-Palumbi; 8 ×).

Lo studio delle sezioni orizzontali conferma quanto ho potuto ricostruire dalla osservazione delle sezioni frontali e precisamente che dalla radiazione olfattiva profonda si staccano tre o quattro fasci che diretti indietro e medialmente entrano nella testa del nucleo caudato e fondendosi fra loro in un fascio unico e compatto formano il braccio frontale della commessura bianca anteriore.

Il braccio frontale della commessura anteriore decorre nello striato verso l'indietro, verso l'alto e medialmente; d'altra parte non attraversa semplicemente questa formazione, ma lungo tutto il suo decorso scambia con la sostanza grigia dello striato fibre singole in gran numero ed anche fascetti di fibre, cosicché si può affermare quanto già era stato detto, che la commessura bianca è tra l'altro formazione commessurale fra lo striato di un lato e quello del lato opposto.

Osservando le sezioni frontali si vede che ad un certo livello, nello spessore dello striato, subito sopra alla commessura anteriore cominciano a comparire fascetti di fibre prima rari ed esigui poi, man mano che si procede all'indietro più spessi e voluminosi i quali, diretti antero-posteriormente, vengono a sepimentare il corpo striato; evidentemente si tratta del braccio anteriore della capsula interna che si interpone fra il nucleo lenticolare e il nucleo caudato (la cui testa è qui più ristretta che non in avanti ove non arriva il nucleo lenticolare).

Orbene, la commessura bianca anteriore, situata immediatamente sotto alla capsula e con rapporto di vicinanza maggiore per il nucleo caudato che

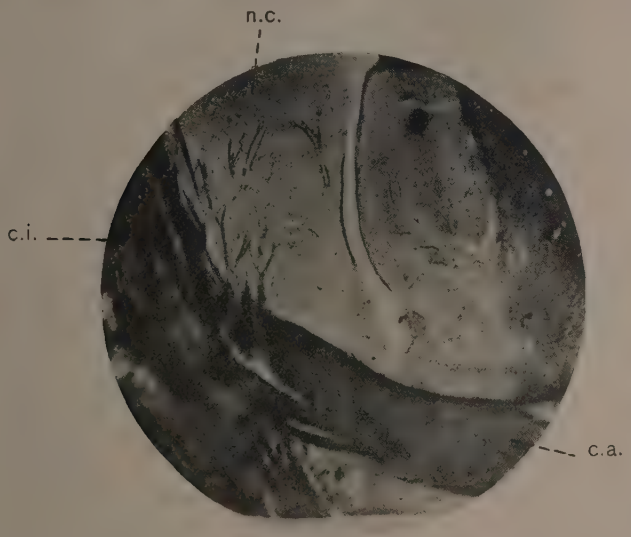


Fig. 3. – Sezione orizzontale dimostrante scambio di fasci fra commessura bianca anteriore e capsula interna di cane.

c. i., capsula interna. Le altre indicazioni come nella fig. 1. (Microfot. di preparato ottenuto col metodo Bielschowsky-Palumbi; $\frac{1}{10}$ ×).

per il lenticolare prende posizione in quella sostanza grigia che in basso, sotto alla capsula interna, unisce a guisa di ponte le due parti del corpo striato. Questa situazione sottocapsulare è mantenuta dalla commessura anteriore per lungo tratto, giacché decorrendo dall'avanti all'indietro e in senso latero-mediale è parallela al braccio anteriore della capsula interna.

Voglio far notare come i rapporti fra commessura bianca anteriore e capsula interna non si limitino a semplici rapporti topografici di contiguità ma le due formazioni sono fra loro ampiamente connesse per notevole scambio di grossi fasci (fig. 3); per la qual cosa io credo giustificato ammettere che, per mezzo della commessura bianca anteriore, si stabiliscono rapporti fra la capsula interna di un lato e quella del lato opposto.

Zoologia. — «*Uncinaria thapari*» *n. sp. parassita dell'*«*Ailurus fulgens*» (*). Nota di Ettore Biocca e Ermanno Bronzini, presentata (**) dal Corrisp. V. Puntoni.

Dall'intestino tenue di un *Ailurus fulgens* (*Ursidae*: *Ailurinae*) morto nel Giardino Zoologico di Roma il 7 luglio 1952 poco dopo il suo arrivo dall'India, abbiamo isolato alcuni esemplari (3 maschi e 6 femmine) di una *Uncinaria* che, per i caratteri morfologici riteniamo essere specie nuova e per la quale proponiamo il nome di *Uncinaria thapari* n. sp. per onorare l'elmintologo indiano G.S. Thapar.

Durante il suo breve soggiorno nel Giardino Zoologico di Roma, l'*Ailurus* era stato tenuto sempre in una gabbia adibita esclusivamente per questo animale.

Descrizione della *Uncinaria thapari* n. sp. – La specie possiede i caratteri tipici del genere *Uncinaria*. Corpo sottile, biancastro, con estremità anteriore rivolta dorsalmente, cuticola finemente striata. Maschio più piccolo della femmina. Capsula boccale leggermente ad imbuto (figg. 1 e 2); l'apertura boccale è delimitata ventralmente da due robuste lamine curve nel loro margine libero e, dorsalmente, da una larga incisura dovuta ad un ispessi-

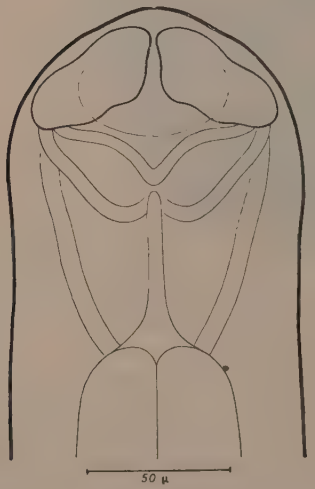


Fig. 1. – *Uncinaria thapari* n. sp. Estremità anteriore vista dorsalmente.

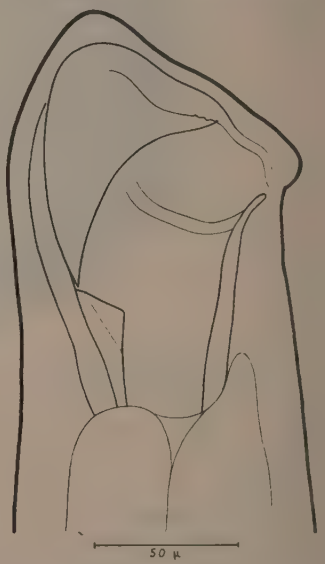


Fig. 2. – *Uncinaria thapari* n. sp. Estremità anteriore vista lateralmente.

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Parassitologia dell'Università di Roma.
(**) Nella seduta del 13 giugno 1953.

mento della capsula boccale. La cuticola ricopre l'incisura dorsale e parte dalle lamine ventrali restringendo così l'apertura boccale. In corrispondenza del punto più profondo della incisura dorsale si diparte verso l'esofago un robusto ispessimento capsulare, mentre un lieve ispessimento capsulare disegna una curva nella parete laterale della capsula stessa. Dalla superficie ventrale della capsula si proiettano verso l'interno della cavità, due robuste lancette triangolari. L'esofago, rigonfio nella sua porzione posteriore, è circondato dall'anello esofageo nella seconda parte della metà anteriore; il poro escretore e le papille cervicali si trovano, in genere, leggermente in dietro alla metà dell'esofago, senza però avere una posizione assolutamente costante.

Maschio: *Spicoli* relativamente robusti, chiaramente dilatati nella loro estremità prossimale. *Gubernaculum* leggermente allargato alla estremità

Fig. 3. – *Uncinaria thapari* n. sp. Borsa caudale vista lateralmente.

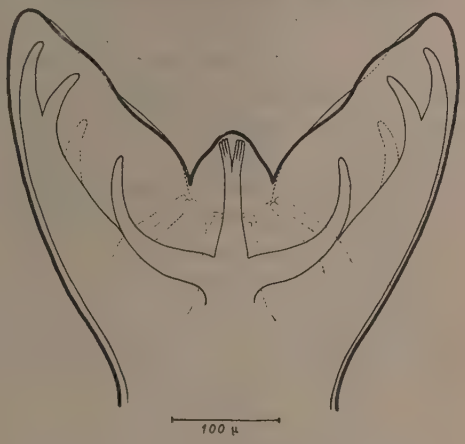


Fig. 4. – *Uncinaria thapari* n. sp. Borsa caudale vista dorsalmente.

prossimale, termina distalmente in forma appuntita. *Cono genitale*, bene sviluppato e prominente, finisce in una complessa formazione quadrangolare mammellonata agli angoli. *Papille preborsali* presenti. *Borsa caudale* (figg. 3 e 4) con lobo dorsale separato dai due lobi laterali. La costola dorsale, nel suo quinto distale, si divide in due ramificazioni tridigitate di modeste dimensioni. Le costole laterodorsali, robuste, nascono vicino all'origine della costola dorsale e penetrano nei lobi laterali terminando a notevole distanza dal bordo della capsula stessa. Le tre costole laterali hanno una origine comune relativamente corta. Le costole posterolaterale e mediolaterale, di dimensioni molto maggiori dell'esternolaterale, sono ben separate tra loro, notevolmente lunghe, larghe alla base, si restringono gradatamente; nel quarto terminale divengono molto affilate ed assumono una direzione dorsale, formando così un lieve angolo con la parte prossimale delle costole stesse. La deviazione dorsale sembra essere più evidente nella costola posterolaterale il che rende lievemente divergente l'ultima parte del percorso

delle due costole. La costola esternolaterale (larga circa la metà della costola mediolaterale e molto più corta delle altre due costole laterali) è diretta ventralmente, cioè in direzione opposta alle altre due costole laterali e termina a notevole distanza dal margine della borsa caudale. La distanza che separa le papille terminali della costola mediolaterale e posterolaterale è chiaramente minore della distanza che separa le papille della mediolaterale e esternolaterale. Le costole ventrali nascono da un tronco comune, decorrono parallele e ravvicinate raggiungendo quasi il margine della borsa, che sembra mostrare una lieve rientranza in corrispondenza della estremità delle costole ventrali.

Femmina: Apertura vulvare in prossimità dell'unione del terzo medio col terzo posteriore del corpo. Ano a breve distanza dall'estremità posteriore. Coda irregolarmente conica, in genere leggermente appiattita nel senso dorso-ventrale, terminante con una punta.

DIMENSIONI. – *Maschio* (esemplare preso come tipo): lunghezza mm 6; larghezza massima mm 0,230; strie della cuticula: distanza μ 4,1; esofago: lunghezza mm 0,620; anello nervoso: distanza del centro dell'anello nervoso dall'estremità anteriore del corpo mm 0,355; poro escretore: distanza dall'estremità anteriore del corpo mm 0,520; papille cervicali: distanza dalla estremità anteriore del corpo mm 0,520; spicoli: mm 0,640; gubernaculum mm 0,082 × mm 0,024.

Femmina (esemplare preso come tipo): lunghezza mm 8,1; larghezza massima mm 0,245; strie della cuticola: distanza μ 4,6; esofago: lunghezza mm 0,650; anello nervoso: distanza del centro dell'anello nervoso dall'estremità anteriore del corpo mm 0,375; poro escretore: distanza dall'estremità anteriore del corpo mm 0,580; papille cervicali: distanza dalla estremità anteriore del corpo mm 0,575; vulva: distanza dall'estremità posteriore del corpo mm 2,6; ano: distanza dall'estremità posteriore del corpo mm 0,205.

Uova (nell'utero): μ 68 × μ 40 ; μ 70 × μ 40 ; μ 72 × μ 41,5 ; μ 76 × μ 43,5 ; μ 78 × μ 44.

Gli altri esemplari hanno presentato le seguenti oscillazioni nei principali caratteri: *maschi* (2 esemplari): lunghezza mm 6–6,2; larghezza massima mm 0,210–0,235; esofago: lunghezza mm 0,580–0,630; spicoli mm 0,625–0,645;

femmine (5 esemplari): lunghezza mm 7–8,2; larghezza massima mm 0,210–0,260; esofago: lunghezza mm 0,620–0,725; ano: distanza dalla estremità posteriore mm 0,170–0,210.

Habitat: intestino tenue.

Ospite: *Ailurus fulgens*.

Provenienza: India (località non conosciuta).

Esemplari tipo depositati presso l'Istituto di Parassitologia dell'Università di Roma.

La nuova specie ha caratteri morfologici che permettono una facile differenziazione con le altre specie del genere *Uncinaria*, le quali, eliminando quelle insufficientemente descritte e le sinonimie, possono essere ridotte

(pur con qualche riserva) alle *Uncinaria carinii*, *catholica*, *criniformis*, *felidis*, *hamiltoni*, *longespiculum*, *lucasi*, *stenocephala*

La specie che, tra tutte, si avvicina maggiormente, per i caratteri morfologici alla *Uncinaria thapari* è la *Uncinaria criniformis* del tasso (*Meles meles*).

(In base ad osservazioni personali di Biocca non concordiamo con la opinione di Baylis [1] che l'*Uncinaria* del tasso e quella del cane siano la stessa specie, ma consideriamo l'*Uncinaria criniformis*, specie distinta e chiaramente differenziabile dall'*Uncinaria stenocephala*).

Le differenze morfologiche tra l'*Uncinaria thapari* e *criniformis* esistono soprattutto nell'estremità anteriore e nella borsa del maschio. La *Uncinaria criniformis* ha l'incisura dorsale nella capsula boccale più stretta e profonda; le costole laterali della borsa del maschio sono più tozze e corte e si dipartono da una origine comune più lunga rispetto alle dimensioni delle costole stesse. Il decorso di queste costole non corrisponde tra queste due specie; nella *U. criniformis* le papille terminali della costola posterolaterale e mediolaterale sono più ravvicinate, mentre la papilla terminale della esternolaterale si allontana maggiormente dalla papilla della mediolaterale che non nell'altra specie.

La costola esternolaterale infine, sebbene più piccola delle altre due è nell'*U. criniformis* relativamente più grande della corrispondente costola della *Uncinaria thapari*.

Fisiologia vegetale. — *Piridinnucleotidi in germogli eziolati di Avena* (*). Nota di LETIZIA RIGGIO BEVILACQUA, presentata (**) dal Corrisp. E. REMOTTI.

I piridinnucleotidi (PN) – difosfopiridinnucleotide o coenzima I (DPN) e trifosfopiridinnucleotide o coenzima II (TPN) – sono, come noto, elementi essenziali del meccanismo respiratorio degli animali, in quanto coenzimi della deidrogenazione dei diversi substrati, che si formano dalla progressiva degradazione della molecola del glucosio. La identità sostanziale con cui questi processi si presentano nelle piante, ne fa presumere verosimile la presenza anche nei tessuti vegetali. In tal senso parla il fatto che da vegetali diversi – in particolar modo germe di grano – si possono isolare apoenzimi deidrogenanti, i quali si manifestano attivi in vitro, ove vengano ad essi aggiunti DPN e TPN di varia provenienza (lieviti, globuli rossi di cavallo, ecc.) [1,2,3,4,5].

(1) H. A. BAYLIS, *A new species of nematode genus Uncinaria from a sea lion, with some observations on related species*. « Parasitol. », *25*, 308 (1933).

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto Botanico « Hanbury » dell'Università di Genova.

(**) Nella seduta del 13 giugno 1953.

(1) B. ANDERSON, « Z. physiol. Chem. ». *225*, 57 (1934).

(2) E. ADLER e M. SREENIVASAYA, *249*, 24 (1937).

(3) D. R. GODDARD, « Am. J. Botany », *31*, 270 (1944).

(4) L. M. KRAEMER, E. E. CONN e B. VENNESLAND, « J. Biol. Chem. », *188*, 583 (1951).

(5) E. R. WAYGOOD, « Biol. Abstr. », *24*, 25, 089 (1950).

In realtà però, dallo studio della letteratura, in singolare contrasto con l'importanza che i PN devono avere nell'economia della pianta, sia in rapporto ai dati sopra citati sia in rapporto ad altri che vedremo tra breve, non emerge se non raramente e in modo del tutto fuggevole e occasionale una diretta indicazione della loro presenza, particolarmente per quanto concerne le piante verdi autotrofe.

Di fatto, praticamente solo nei lieviti, il coenzima della fermentazione alcoolica, messo già in evidenza da Harden e Joung [6] sin dal 1904, ha potuto essere successivamente identificato come DPN [7] e con procedimenti diversi estratto e purificato [8,9,10].

Molto scarsi sono invece i dati concernenti le piante verdi. Di un cofermento della fermentazione alcoolica in piselli germinanti diede (1918) un fuggevole cenno Meyerhof [11], senza che si potesse allora stabilirne la effettiva identità. L'unico dato esplicito, di cui peraltro non abbiamo potuto vedere che una citazione indiretta, è quello di Reuter e collaboratori [12], da cui risulta per i tessuti di stellaria, trifoglio e patata un contenuto di TPN intorno a 1–8 γ e tracce di DPN per g di tessuto fresco. Assai indiretto è ancora il reperto di Albaum e collaboratori [13] i quali, eseguendo un frazionamento del fosforo acidosolubile di *Euglena gracilis*, ne individuano una frazione, calcolabile a circa il 5 ‰, appartenente al coenzima I.

L'importanza di una ricerca che miri a definire la effettiva presenza di questi coenzimi nelle piante e i loro rapporti di concentrazione nei diversi tessuti e in condizioni diverse, appare tanto più evidente dinnanzi a recentissime ricerche (Tolmach e Gaffron; e Vishniac) relative alla possibilità di potenziare la reazione di Hill dei cloroplasti isolati quando, in sostituzione dei primitivi accettori di H (sali ferrici, p benzochinone, 2 6–diclorofenoloindofenolo), venga aggiunta al sistema *in vitro*, insieme ad un adeguato apoenzima e al relativo substrato, una delle solite preparazioni di DPN e TPN [14,15]. Questi infatti dànno luogo a due reazioni accoppiate, funzionando, ad un tempo, da accettori per l'H, derivante dalla fotolisi dell'acqua, e da donatori di esso ad opportuno substrato [16].

(6) A. Harden e W. J. Young, « J. Physiol. », *32* (1904). Proc. of November.

(7) H. Von Euler, H. Albers e F. Schlenk, « Z. physiol. Chem. », *246*, 64 (1937).

(8) O. Meyerhof e P. Ohlmeyer, « Biochem. Z. », *290*, 334 (1937).

(9) P. Ohlmeyer, « Biochem. Z. », *297*, 66 (1937).

(10) F. Schlenk, « J. Biol. Chem. », *146*, 619 (1942).

(11) O. Meyerhof, « Z. physiol. Chem. », *102*, 1 (1918).

(12) W. Reuther, e coll. citato da Bennet-Clark, « Ann. Rew. Biochem. », *18*, 639 (1949).

(13) H. G. Albaum, A. Schatz, S. H. Hutner, A. Hirshseld, « Arch. Biochem », *29*, 210 (1950).

(14) L. S. Tolmach e H. Gaffron, « Fed. Proc. », *10*, 259 (1951).

(15) W. Vishniac, « Fed. Proc. », *10*, 265 (1951).

(16) Secondo Vishniac il meccanismo della reazione col TPN può schematizzarsi nelle seguenti reazioni:

$$1^{\circ}\ 2\,H_2O + TPN \xrightarrow{\text{luce}} 2\,TPNH_2 + O_2$$

$$2^{\circ}\ TPNH_2 + CO_2 + \text{piruvato} \longrightarrow TPN + \text{malato (catalizzata dall'enzima malico (estratto da fegato di piccione).}$$

Dal che si potrebbe concludere (Vishniac) per un analogo intervento del TPN come trasmettitore anche nel meccanismo fotosintetico in vivo.

Abbiamo quindi ritenuto del massimo interesse avviare una serie di ricerche rivolte – come abbiamo più sopra esposto – a determinare l'effettiva presenza dei coenzimi piridinici, che da questo complesso di dati assumono l'importanza di componenti centrali dei processi metabolici delle cellule vegetali, nelle piante superiori onde su questa base svilupparne l'ulteriore indagine fisiologica.

Dosaggio dei PN. – Avviando le ricerche in questo campo, avevamo cominciato con l'applicare il metodo di Robinson e collaboratori [17], uno dei più recentemente introdotti e dei più sensibili, usato con successo, oltreché sui tessuti animali, anche sui funghi [18]. Senonché, la sua applicazione agli estratti tricloroacetici di tessuti di vegetali superiori ha presentato notevoli difficoltà, che ci hanno lungamente arrestato nello sviluppo delle ricerche, imponendoci un lungo lavoro di discriminazione delle cause di errore. Poiché il metodo di Robinson è basato sulla determinazione della fluorescenza, che si ottiene quando i PN si condensano con acetone in ambiente alcalino, un primo ostacolo era rappresentato dalla presenza, negli estratti tricloroacetici, di una fluorescenza propria del tessuto, che interferisce con quella specifica indotta dalla reazione (ed è talora tale da superare già di per se i limiti di intensità entro i quali la lettura è valida, rendendo impossibile il dosaggio). Un secondo ostacolo è costituito dalla presenza di sostanze che esaltano od inibiscono la fluorescenza specifica, entro limiti molto più vasti di quanto succeda per i tessuti animali. Quanto sopra esposto ha implicato un particolare lavoro di adattamento del metodo ad ogni singolo tessuto preso in considerazione. Per quel che riguarda i germogli eziolati di Avena siamo riusciti ad eliminare le difficoltà presentatesi, precipitando i nucleotidi adeninici dell'estratto tricloroacetico (ivi compresi quindi DPN e TPN) secondo il metodo di Rapaport [19], ridisciogliendoli in HCl 0,2 N e facendo uso nella determinazione di uno standard interno di TPN, come è del resto del metodo originale. La precipitazione secondo Rapaport ha anche il vantaggio di eliminare, se presenti, sostanze quali il nucleoside e il nucleotide della nicotinamide e la N_1-metilnicotinamide che dànno la stessa reazione. Il metodo di Robinson non permette di distinguere tra DPN e TPN, ma ci dà un valore globale di questi 2 PN, che sono quelli aventi valore di coenzima. La necessità del calcolo costringe quindi ad esprimere i valori di fluorescenza ottenuti o come DPN o come TPN: abbiamo scelto il TPN, senza pregiudicare con questa la natura dei PN presenti.

Ci proponiamo di discutere minutamente il metodo usato in un lavoro di prossima pubblicazione.

(17) J. ROBINSON, N. LEVITAS, F. ROSEN e W. A. PERLZWEIG, « J. Biol. Chem. », *170*, 653 (1947).

(18) N. O. KAPLAN, S. P. COLOWICK e S. NASON, « J. Biol. Chem. », *191*, 473 (1951).

(19) S. RAPAPORT, G. M. GUEST, « J. Biol. Chem. », *138*, 269 (1941).

Materiale. – Per questo primo gruppo di determinazioni abbiamo scelto materiale che fosse dotato di alta attività respiratoria, in quanto presumibilmente provvisto di una elevata carica enzimatica, e ci siamo perciò rivolti a giovani germogli. In particolare ci siamo serviti dell'avena, per la quale, se nulla sappiamo della presenza o meno dei coenzimi in questione, possediamo però dati [20] da cui risulta un tenore relativamente elevato di acido nicotinico totale.

Abbiamo, d'altro lato, iniziato con plantule cresciute al buio e quindi eziolate, allo scopo di dissociare, in queste prime ricerche, le due attività fisiologiche, in cui i PN appaiono impegnati, isolando la respirazione, e ponendoci così su di un piano paragonabile a quello dei lieviti. Con ciò, non ci nascondiamo la difficoltà dell'uso di tessuti che si trovano in condizioni non normali, ma questa difficoltà sarà superata dalla valutazione comparativa con i dati che emergeranno dallo svolgimento successivo delle ricerche.

Dell'avena abbiamo usata una varietà (Victory) già largamente usata nell'Istituto e dimostratasi in precedenti esperienze notevolmente omogenea sia per l'andamento dello sviluppo sia per altre caratteristiche.

I semi – Avena Sativa L. (varietà Victory) – venivano messi a germinare in capsule Petri, su di uno strato di vermiculite, tenuto umido con acqua di fonte. Le capsule erano situate in termostato buio, alla temperatura di circa 22 °C.

TABELLA I.

Contenuto di PN *in germogli eziolati di Avena Sativa L. (varietà Victory)*

(γ per g di peso fresco)

Lunghezza germoglio mm	PN γ
42	36
59	31
60*	30
70	20
100	13

* Inizia l'emergenza della fogliolina dal coleoptile.

(20) I. MAC VEIGH, « Bull. Torrey Botan. Club », 71, 438 (1944).

A momenti successivi dello sviluppo abbiamo proceduto a una serie di prelievi, di venti piante ciascuno, in modo da seguire le eventuali variazioni nel corso della crescita. Si isolavano per le determinazioni i soli germogli (coleoptile e gemma interna) che, rapidamente pesati, venivano pestati in mortaio con acido tricloroacetico (10 %) e solfato cerico (20 mg, per ossidare i PN ridotti). Dopo centrifugazione il sopranatante veniva trattato secondo la tecnica di Rapaport, ottenendosi un precipitato che, separato con nuova centrifugazione e disciolto in HCl 0,2 N, veniva sottoposto al dosaggio di Robinson.

Risultati sperimentali. – I valori che riferiamo per i PN sono espressi come TPN. Lo stadio di sviluppo è dato dalla lunghezza totale dal germoglio. Abbiamo calcolato – e riportiamo nelle due tabelle – il contenuto sia relativo, riferendosi al peso fresco, sia quello totale per ogni singolo germoglio.

TABELLA II.

Contenuto di PN *in germogli eziolati di Avena Sativa L. (varietà Victory)*

(Valori espressi come TPN)

Lunghezza germoglio mm	PN contenuti in ciascun germoglio γ
42	2,6
60	2
70	1,6
100	1,3

DISCUSSIONE DEI RISULTATI. – I dati da noi ottenuti dimostrano l'effettiva presenza dei PN nei germogli eziolati di Avena, e consentono quindi di riportare in vivo gli schemi di partecipazione di questi complessi, che vengono suggeriti dalle già citate esperienze in vitro. In altri termini, anche nelle piante, le reazioni di deidrogenazione respiratoria - di cui sono stati isolati numerosi apoenzimi – devono svolgersi con il concorso degli stessi coenzimi adeninpiridinici, noti per gli animali ed i lieviti. D'altra parte, la effettiva presenza dei PN nelle piante autotrofe, sulla scorta dei dati di Vishniac, ci pone dinanzi a quelli che devono essere gli strumenti della opposta catena ascendente di reazioni, nel corso della sintesi glucidica.

I valori - riferiti, come sono, al peso fresco - appaiono assai bassi rispetto a quelli noti per i tessuti animali e per i lieviti; ma, naturalmente, non sono

con essi completamente comparabili, tenuto conto dell'elevato tenore di acqua vacuolare, caratteristica dei tessuti delle piante. D'altra parte, anche nei confronti con il peso secco, il rapporto ponderale viene spostato dalla presenza della membrana glucidica.

I valori ottenuti si riferiscono al DPN e al TPN estraibili con acido tricloroacetico a freddo: non abbiamo alcun dato per affermare che siano in essi compresi tutti i PN presenti. Alcune ricerche [21] sui cereali suggeriscono il dubbio che non tutto l'acido nicotinico sia facilmente solubile, ma che una parte di esso si trovi fissato in un complesso, da cui sia liberabile solo dopo prolungata idrolisi. Naturalmente, una tale eventualità deve renderci ben cauti nella valutazione delle forme sotto cui, non solo l'acido nicotinico, ma anche i più importanti composti che lo contengono, possono trovarsi nel citoplasma. Ci troviamo qui dinanzi a un problema d'importanza assai generale nell'economia delle cellule, nelle quali l'attività fisiologica dei vari componenti attivi (coenzimi, ormoni, ecc.) deve largamente dipendere dalla loro possibilità di legarsi in legami di varia stabilità con substrati proteici, che ne potenzino l'efficacia funzionale, o, viceversa, la mascherino, e, conseguentemente, dal diverso equilibrio tra la forma libera e quella legata. Problema, questo, che si presenta – come vedremo tra breve – dai nostri stessi dati.

Questi mettono in evidenza una diminuzione progressiva del contenuto di PN nei germogli eziolati, diminuzione sia percentuale, sia del contenuto globale di ogni singolo germoglio. Una tale diminuzione implica una serie di problemi fisiologici, che ci ripromettiamo di analizzare nello sviluppo delle ricerche. Prescindiamo dalla diminuzione percentuale, la quale, per essere riferita al peso fresco, in una fase d'intensa distensione cellulare, è dovuta, almeno in parte, all'aumento di acqua e di cellulosa. Assumendo in seguito, come base di riferimento, l'azoto proteico, emergerà in che misura tale diminuzione sia apparente e in che misura reale; e, nel secondo caso, quanto possa venir attribuita al progressivo attenuarsi della respirazione col progredire dell'età.

Più complesso il problema della diminuzione globale dei PN. Dopo quanto abbiamo detto circa la eventualità che una parte dei PN possano mascherarsi sotto forme legate, occorre anche su questo punto chiarire, con ulteriori indagini, il significato del fenomeno. Bisogna naturalmente tener presente che si tratta, in questo caso, di germogli eziolati, esposti quindi a un progressivo esaurimento del materiale energetico e plastico, esaurimento praticamente completo a circa 100 mm di lunghezza. Ammettendo anche per i PN, come per i nucleotidi degli acidi nucleici [22], un continuo processo di rinnovamento, non è improbabile che lo stato di inanizione in cui si vengono a trovare le plantule rappresenti un ostacolo alla loro sintesi

(21) E. Kodicek, « J. Biochem. », *34*, 712 (1940).

(22) G. Boswort Brown, M. L. Peterman e S. S. Furst, «J. Biol. Chem. », *174*, 1043 (1948).

che, nei tessuti animali, è indubbiamente legata alla presenza di un substrato ossidabile [23,24]. Nel caso particolare delle nostre plantule, potrebbe anche trattarsi della mancata sintesi di questo o quello dei componenti della complessa molecola dei PN, forse del più tipico, la nicotinamide: si sa infatti che la sintesi dell'acido nicotinico, da materiale contenuto nell'endosperma o nei cotiledoni, probabilmente triptofano o acido 3–idrossiantranilico [25], è localizzata nell'embrione e richiede illuminazione [26]. Quindi proprio la mancanza di luce, in quanto determinante la incapacità di sintesi dell'acido nicotinico, potrebbe essere responsabile della diminuzione di PN da noi osservata.

Tutti questi problemi potranno trovare elementi più esaurienti di interpretazione solo dall'ulteriore sviluppo delle ricerche. I dati da noi riportati interessano, per il momento, in quanto documentazione diretta della effettiva presenza dei PN nelle piante superiori, e quindi della convergenza, anche in tale ambito, dei meccanismi biochimici di queste con quelli degli animali; documentazione che ha potuto essere raggiunta solo col superamento di particolari difficoltà inerenti alla loro configurazione chimica e con l'introduzione quindi di opportune modifiche ai metodi ormai standardizzati per i tessuti animali.

Fisiologia vegetale. — *Ulteriori ricerche sul rapporto tra potenziale metabolico e potere inibente dei tessuti. Variazione dell'effetto inibente in seguito a disturbi correlativi* [*]. Nota di ELVIRA BIANCHERI, presentata [**] dal Corrisp. E. REMOTTI.

Ricerche precedenti di Zanoni [1] hanno dimostrato con tessuti vegetali diversi un potere inibitore, la cui efficienza appare in diretta relazione con l'intensità metabolica del tessuto stesso. Le ricerche in questione utilizzavano materiale assai disparato (foglie, stami, tuberi e semi), confrontando per ciascuno momenti differenti di età o di maturazione. In tutti, il declinare del ritmo metabolico si accompagnava ad un attenuarsi dell'effetto inibitore, esplicato sulla crescita in lunghezza delle giovani radici di grano germinante, assunte come test.

Allo scopo di ulteriormente illustrare una tale relazione, la cui importanza nell'economia della pianta può investire tutta la sua disciplina di cre-

(23) L. RIGGIO BEVILACQUA, « Boll. Soc. It. Biol. Sperim. », *26*, 1464 (1950).
(24) L. RIGGIO BEVILACQUA, « Boll. Soc. It. Biol. Sperim. », *27*, 434 (1951).
(25) A. NASON, « Am. J. Bot. », *37*, 612 (1950).
(26) T. TERROINE, « Arch. Sci. Physiol. », *1*, 117 (1947).
(*) Lavoro eseguito nell'Istituto Botanico « Hanbury » dell'Università di Genova.
(**) Nella seduta del 13 giugno 1953.
(1) « Boll. Soc. Biol. sper. », 1950 (2 note); « Atti Accad. Ligustica Sc. Lett. », 1950.

scita, ho ripreso queste ricerche servendomi di nuovo materiale, nel quale le differenze tra tessuti omologhi fossero riferibili, anzichè a differenze di sviluppo, a livelli diversi di attività per mutati rapporti correlativi.

È noto, infatti, da ricerche ancora di Zanoni [2], come l'ablazione dei centri germinativi nel fiore, o l'asportazione dell'embrione nel seme, determini, rispettivamente, sui tessuti corollini e sui cotiledoni, tutto un vasto complesso di turbe, espresse, in particolare per le corolle, da diminuzione di dispersità colloidale, da abbassamento del potere di retenzione idrica, da riduzione dell'N proteico, da modificazioni delle attività enzimatiche, aspetti tutti di una depressione del potenziale metabolico del tessuto, la cui risonanza diretta è fornita dall'abbassarsi del livello respiratorio, quale è nettamente osservabile sui fiori come sui semi operati. Ci troviamo cioè, tra castrati o disembrionati e controlli, dinanzi a due complessi tissulari coetanei e in identica fase del ciclo biologico, dove le differenze si polarizzano intorno a questa variazione di ricambio indotta dalla perturbata correlazione.

Materiale e tecnica. – Per le ricerche abbiamo utilizzato fiori maschili di *Cucurbita pepo* var. *cucurbitella* e semi di *Phaseolus vulgaris*.

I primi venivano castrati nello stadio in cui le antere, da verdi, cominciano a presentare il primo segno di ingiallimento, cioè all'inizio del declino del tappeto (lunghezza media del boccio mm 36), che è poi il momento più arretrato in cui si possa intervenire senza compromettere l'ulteriore sviluppo, mentre operazioni più precoci si risolvono in arresto e avvizzimento del boccio. Sui controlli, si praticava una incisione longitudinale analoga, con ogni precauzione per evitare di ledere le antere. Il prelevamento si faceva tre giorni dopo, intervallo sufficiente a che le corolle risentano del disturbo correlativo, già visibilmente tradotto nelle dimensioni spiccatamente minori in confronto dei normali.

Quanto ai semi (*Phaseolus vulgaris*), dopo una preventiva imbibizione che facilitasse il successivo intervento, si procedeva, asportato il tegumento, alla separazione di uno dei due cotiledoni, rimanendo l'altro normalmente attaccato all'embrione. Cotiledoni embrionati e disembrionati erano posti in camera umida per tre giorni, togliendosi poi dai primi l'embrione al momento del prelievo.

Delle corolle come dei cotiledoni, veniva quindi preparato l'estratto, triturando il tessuto in mortaio con sabbia di quarzo, addizionando acqua distillata. Dopo centrifugazione, il sopranatante si incorporava all'agar, destinato a costituire il substrato, su cui si dovevano disporre le cariossidi di grano (var. mentana) che fornivano il test.

Le concentrazioni normalmente usate, per gli estratti nell'agar, sono state del 12 % circa per gli zucchini, del 10-8 % per i fagioli, come quelle

(2) Vari lavori in « Boll. Lab. Anat. Comp. Zool. Università Genova », vol. XII, 1932; XIII, 1933; XIV, 1934; XXI, 1942; « Archivio Botanico », X, 1934; XIII, 1937; in « Boll. Soc. Biol. sperim. », XXV, 1949; « Atti Accad. Ligustica », 1952.

che, da vari tentativi preliminari, sono apparse sufficienti a manifestarci un effetto differente sul grano, senza che l'azione inibitrice si traducesse in un grave disturbo di crescita per le radici.

Le cariossidi erano distribuite, in numero e densità eguali, tra le capsule di saggio (agar + estratto) e di controllo (agar semplice, diluito di una quantità di acqua uguale al volume dell'estratto nei saggi), dopo che un preventivo soggiorno in ambiente umido ne avesse avviato il movimento germinativo, iniziando la fuoruscita delle radichette.

Per la valutazione dell'effetto inibente, ci siamo serviti delle misure lineari di lunghezza (radici e coleoptili), nonché dei valori del peso fresco e del peso secco. Onde avere una più esatta comparazione tra queste varie serie di dati, alcune delle esperienze con i semi sono state eseguite in doppio, dallo stesso lotto di grano germinante e con i medesimi estratti, disponendo una duplice serie di capsule, in modo di poter, su materiale perfettamente omogeneo, eseguire, rispettivamente, le determinazioni delle lunghezze e quelle dei pesi.

In un secondo tempo, a meglio definire i rapporti tra azione inibente e assunzione idrica dei tessuti test, abbiamo cercato di determinare l'assorbimento percentuale di acqua, prelevando preventivamente, dal lotto di semi imbibiti, una quota iniziale su cui determinavamo la proporzione acqua/peso secco, e ripetendo successivamente la stessa determinazione alla fine dell'esperienza, per l'intera piantina (radici + coleoptile + endosperma), in modo da conoscere la quantità di acqua totale fissata nelle tre serie di culture.

RISULTATI. – Riassumiamo per brevità in una tabella sintetica le medie dei dati ottenuti tra esperienze omologabili, avvertendo che esse risultano da valori in tutte concordi come senso.

Esperienze eseguite con estratti di corolle (« *Cucurbita pepo* » var. « *cucurbitella* »).

		Normali	Castrati	Controlli
Lunghezze medie	Rad.	9,68	15,52	39,98
	Col.	23,30	30,63	38.47
Lunghezze medie in % del controllo	Rad.	23,07	35,75	100
	Col.	61,12	74,70	100
Inibizione di allungamento in % del controllo	Rad.	76,84	64,16	100
	Col.	38,84	25,38	100

Esperienze eseguite con estratti di cotiledoni («Phaseolus vulgaris»).

		Embrionati	Disembrionati	Controlli
Lunghezze medie	Rad.	8,6	11,17	37,63
	Col.	26,46	31,80	37,40
Lunghezze medie in % del controllo	Rad.	23,18	29,47	100
	Col.	70,68	85,44	100
Inibizione di allungamento in % del controllo	Rad.	76,76	70,49	100
	Col.	29,41	14,49	100
Peso fresco	Rad.	501,74	746,23	2324,58
	Col.	1307,1	1952,48	2669,71
	End.	3297,45	3374,58	3457,47
Peso fresco in % del controllo	Rad.	21,58	32,10	100
	Col.	48,96	73,13	100
	End.	95,37	97,56	100
Pesco secco	Rad.	51,40	74,2	139,57
	Col.	138	197,91	239,67
	End.	1576,15	1550,85	1274,11
Peso secco in % del controllo	Rad.	36,83	53,16	100
	Col.	57,57	82,57	100
	End.	123,73	121,75	100

Dai valori sopra riportati risulta un andamento univoco con gli estratti dei semi e con quelli di corolle. E precisamente:

A) per le radici:

a) la lunghezza è, in presenza di estratti, sempre notevolmente inferiore a quella dei controlli, con un minimo per i tessuti normali, mentre, ad estratti di fiori castrati o di cotiledoni disembrionati, corrisponde un allungamento del complesso radicale, che maggiormente si approssima a quello su agar semplice;

b) nello stesso ordine delle dimensioni lineari si seriano i pesi freschi e i pesi secchi, con un minimo quindi per gli estratti normali ed un massimo per i controlli;

c) il *deficit* dei castrati rispetto ai controlli è, per il peso secco, assai meno pronunciato che per il peso fresco;

B) per i coleoptili:

l'andamento è qualitativamente simile a quello delle radici, ma con riduzione in genere notevolmente minore;

C) anche gli endospermi risentono delle modificazioni del sistema in quanto:

a) i pesi freschi aumentano nel solito ordine, da un minimo con gli estratti normali a un massimo con i controlli;

b) i pesi secchi si allineano secondo una seriazione inversa.

Da questo complesso di dati risulta quindi:

tutti gli estratti esercitano un forte potere inibente sulla crescita delle radichette come dei coleoptili;

gli estratti di fiori castrati e di cotiledoni disembrionati hanno azione notevolmente più debole degli estratti normali.

Dai valori ottenuti, in particolare, con estratti di cotiledoni, per i quali abbiamo serie più numerose e complete, risulta inoltre come l'effetto inibitore, rivelato dalle misure lineari, si esprima anche in una spiccata riduzione del peso, sia fresco sia secco. L'inibizione si esercita quindi su entrambi le componenti della crescita, l'assunzione di acqua come l'aumento della massa protoplasmatica; però si incide assai più sulla prima che sulla seconda, dato che le differenze dei pesi freschi, rispetto ai controlli, sono assai più pronunciate di quelle dei secchi, il che risulta in modo particolarmente evidente dai dati relativi all'assorbimento per cento di acqua:

	Normali	Castrati	Controlli
Esperienze eseguite con estratti di corolle (*Cucurbita pepo* var. *cucurbitella*)	82,9	93,4	117,9
	Embrionati	**Disembrionati**	**Controlli**
Esperienze eseguite con estratti di cotiledoni (*Phaseolus vulgaris*)	40,77	60,55	125,13

ovvero, quando si esprima il peso secco, anzichè in valore assoluto, come percentuale del peso fresco:

		Normali	Castrati	Controlli
Esperienze eseguite con estratti di corolle (*Cucurbita pepo* var. *cucurbitella*)	Rad.	9,24	8,54	7,05
	Col.	9,90	8,85	9,09
	End.	43,23	41,72	39,42
		Embrionati	**Disembrionati**	**Controlli**
Esperienze eseguite con estratti di cotiledoni (*Phaseolus vulgaris*)	Rad.	10,24	9,94	6,004
	Col.	10,55	10,13	8,97
	End.	47,79	45,95	36,84

L'effetto inibente presenta la sua massima espressione al livello del sistema radicale, ma ritorna anche nei coleoptili, benché con ampiezza minore. È possibile che, in parte, ciò possa essere conseguenza della diminuita superficie assorbente radicale. Peraltro, come è facilmente rilevabile, il rapporto di inibizione dei coleoptili, tra i semi trattati con estratti normali e quelli trattati con estratti di fiori castrati o di cotiledoni disembrio-

nati, è, in entrambi i casi, diverso dal rapporto di riduzione tra le radici per il medesimo trattamento. Indice che nella inibizione dei coleoptili intervengono fattori specifici inerenti a questi ultimi e non una semplice risonanza dell'attività radicale. A conferma, per quanto indiretta, di ciò sta anche il fatto che all'azione inibente degli estratti non si sottraggono neppure gli endospermi. Che, per quanto concerne questi ultimi, i pesi secchi assoluti seguano una seriazione inversa a quella delle radici e dei coleoptili, è dato facilmente comprensibile, ove si consideri che i pesi sono, nell'endosperma, funzione della entità del movimento delle riserve verso la giovane piantina in accrescimento: quanto meno pronunciato quest'ultimo, tanto più elevata sarà la riserva residua nel tessuto dell'albume. A ciò si aggiunga che col minor accrescimento dobbiamo verosimilmente collegare un minor consumo respiratorio, che inciderà nel medesimo senso sulla mobilitazione dei materiali. Significativo, viceversa, è l'andamento del peso fresco, per il quale si presenta la stessa seriazione offerta dalle radici e dai coleoptili, con un minimo per i semi, sottoposti alla massima inibizione degli estratti normali, ed un massimo per i controlli. In un sistema, dove non intervengono fenomeni di crescita, l'azione degli estratti tissulari si esprime ancora attraverso l'assorbimento idrico, in una misura che riappare funzione della loro attività metabolica [3].

Rimane così confermato, sia l'elevato potere inibitore dei tessuti, sia il rapporto diretto fra questa attività inibente e il potenziale metabolico, rapporto tanto più significativo, in quanto emerge da due tipi di tessuto (corolle e cotiledoni) a fisionomia fisiologica e costituzione biochimica profondamente diverse, nei quali l'unico tratto comune è costituito dalla attenuazione dell'attività funzionale, conseguente, come abbiamo ripetutamente detto, al disturbo correlativo indotto, rispettivamente, dalla castrazione o dall'asportazione delle gemme embrionali; e in quanto investe egualmente radici, coleoptili ed endospermi, con un andamento diverso da uno all'altro, in rapporto alle condizioni specifiche di ciascuno.

In particolare, questa comunanza di risposta ci permette di escludere che le differenze osservate siano semplicemente riferibili a diverso tenore auxinico degli estratti usati: fattore questo che potrà anche concorrere, nel caso delle radici, alla più o meno forte riduzione da esse subìta, data la loro estrema sensibilità all'ormone come fattore di inibizione [4], ma che non è altrettanto applicabile ai coleoptili e agli endospermi, la cui sensibilità è assai diversa; onde le nostre esperienze ci sembra possano portare un'ulteriore conferma all'ipotesi dell'esistenza, nei tessuti, di sostanze ad azione specificamente inibenti e la cui concentrazione appare (Zanoni) funzione dell'intensità metabolica dei tessuti stessi.

(3) Questo particolare dato è da porsi in relazione con altre ricerche in corso nell'Istituto e di prossima pubblicazione.

(4) Tale considerazione vale essenzialmente in relazione alle recenti ricerche, dalle quali sembra doversi ritenere che non le labilissime auxine *a* e *b* siano le effettive sostanze di crescita, estremamente sensibili alla luce e al complesso degli enzimi presenti negli estratti, quanto piuttosto l'acido indolacetico, assai più stabile e quindi più a lungo persistente.

Fisiologia. — *Le variazioni di tensione delle contrazioni muscolari dopo stimolazione tetanizzante* (*). Nota di FRANCESCO INFANTELLINA, presentata (**) dal Socio G. C. PUPILLI.

Il tetano provoca nel muscolo scheletrico modificazioni dello stato funzionale, le quali durano alcuni minuti e consistono in un aumento della tensione che il muscolo raggiunge nelle contrazioni provocate da stimoli isolati soprammassimali [Hofmann (1), Guttman, Horton e Wilber (2), Brown e von Euler (3)]: questo fenomeno è denominato potenziamento post-tetanico (ppt). Dopo tetani di lunga durata o di elevata frequenza, è stata osservata pure una riduzione della tensione delle contrazioni isolate, seguita o non da potenziamento [Rosenblueth e Morison (4), Guttman *et alii* (2), Feng (5), Brown e von Euler (3), Feng, Lee, Meng e Wang (6), Grumbach e Wilber (7), von Euler e Swank (8), Giachetti (9)].

Che il livello e la durata del potenziamento e della inibizione post-tetanici varino secondo le caratteristiche (frequenza o durata) della stimolazione tetanizzante, è stato osservato da diversi Autori [Guttman *et alii* (2), Brown e von Euler (3), Grumbach e Wilber (7), Giachetti (9)]; tali rapporti per altro appaiono poco chiari, a giudizio di Sandow e Karczmar (10), mancando una ricerca sistematica sull'argomento. Con le presenti ricerche sono state indagate le variazioni post-tetaniche della tensione muscolare e la loro durata, facendosi variare la durata del tetano e il voltaggio di carica dei condensatori utilizzati per ottenerlo.

Le ricerche sono state eseguite sul preparato N. ischiatico-M. gastrocnemio di *Rana temporaria*. Veniva stimolato il nervo ischiatico, per mezzo di elettrodi impolarizzabili Ag-AgCl. Si usavano due coppie di elettrodi, distanti circa 2 cm l'una dall'altra: gli stimoli tetanizzanti si applicavano con la coppia posta in prossimità del muscolo; le contrazioni isolate registrate isometricamente prima e dopo il tetano, erano provocate con sti-

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Fisiologia umana dell'Università di Bologna.

(**) Nella seduta del 13 giugno 1953.

(1) F. B. HOFMANN, « Pflüger's Arch. », CIII, 291 (1904).

(2) S. A. GUTTMAN, R. G. HORTON a. D. T. WILBER, « Amer. J. Physiol. », CXIX, 463 (1937).

(3) G. L. BROWN a. U. S. von EULER, « J. Physiol. », XCIII, 39 (1938).

(4) A. ROSENBLUETH a. R. S. MORISON, « Amer. J. Physiol. », CXIX, 236 (1937).

(5) T. P. FENG, « Chin. J. Physiol. », XI, 437 (1937).

(6) T. P. FENG, L. Y. LEE, C. W. MENG a. S. C. WANG, « Chin. J. Physiol. », XIII, 79 (1938).

(7) L. GRUMBACH a. D. T. WILBER, « Amer. J. Physiol. », CXXX, 433 (1940).

(8) U. S. von EULER a. R. L. SWANK, « Acta physiol. scand. », I, 203 (1940-41).

(9) A. GIACHETTI, « Arch. Fisiol. », L, 58 (1950).

(10) M. SANDOW a. A. G. KARCZMAR, « Feder. Proc. », IV, 62 (1945).

moli soprammassimali applicati con la coppia posta distalmente. La stimolazione tetanizzante era ottenuta mediante scariche di condensatori, il ritmo essendo assicurato da un iteratore costruito sul modello Lapicque–Trevet [Lapicque [11]]; la frequenza degli stimoli era invariata, di 24 al secondo [12], e così pure la capacità dei condensatori (1 μF), il cui voltaggio di carica si faceva variare da 1 a 8 V [13]; i tetani erano di durate crescenti da 1 a 20 sec, cioè il numero degli stimoli si faceva variare da 24 a 480. Per le stimolazioni pre–tetaniche e post–tetaniche erano usati stimoli soprammassimali di apertura di una corrente indotta; la frequenza degli stimoli applicati era di 1 ogni 5 sec. Un interruttore a due vie, infine, permetteva di sostituire la stimolazione tetanizzante alla serie degli stimoli isolati. Il preparato neuromuscolare era tenuto in camera umida, alla temperatura di 18°–20° C.

Dagli esperimenti sono risultati i fatti seguenti. Per un basso voltaggio di carica dei condensatori e per una breve durata del tetano, le risposte post–tetaniche, a partire dalla reazione al primo stimolo applicato dopo il tetano, sono potenziate rispetto alle contrazioni pre–tetaniche: si ha ppt e la inibizione è assente. Quando la durata del tetano e l'intensità degli stimoli sono elevate, le prime stimolazioni post–tetaniche sono inefficaci, ovvero provocano contrazioni assai ridotte rispetto a quelle ottenute avanti il tetano, e le susseguenti destano risposte di altezza progressivamente crescente fino a raggiungere quella delle contrazioni pre–tetaniche: si ha inibizione e manca il ppt. Nei casi, infine, in cui la stimolazione tetanizzante è di breve durata e ottenuta con elevato voltaggio di carica dei condensatori, come pure nei casi in cui la stimolazione è di lunga durata e il voltaggio di carica dei condensatori è basso, la tensione delle contrazioni post–tetaniche cresce progressivamente a partire da un valore inferiore a quello delle reazioni post–tetaniche, fino a superarlo: si ha inibizione, seguita da potenziamento.

Sono state prese in esame: la variazione massima di tensione delle contrazioni isolate post–tetaniche, calcolata in p. 100 della tensione riscontrata avanti la stimolazione tetanizzante; la durata del potenziamento post–tetanico; la durata della inibizione post–tetanica. Si è osservato quanto segue. *A*) Per tutti i voltaggi di carica dei condensatori usati per la stimolazione tetanizzante, la variazione massima della tensione delle contrazioni post–

(11) L. LAPICQUE, *L'excitabilité en fonction du temps*. Paris, Presses universitaires de France (1926).

(12) È stata usata una bassa frequenza di stimoli, in modo che questi risultassero tutti utili entro un buon margine di sicurezza.

(13) Nelle ricerche sul ppt, i diversi Autori hanno adoperato, per la stimolazione tetanizzante stimoli massimali o soprammassimali [Rosenblueth e Morison [4], Guttman *et alii* [2], Brown e von Euler [3], von Euler e Swank [8], Bernhard, von Euler e Skoglund [14]], fino a 13 volte quelli massimali [Walker [15]].

(14) C. G. BERNHARD, U. S. von EULER a. C. R. SKOGLUND, «Acta physiol. scand.», II, 284 (1941).

(15) S. M. WALKER, «Amer. J. Physiol.», CXLIX, 7 (1947).

tetaniche cresce fino ad un massimo, con l'aumentare della durata del tetano, e poi diminuisce; la durata della stimolazione necessaria per ottenere il massimo ppt, decresce con l'aumentare del voltaggio; il valore massimo del ppt è più elevato per effetto dei voltaggi più bassi. *B*) Per ciascun voltaggio di carica dei condensatori utilizzati per ottenere il tetano, la durata del ppt cresce col crescere della durata della stimolazione tetanizzante, fino al cessare del fenomeno; per un dato tempo di stimolazione, la durata del ppt è maggiore per i voltaggi più elevati. *C*) A partire da quei valori di durata o intensità di stimolazione tetanizzante che provocano la comparsa della inibizione post-tetanica, la durata della inibizione medesima cresce con lo aumentare del tempo e dell'intensità di stimolazione.

Questi risultati inducono ad ammettere che il processo del ppt sia accompagnato da un fattore antagonista, per effetto del quale il livello del ppt decresce a partire da una determinata durata o intensità di stimolazione tetanizzante, mentre la durata del ppt cresce fino alla scomparsa del fenomeno. Si rileva inoltre che i segni della limitazione del potenziamento si fanno palesi per le medesime caratteristiche di stimolazione tetanizzante, alle quali appare subordinata la comparsa della inibizione post-tetanica. La limitazione del ppt, col crescere della durata e della intensità della stimolazione tetanizzante, sembra dipendere quindi dalla inibizione post-tetanica.

L'effetto postumo potenziante del tetano è stato interpretato come una conseguenza dell'accumulo dei K^+ all'esterno della fibra muscolare [Rosenblueth e Morison [4], Feng *et alii* [6], Brown e von Euler [2], Walker [15]]. Dopo il tetano si riscontra diminuzione del potassio muscolare [Fenn e Cobb [16]] e aumento di quello del plasma [Fenn [17]]; come il tetano [Boyd [18]], il KCl potenzia le contrazioni muscolari, depolarizza il muscolo e ne riduce l'altezza del potenziale d'azione [Brown e von Euler [2], Walker [15]]. Infine, il KCl a dose opportuna, aumenta l'effetto potenziante del tetano [Brown e von Euler [2], Walker [15]]. Riferendosi a tale spiegazione del ppt, appare evidente come un meccanismo di sommazione temporale e spaziale possa rendere ragione di un accumulo di K^+ all'esterno della membrana solo per bassi voltaggi di carica dei condensatori utilizzati per ottenere il tetano.

(16) W. O. FENN a. D. M. COBB, « Amer. J. Physiol. », CXV, 345 (1936).
(17) W. O. FENN, « Amer. J. Physiol. », CXXVII, 356 (1939).
(18) T. E. BOYD, « Amer. J. Physiol. », C, 569 (1932).

Fisiologia. — *Risposta muscolare al potassio e analisi dei fattori che la compongono* (*). Nota di PAOLO CREPAX, presentata (**) dal Socio G. C. PUPILLI.

In un lavoro precedente è stata studiata l'azione di alcuni anestetici locali sull'impedenza trasversale del M. gastrocnemio di Rana [Crepax e Fadiga [1,2]]: i diversi composti esaminati (cocaina, novocaina, stovaina, xilocaina) fanno aumentare i valori della impedenza del muscolo. Nelle medesime ricerche si è potuto accertare che i valori di tale parametro presentano invece una diminuzione per effetto della caffeina; e una diminuzione produce pure la veratrina come aveva osservato Machne [3] in esperimenti eseguiti in questo stesso Laboratorio. Ora, cercando di comporre in sistema i risultati riferiti, poteva notarsi innanzi tutto un rapporto costante tra le modificazioni dell'impedenza e gli effetti che, per quanto era noto dalla letteratura, le diverse sostanze esercitano sulla risposta contrattile del muscolo al potassio. Così, l'impedenza risulta diminuita dalla veratrina e dalla caffeina, che accrescono la risposta contrattile al potassio [Bacq [4]; Goutier [5]], e aumentata invece dagli anestetici locali che tale risposta diminuiscono [Guarino [6]; Blavier, Lecomte, Osterrieth e Vanremoortere [7]].

Per meglio intendere il significato di tale corrispondenza, era da stabilire innanzi tutto entro quali limiti essa fosse verificabile: tale accertamento era necessario, per esempio, nel caso di un anestetico come la xilocaina (ω dietilamino–2,6–dimetilacetanilide), i cui effetti sulla risposta contrattile dei muscoli al K^+ non erano stati presi in esame dagli Autori che avevano indagato in generale l'azione degli anestetici sulla risposta medesima.

Come è stato riferito, negli esperimenti dianzi citati la xilocaina aveva dimostrato di determinare un aumento dell'impedenza trasversale del M. gastrocnemio di Rana, allo stesso modo degli altri anestetici esaminati; e poteva prevedersi che analogamente a questi essa diminuisse la risposta al K^+.

Faccio presente come Bacq e i suoi collaboratori [letteratura in Bacq e Goffart [8]], nel corso delle loro ricerche sulle sostanze che modificano gli effetti muscolari del K^+, si siano serviti quasi costantemente del M. retto

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Fisiologia umana dell'Università di Bologna.

(**) Nella seduta del 13 giugno 1953.

(1) P. CREPAX e E. FADIGA, « Boll. Soc. it. Biol. sper. », XXVIII, 770 (1952).

(2) P. CREPAX e E. FADIGA, « Arch. Sci. biol. », XXXVII, 29 (1953).

(3) X. MACHNE, « Arch. Sci. biol. », XXXIV, 472 (1950).

(4) Z. M. BACQ, « Arch. internat. Pharmacodyn. », LXIII, 60 (1939).

(5) R. GOUTIER, « Arch. internat. Physiol. », LVII, 154 (1949).

(6) S. GUARINO, « C. r. Acad. Sci. », CCXXX, 1907 (1950).

(7) J. BLAVIER, J. LECOMTE, P. OSTERRIETH et E. VANREMOORTERE, « Arch. internat. Physiol. », LVII, 393 (1950).

(8) Z. M. BACQ et M. GOFFART, « Erg. Physiol. », XLVII, 555 (1952).

addominale di *Rana temporaria* [9]. Gli esperimenti che ho eseguiti con tale muscolo (*Rana esculenta*) hanno dimostrato come la xilocaina in concentrazioni già pienamente capaci di modificare l'impedenza del M. gastrocnemio non modifichi in alcun modo la contrazione da K^+ (fig. 1).

È noto come il K^+ non provochi un medesimo tipo di contrazione nei diversi muscoli [Bethe [10]]. Così, mentre il M. retto addominale di Rana risponde con una semplice contrattura, il M. sartorio dello stesso animale e in modo ancor più evidente lo stesso muscolo di Rospo presentano una risposta più complessa, nella quale a una lenta contrattura si sovrappone un gran numero di rapide e brevi contrazioni [Guarino [6]]. D'altra parte, gli effetti di alcune sostanze che modificano la risposta dei muscoli al K^+, sembrano dipendere dal muscolo impiegato: per esempio, mentre l'adrena-

Fig. 1. – Influenza della xilocaina (p. m. 234) sulla risposta al K^+ del M. retto addominale di *Rana esculenta*. Registrazione mediante leva isotonica a iscrizione radiale; rapporto dei bracci di leva di 1 : 3. Nella vaschetta (capacità di 10 ml), contenente il muscolo, viene introdotta a intervalli di 10 min una quantità fissa di KCl (0,5 ml di una soluzione di KCl al 10 p. 100). In corrispondenza dei cerchi pieni, lavaggio del preparato ed arresto del chimografo. La xilocaina è introdotta nella vaschetta 5 min avanti il KCl, quando ancora il cilindro è in arresto. Riduzione a 1/2 dell'originale.

lina aumenta soltanto l'ampiezza e il ritmo delle contrazioni rapide del M. sartorio, il potenziamento esercitato dalla caffeina riguarda essenzialmente, se non esclusivamente, la fase tonica [6].

Movendo dalle nozioni ora ricordate, ho esaminato l'azione della xilocaina sulla risposta al K^+ del M. sartorio di *Bufo vulgaris* e ho rilevato un intenso effetto « desensibilizzante » (fig. 2) già in concentrazioni inferiori a quelle necessarie per ottenere variazioni significative dell'impedenza. L'azione antagonista della xilocaina si manifesta anzitutto nei confronti delle brevi e rapide contrazioni provocate nel muscolo sartorio dal K^+. Il raccorciamento tonico del muscolo risulta anch'esso ridotto, nel più dei casi: tuttavia, mi sembra fondato considerare questo effetto come fenomeno collaterale ed in un certo senso aspecifico [11], giacché quando col progressivo lavaggio del preparato l'azione della xilocaina viene estinguendosi, il raccorciamento tonico del muscolo riprende l'ampiezza normale mentre le contra-

(9) Del resto, è da notare come la scuola di Bacq abbia cercato di dare evidenza alla generale validità dei fatti osservati nel muscolo scheletrico di Anfibio, dimostrando come il fenomeno del potenziamento degli effetti muscolari del K^+ si appalesi con caratteri sostanzialmente identici nella muscolatura di Invertebrati [BACQ, « Pubbl. Staz. zool. Napoli », XVIII, 1 (1939); GODEAUX, « Arch. internat. Pharmacodyn. », LXVII, 425 (1942)] e in quella cardiaca [DEROUAUX, « Arch. internat. Pharmacodyn. », LXVII, 257 (1942)].

(10) A. BETHE, « Biochem. Z. », CLVI, 190 (1925).

(11) Si può ben concepire come la xilocaina, agendo troppo a lungo ovvero in concentrazione eccessiva, possa estendere la sua azione a processi che un dosaggio più proprio consentirebbe di veder decorrere indisturbati. Un effetto massivo dell'anestetico può com-

zioni fasiche sono ancora completamente inibite (cfr. le due contrazioni dopo xilocaina della fig. 2).

Il fatto che la risposta del M. sartorio al K^+ venga modificata dalla xilocaina nel senso che poteva prevedersi dalle variazioni dell'impedenza, diversamente da quanto si osserva per le risposte del M. retto addominale, ha un significato che va oltre la questione particolare concernente il sostrato biologico più adatto allo studio delle azioni muscolari di questo catione, dando chiara evidenza alla natura degli effetti esercitati dagli anestetici locali sulla membrana del muscolo. Già Hardt e Fleckenstein [12] hanno notato come l'azione anticontratturante di tali composti si manifesti massi-

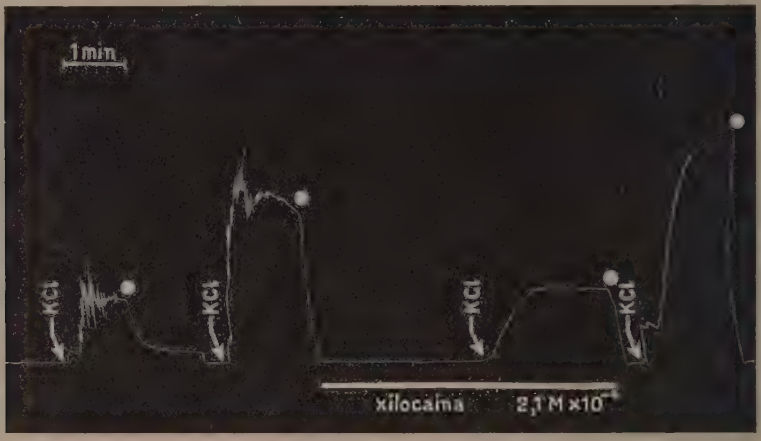


Fig. 2. – Influenza della xilocaina sulla risposta al K^+ del M. sartorio di *Bufo vulgaris*. Registrazione mediante leva isotonica a iscrizione tangenziale; rapporto dei bracci di leva 1 : 6. Nella vaschetta (della capacità di 10 ml), contenente il muscolo, viene introdotta a intervalli di 30 min una quantità fissa di KCl (0,5 ml di una soluzione al 5 p. 100). In corrispondenza dei cerchi pieni, lavaggio del preparato e arresto del chimografo. La xilocaina è introdotta 5 min avanti il KCl, quando ancora il cilindro è in arresto. Riduzione a 1/2 dell'originale.

mamente di fronte a quegli agenti di contrattura, i quali depolarizzano la membrana in modo reversibile. La distinzione tra « Erregungskontrakturen » e « Schädigungskontrakturen » nel senso di Riesser [13] è tuttavia evidentemente scolastica e praticamente in ogni contrattura può distinguersi « eine Anfangsverkürzung als Äquivalent einer mehr oder weniger echten Erregung von der nachfolgenden Starrverkürzung . . . , die kaum mehr etwas mit dem physiologischen Verkürzungsakt gemeinsam hat » (loc. cit., [12]).

promettere, ad esempio, anche la propagazione del processo contrattile non dipendente dalla membrana, vale a dire può ostacolare l'estendersi del processo medesimo a una parte degli elementi contrattili. Oppure la proprietà stessa che hanno le particelle di actomiosina di assumere la configurazione propria dello stato raccorciato [VARGA, « Hung. physiol. Acta », I, 1 (1950)] potrebbe per una parte di esse risultare transitoriamente compromessa.

12) A. FLECKENSTEIN u. A. HARDT, « Arch. exp. Path Pharmak. », CCVII, 39 (1949).

13) O. RIESSER, « Kontraktur und Starre », in Handbuch der normalen und pathologischen Physiologie, Bd. VIII, Teil I, S. 218, Berlin, J. Springer (1926).

I concetti ora esposti sono integralmente applicabili agli effetti esercitati dal K^+ sul muscolo e già l'andamento delle curve miografiche (cfr. figg. 1 e 2) è sufficiente, in questo caso, per affermare che le due componenti dell'azione muscolare di questo catione assumono una diversa importanza nel caso del M. retto addominale e in quello del M. sartorio.

La duplicità della risposta del M. retto addominale al K^+ è stata documentata elettrofisiologicamente: ad un tetano asincrono segue infatti una contrattura vera, che si sviluppa in un completo silenzio elettromiografico [Coppée e Goffart [14]]. Il fatto che la xilocaina inibisca specificamente le rapide contrazioni fasiche provocate dal K^+ nel M. sartorio, è conforme all'importanza che ha la propagazione dei processi di depolarizzazione membranaria nella genesi di tali manifestazioni contrattili e a quello che sembra essere l'aspetto fondamentale dell'azione degli anestetici sulla membrana fisiologica, vale a dire le loro proprietà « stabilizzanti ». La circostanza che proprietà così fatte si manifestino quasi sempre anche con effetti antagonisti rispetto a raccorciamenti muscolari di altra natura, più propriamente classificabili secondo l'accezione consueta tra le contratture [Gasser [15]], non infirma il concetto che l'azione degli anestetici locali sulla membrana riguarda essenzialmente e in primo luogo proprietà della membrana che hanno parte nei fenomeni rapidi: il che appare bene illustrato nell'esperimento riferito.

Biologia. – *Sulle variazioni della competenza arto-formativa negli Anfibi Anuri a seconda dello stadio* [*]. Nota di TEODORO PERRI, presentata [**] dal Socio G. COTRONEI.

Le mie ricerche sull'induzione di arti soprannumerari in *Bufo vulgaris* mediante stimoli abnormi, che iniziai nel 1946 [1], mi hanno permesso di affrontare numerose questioni sia di biologia generale, che più propriamente di morfologia. Ricordo le questioni sull'azione inducente dei prodotti citolitici, la competenza arto formativa, la struttura degli arti soprannumerari, le leggi della simmetria speculare, la regolazione degli arti. Sono tutti argomenti di vivo interesse; e nei miei vari lavori ho insistito ora più sull'uno ora più sull'altro punto del problema.

(14) G. COPPÉE et M. GOFFART, citati da J. LECOMTE, E. VANREMOORTERE et P. FISCHER, « Arch. internat. Physiol. », LVIII, 265 (1950).

(15) H. S. GASSER, « Physiol. Rev. », X, 35 (1930).

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Anatomia comparata « B. Grassi » dell'Università di Roma, con contributi concessi dal Consiglio Nazionale delle Ricerche.

(**) Nella seduta del 13 giugno 1953.

(1) Vedi questi « Rendiconti » dal 1946, in poi; « Memorie Accad. Naz. dei Lincei », vol. III (ser. 8ª), fasc. 2, sez. III, 1951; « La Ricerca Scientifica », vol. 21, n. 7, 1951 e vol. 22, n. 5, 1952; « Riv. di Biologia », vol. 44 (1952).

Nell'eseguire queste ricerche sono stato agevolato dall'aver trovato in *Bufo vulgaris* un materiale veramente eccellente, quando si usi la tecnica da me per il primo adottata. Questa consiste nel trapianto di parti (soprattutto quelle cefaliche) di embrioni röntgenirradiati con dosi nettamente letali, sul tronco di embrioni normali. È quindi una tecnica che non presenta particolari difficoltà. Il trapiantato, per effetto della röntgenirradiazione subìta, va gradualmente in necrosi e in tal modo si ha una liberazione graduale di prodotti citolitici che stimolano la somatopleura, la quale, conformemente alla sua ben nota competenza arto–formativa, prolifera e le cellule proliferate costituiscono uno o più arti soprannumerari, spesso conformati assai bene onde la possibilità d'indagini morfologiche. Invece prima, negli Anuri, se ne conosceva un caso, ottenuto dal Filatow in *Bufo vulgaris* mediante trapianto dell'abbozzo dell'ipofisi, rimasto caso unico. Le mie ricerche sperimentali hanno adunque permesso per la prima volta di utilizzare, nello studio degli argomenti sopra indicati, un materiale così prezioso come gli Anfibi Anuri.

L'argomento del quale mi occupo in questa Nota riguarda le variazioni della competenza artoformativa a seconda dello stadio nel quale si esegue il trapianto, mi occupo cioè della durata di questa competenza negli Anfibi Anuri. La presente Nota si riconnette con le mie precedenti ricerche e più particolarmente con un mio lavoro [2], di giusto un anno addietro, nel quale mi occupai di proposito delle variazioni della competenza artoformativa a seconda della specie sulla quale si esperimenta, e contemporaneamente impostai la questione delle variazioni della stessa competenza a seconda dello stadio, dandone alcuni primi risultati.

Sulle variazioni della competenza artoformativa vi sono alcuni dati per gli Urodeli, nulla per gli Anuri: scopo precipuo di questa Nota è appunto l'indagine comparativa tra i due ordini di Anfibi. Il Balinsky nelle sue ricerche, iniziate nel 1925, sull'induzione di arti soprannumerari negli Urodeli ottenuti mediante il trapianto di una otocisti o di un placode olfattorio sul tronco di embrioni normali, si occupò pure [3] delle variazioni della competenza artoformativa a seconda dello stadio. Ottenne risultati positivi sino agli stadi 42-44, ma già al termine di questi la possibilità d'induzione diminuisce per poi rapidamente scomparire. Parlò quindi di uno stadio critico (1937, p. 274), e notò che anche la determinazione della piastra neurale e del cristallino avvengono solo sperimentando sino ad un certo stadio. Nel 1924 la Locatelli [4] ottenne l'induzione di arti soprannumerari nei tritoni adulti, appuntando il moncone dello sciatico sotto la cute in corrispondenza del cinto posteriore. Dal confronto tra i risultati del Balinsky e quelli della Locatelli emerge che usando uno stimolo che tutto lascia pensare sia molto energico, si pone in evidenza il persistere di una competenza artoformativa che altrimenti sembrava già cessata fin da stadi giovanis-

(2) T. Perri, in questi « Rendiconti », ser. VIII, vol. XII, p. 753, 1952.
(3) B. I. Balinsky, in « Roux' Arch. f. Entw. mech. », vol. 136, p. 250.
(4) P. Locatelli in « Arch. Ital. de Biol. », vol. 74, 1924.

simi. Risulta dalle esperienze di Guyénot e Scotté [5] che il territorio capace di dare arti soprannumerari nei tritoni adulti è però molto ristretto: essi ebbero infatti risultati positivi solo appuntando il moncone del nervo (sciatico, radiale) nella zona laterale del tronco in vicinanza degli arti normali, mentre ad una certa distanza da questi ebbero semplici saglienze che poi scomparvero.

Le mie esperienze di quest'anno, intese a definire in modo esplicito la durata della competenza artoformativa negli Anuri, sono consistite nel trapianto della parte apicale della testa di embrioni röntgenirradiati con dosi nettamente letali, su embrioni e larve in vari stadi di sviluppo. Ho sperimentato su *Bufo vulgaris*, ove avevo già larga esperienza per il comportamento in stadi giovanissimi, ossia di bottone codale piccolo o piccolissimo; e in *Hyla arborea*, ove pure avevo già ottenuto alcuni casi di induzione di arti soprannumerari.

Ecco in breve i risultati ottenuti. Esperienze in *Bufo vulgaris*. Operando il trapianto della parte apicale della testa di embrione röntgenirradiato con dosi nettamente letali su portatori allo stadio di contrazioni da poco iniziate, è risultato che l'induzione è possibile; anzi, avendo avuto in un gruppo di trapianti 4 casi positivi su 6 (nei due casi che chiamo negativi si osservano in vivo piccole escrescenze, perciò probabilmente non sono negativi del tutto), debbo pensare che in questo stadio la competenza artoformativa permanga non diminuita. Per gli stadi più avanzati ho pure avuto casi positivi sino allo stadio comparabile al n. 20 dello sviluppo normale di *Rana pipiens*. Numerosissimi casi di tali trapianti sono stati eseguiti verso la fine dello sviluppo embrionale e a larva giovanissima, da un'interna di questo Istituto, la sig.na L. Dei, e non vi si ebbero casi positivi.

In *Hyla arborea* ebbi casi positivi, usando come portatori embrioni alle loro prime contrazioni, mediante il trapianto della parte apicale della testa di embrioni röntgenirradiati di *Hyla* oppure di *Rana esculenta*. Con trapianti da *Hyla* irradiate su *Hyla* normali, ebbi casi positivi anche usando come portatori le *Hyla* allo stadio 20 riferito a *Rana pipiens* (è uno stadio che corrisponde pure al n. 20 dello sviluppo normale di *Hyla regilla* secondo Eakin [6]).

In tutte queste esperienze la zona di trapianto fu nella metà posteriore del tronco, ossia nella zona dove è più facile l'induzione.

Preciso che lo stadio 20, come ho già accennato, è riferito alle tavole normali dello sviluppo di *Rana pipiens* secondo il Shumway [6]: è lo stadio nel quale inizia la circolazione sanguigna nelle branchie, che si presentano già come tubercoli branchiali di media grandezza. Lo stadio di larva, il cui inizio secondo la terminologia usata dalla Scuola del Cotronei coincide con il principiare dell'assunzione di alimento esterno, corrisponde a poco dopo lo stadio 25 delle stesse tavole. Per il tritone si tenga presente che nello

(5) E. GUYÉNOT et O. SCHOTTÉ in «C. r. Soc. de Biol.», vol. 94, p. 1050.
(6) Vedi R. RUGH, *Experimental embryology*, Minneapolis, 1948.

stadio 46 (ved. Glücksohn [7] al quale si riferisce il Balinsky) è già comparso l'abbozzo dell'arto posteriore; ed è intorno a questo stadio che comincia l'assunzione di alimento esterno, cioè della vita larvale secondo la terminologia del Cotronei.

Prima di discutere i risultati sopra esposti, è necessario richiamare alcuni dei concetti essenziali sul processo induttivo. Nell'induzione si deve tener conto sia dello stimolo sia della parte dell'embrione (e lo stesso dicasi per la vita post–embrionale) sulla quale agisce lo stimolo. Lo Spemann e la sua Scuola hanno distinto nell'induzione, un sistema agente (Aktionssystem) e un sistema reattivo (Reaktionssystem): quando ambedue i sistemi tendono verso la determinazione di uno stesso abbozzo, si verifica una « doppia assicurazione » o « principio sinergetico dello sviluppo » dello Spemann. Sono molte le espressioni usate per indicare, sia pure con qualche variazione concettuale, la capacità reattiva delle varie parti dell'organismo: il termine « competenza » creato dal Waddington è oggi il più usato. A questo secondo fattore venne attribuito un'importanza sempre maggiore, man mano che risultava più evidente l'aspecificità dello stimolo. Lo stimolo induttore e la competenza non insorgono né terminano contemporaneamente né hanno la stessa durata, ma si possono avere varie condizioni: ciò che è indispensabile perché si abbia l'induzione di un dato abbozzo, è che ambedue i fattori coesistano per un certo tempo. Le variazioni della competenza sono essenzialmente in rapporto con il distretto embrionale sul quale si agisce e con lo stadio in cui si esperimenta: si è parlato, molto espressivamente, dei fattori spazio e tempo nelle variazioni della competenza. Spesso la competenza a dare un determinato abbozzo termina appena questo è determinato, mentre la capacità inducente persiste, talora molto più a lungo; ma l'induzione di arti soprannumerari negli Urodeli, come pure la rigenerazione di un cristallino dal margine irideo della retina negli stessi Urodeli, sono possibili anche nella vita adulta, mostrando che, almeno in alcuni casi, la competenza persiste ben oltre lo stadio di determinazione dei rispettivi abbozzi. Tutti questi concetti sono stati elaborati, essenzialmente, in base ai risultati sperimentali sullo sviluppo del cristallino, della piastra neurale e di altri abbozzi, anche degli arti.

Nelle mie ricerche sull'induzione di arti soprannumerari negli Anuri, ho sempre mirato a mettere in risalto come i risultati nelle mie particolari condizioni potessero inquadrarsi nel problema generale dell'induzione, e quali contributi vi apportassero. È stato questo il mio compito personale di parecchi anni di sperimentazione.

In precedenti lavori discussi le variazioni della competenza artoformativa secondo le varie zone della somatopleura compresa tra gli arti normali (induzione di arti anteriori e di arti posteriori) stabilendo un confronto con i dati che il Balinsky aveva rilevato negli Urodeli. Osservai inoltre che con queste variazioni qualitative coesistono variazioni quantitative (cioè

(7) S. Glücksohn in « Roux' Arch f. Entw. mech. », vol. 125, 1932.

di soglia) della somatopleura. Infatti, usando come sorgente di stimolo il trapianto della zona branchiale di embrioni röntgenirradiati con dosi nettamente letali, è risultato in maniera molto chiara che nella zona posteriore del tronco si ha una competenza arto–formativa a soglia più bassa che nelle altre zone (onde maggior facilità che lo stimolo la superi e quindi maggior facilità d'induzione); la soglia più alta l'ho riscontrata nel terzo medio del tronco.

Mi sono pure occupato delle variazioni della competenza a seconda della specie sulla quale si esperimenta. Già dissi [2] che in una larva di *Hyla arborea* (fissata giovanissima perché sofferente) avevo ottenuto una gemma di arto soprannumerario mediante il trapianto della parte apicale della testa di embrione röntgenirradiato di *Rana esculenta*. Quest'anno ho ottenuto risultati più dimostrativi, ossia induzione, nelle stesse condizioni, di arti soprannumerari che hanno già raggiunto un notevole grado di sviluppo; essi sono del tutto uguali ai casi avuti in *Hyla* quando il trapiantato röntgenirradiato è anch'esso di *Hyla*. Aggiungo inoltre che il trapianto inverso, ossia trapianto della parte apicale della testa di *Hyla arborea* sul tronco di *Rana esculenta* normale, non mi ha dato finora risultati positivi. Ciò mostra in maniera assai chiara che l'aver ottenuto con una stessa tecnica casi positivi d'induzione di arti soprannumerari in *Hyla arborea* e non in *Rana esculenta*, non dipende da eventuale diversità della potenza dell'induttore usato, ma dalla diversa reattività della somatopleura, cioè dalle variazioni della competenza a seconda della specie sulla quale si esperimenta.

Le esperienze di quest'anno hanno mirato allo studio delle variazioni della competenza secondo lo stadio. Ho esposto sopra i risultati ottenuti e si è visto che ho avuto casi positivi operando sino allo stadio 20 sia in *Bufo vulgaris* che in *Hyla arborea*; nelle esperienze eseguite in embrioni più avanzati oppure di larve giovanissime (ossia quando è da poco iniziato l'assunzione di alimento esterno) non si è avuto finora – esperienze in *Bufo vulgaris* – alcun risultato positivo. Si tenga presente che variazioni individuali indubbiamente esistono: esse sono in rapporto sia alle variazioni della suscettibilità individuale del portatore, sia alle variazioni individuali della röntgensuscettibilità dell'embrione donatore, sia infine a quelle seppur piccole variazioni tecniche che si riflettono sul volume del trapiantato. Queste variazioni ci rendono conto del fatto che in ciascun lotto di esperienze vi siano differenze da caso a caso, e che differenze nell'induzione siano maggiori tra lotti diversi, anziché nell'ambito di ciascun d'essi essendo qui più facile raggiungere una maggiore uniformità di condizioni sperimentali.

Per confrontare i risultati ottenuti in *Bufo vulgaris* e in *Hyla arborea* con quelli del Balinsky negli Urodeli, debbo anzitutto notare che lo stimolo è certamente più energico. Infatti il Balinsky con il trapianto dell'otocisti non ottenne risultati positivi negli Anuri, e neppure li ottenne il Filatow, quando usò (1927) il trapianto dell'otocisti sia in *Bufo vulgaris* che in altri Anuri. Per quanto riguarda gli stadi saggiati si tenga presente che negli Urodeli l'arto anteriore è un abbozzo istologicamente riconoscibile già allo

stadio di bottone codale piccolissimo, mentre l'arto posteriore lo è verso lo stadio 46. Negli Anuri, invece, le gemme degli arti, sia anteriori che posteriori, si costituiscono verso la fine dello stadio embrionale. Se ne conclude, che negli Urodeli si hanno arti soprannumerari da stimoli abnormi pur operando quando gli arti anteriori del portatore sono già ben differenziati; mentre negli Anuri l'induzione, pur avendo usato uno stimolo più intenso, non si è avuta negli stadi nei quali sta per formarsi la gemma dell'arto normale. Si osservi che sia negli Anuri che negli Urodeli, la competenza artoformativa – in rapporto agli stimoli usati – è scomparsa, o almeno ha già subìto una forte diminuzione, verso la fine della vita embrionale.

Per i rapporti, negli Anuri, tra durata della competenza artoformativa e stadio di determinazione dell'abbozzo dell'arto normale, ricordo che l'Alverdes [8] non ebbe il suo differenziamento eseguendone il trapianto a bottone codale piccolo; ma l'ebbe solo, ed in una piccola percentuale di casi, allo stadio di contrazioni già iniziate. Negli Urodeli si hanno invece risultati positivi anche in stadi più giovani.

Mi sono anch'io occupato, particolarmente quest'anno, della determinazione dell'abbozzo normale dell'arto in *Bufo vulgaris*. Uno degli scopi principali di quest'ultime mie ricerche è il confronto diretto, e nella stessa specie, tra gli arti indotti e gli arti trapiantati, e quindi di stabilire un rapporto tra lo stadio della loro determinazione e la durata della competenza artoformativa.

Asportando ampiamente la zona del presunto abbozzo dell'arto posteriore e trapiantandolo sul tronco di embrione normale, ho avuto in molti casi ottimo differenziamento dell'arto, a volte unico a volte duplice. Lo stadio di operazione in cui ebbi questi risultati positivi, fu sia di contrazioni da poco cominciate sia di prima della loro comparsa: si osservi che la competenza artoformativa in questi stadi era adunque già iniziata. Il diretto confronto tra questi risultati di trapianto dell'abbozzo dell'arto e quelli di induzione di arti soprannumerari, mediante stimoli abnormi, gli uni e gli altri in *Bufo vulgaris*, mostrano che la competenza artoformativa persiste almeno per un certo tempo dopo che l'abbozzo normale dell'arto è già determinato.

Con le conclusioni di una relativamente precoce e notevole diminuzione della competenza artoformativa in *Bufo vulgaris*, concordano pure i risultati di altre mie esperienze nelle quali avevo asportato, in embrioni di *Bufo vulgaris* a bottone codale piccolo, ampia parte di ectoderma e sottostante somatopleura della metà posteriore del tronco, ivi compreso il presunto abbozzo dell'arto. Orbene, quando la riparazione della soluzione di continuo fu molto lenta, allora non si ebbe più la formazione dell'arto normale. Tenuto conto che tutto il mesoderma che sta tra gli arti ha competenza artoformativa, la spiegazione che sembra più verosimile è che in questi casi il mancato sviluppo dell'arto sia dipeso dal fatto che il mesoderma abbia raggiunto il luogo idoneo per l'induzione quando la sua competenza era già diminuita o scomparsa.

(8) K. ALVERDES in « Zeitschr. f. mikr.-anat. Forsch. », vol. 11, 1927.

Vi sono ancora altre mie esperienze che concordano con questo modo di vedere: alludo al fatto che, nelle esperienze per l'induzione di arti soprannumerari, se il trapiantato è asportato da embrione röntgenirradiato con dose tale che la sua distruzione non avviene nella vita embrionale bensì nella larvale, ossia se i prodotti di citolisi si liberano quasi interamente in stadi avanzati e quindi solo in piccola quantità in stadi efficienti, allora le induzioni sono scarsissime sia per frequenza che per tipicità, oppure del tutto assenti. Nelle esperienze sulla prima comparsa delle gemme di arti soprannumerari, avevo già notato che nei lotti con maggiore frequenza d'induzione, del trapiantato rimanevano, all'inizio della vita larvale, solo scarsissimi residui, ossia i prodotti di citolisi si erano liberati in stadi di embrione giovane, cioè in stadi con notevole competenza artoformativa.

Tante ricerche, adunque, concorrono nel mostrare che le condizioni migliori per l'induzione di arti soprannumerari si hanno quando il trapiantato elimina prodotti di citolisi in notevole quantità, per un tempo sufficientemente lungo, e, posso ora aggiungere, in stadi molto giovani ossia quando vi è una notevole competenza artoformativa: condizioni che sono ampiamente realizzate nel trapianto di complessi di abbozzi cefalici röntgenirradiati con dosi nettamente letali su embrioni a bottone codale piccolo o piccolissimo.

Conclusioni. – La competenza artoformativa in *Bufo vulgaris* e in *Hyla arborea* è ancora presente allo stadio di tubercoli branchiali di media lunghezza (stadio 20), mentre verso la fine della vita embrionale (esperienze in *Bufo vulgaris*), con la tecnica usata, non si mette più in evidenza. Questa mancata induzione di arti soprannumerari, dopo un certo stadio, è dovuta ad una scomparsa o almeno forte diminuzione della competenza artoformativa della somatopleura che sta tra gli abbozzi normali degli arti.

Biologia (Notizie storiche). — *Dieci ignorati volumi di manoscritti autografi morgagnani.* Nota di ADALBERTO PAZZINI, presentata (*) dal Corrisp. V. PUNTONI.

Dei ricchi fondi di manoscritti morgagnani che si trovano nella biblioteca Comunale di Forlì ed in quella Palatina di Parma, nonché degli autografi posseduti da quelle di Padova e di Verona e di qualche collezione privata, molti studiosi si sono occupati, da A. Corradi [1] a G. Rocchi [2] a L. Messedaglia [3] a E. Benassi [4], il quale ultimo ha pubblicato cento con-

(*) Nella seduta del 13 giugno 1953.

(1) A. CORRADI, *Dei consulti e di altri scritti inediti del Morgagni* in « Rend. del R. Istituto Lombardo di scienze lettere, ed Arti », ser. II, vol. VII, fasc. VI, p. 203 (1874).

(2) G. ROCCHI, *Carteggio fra G. B. Morgagni e F. M. Zanotti*. Bologna, Zanichelli (1875).

(3) L. MESSEDAGLIA, *Lettere e consulti inediti di G. B. Morgagni*. Venezia, Off. Graf. C. Ferrari (1912).

(4) G. B. MORGAGNI, *Consulti medici pubblicati da minute inedite a cura di E. Benassi*. Bologna, Cappelli (1935).

sulti posseduti dalla Parmense, soddisfacendo un desiderio quasi secolare di insigni cultori della memoria del grande Forlivese.

Ma tutti, o quasi, gli studiosi, sapevano che ancora un cospicuo fondo di manoscritti di lui doveva esistere: un fondo di cui non si conosceva il contenuto, e di cui, oltre una fugace notizia data 180 anni fa da M. Girardi, non c'era stato più alcun riferimento diretto o indiretto.

Il Girardi, anatomico dell'università Parmense e allievo del Morgagni, aveva ricevuto la promessa dal maestro dell'invio di quattro grossi pacchi di manoscritti ritenuti assai importanti dal Morgagni stesso [5].

La promessa era stata fatta con lettera datata 30 novembre 1771. Il 5 dicembre dello stesso anno il Morgagni moriva quasi improvvisamente ed al Girardi non fu più possibile rintracciare le desiderate carte, le quali rimasero sempre un mistero per lui e per tutti i successivi studiosi sia per il destino subìto, sia per il contenuto.

Quanto sopra, sia detto come antefatto. E veniamo ora al presente. Da parecchi anni desideravo essere informato, per i necessari completamenti del catalogo bibliografico del mio Istituto, sulla consistenza di libri, codici e manoscritti medici della Biblioteca Mediceo Laurenziana di Firenze.

Non avendo ancora avuto l'opportunità di soddisfare tale desiderio, fui ben lieto di incaricare di questo compito il mio assistente vol. dott. B. L. Borri il quale, dovendosi recare a Firenze nel dicembre dello scorso anno, mi richiedeva un tema di lavoro.

Avuto da lui, dopo pochi giorni, uno stralcio degli elenchi a stampa della Laurenziana, contenente una cinquantina di indicazioni di codici manoscritti e libri, ed insieme a detto stralcio una richiesta di indirizzo, trovandosi egli assai perplesso nel proseguire il lavoro, fui subito attratto, tra i Razes, gli Avicenna, i Galeni e tutti gli altri autori, dal nome di G. B. Morgagni di cui, in quella biblioteca, esiste una raccolta di ben dieci volumi « in folio » manoscritti e autografi contenuti nel fondo Ashburnhamiano. con la segnatura 227–228–229–230.

Profondamente colpito da tale constatazione, incaricai il mio assistente di approfondire l'inchiesta, ma non essendo egli riuscito a sapere più di quanto aveva copiato dal catalogo stampato, mi recai a Firenze in quella Biblioteca, dove per prima cosa ebbi l'assicurazione che nessuno aveva mai richiesto quei volumi i quali erano rimasti perciò sconosciuti: ciò risultava chiaramente dai registri dove i frequentatori hanno l'obbligo di segnare il titolo delle opere richieste.

Oltre a questa prova nettamente documentaria, col proseguire delle indagini mi son dovuto convincere che, realmente, questo prezioso fondo morgagnano della Laurenziana era rimasto tutt'ora ignorato, data la assenza di qualunque riferimento al suo contenuto da parte degli studiosi, alcuni dei quali, per di più, lamentavano l'assenza di quel che invece è, in quei

(5) M. Girardi, *Jo Dominici Santorini ... septendecim tabulas quas nunc primum edit atque explicat ... Michael Girardi ... Parmae* in « Regia Typographia », 1775 a pp. XVII-XVIII.

fogli, scritto di proprio pugno dallo stesso Morgagni. Acuita in tal modo la curiosità, proseguii ed intensificai le ricerche, sistematicamente, sia valendomi di qualunque indizio possibile, nella vasta letteratura riguardante il Morgagni, sia estendendo le indagini presso enti e studiosi.

Seguendo ogni possibile traccia, organizzando e coordinando gli sparsi riferimenti, mettendo a confronto ogni testimonianza, sono riuscito a costituire due catene di fatti di cui mi limito ora ad esporre i risultati, ripromettendomi, in uno spazio maggiore concessomi, di fornire tutti i successivi passaggi.

E la prima catena è la seguente.

Il 30 novembre del 1771, come ho già accennato, Morgagni promette per lettera al Girardi « quattro grossi pacchi di carte » rinvenute nel suo studio e che erano, come lui stesso afferma, assai più importanti di quelle altre che già gli aveva dato. Ma il Girardi, quelle carte non doveva mai averle.

Il 5 dicembre dello stesso anno, e cioè dopo sei giorni, Morgagni muore in un ambiente di affetti famigliari che può definirsi squallido, ed al suo capezzale corre L. Calza, suo discepolo ed amico affezionatissimo, e professore anche lui nella università patavina [6].

Morto il Morgagni, Girardi si affrettò a richiedere i sospirati manoscritti promessi: inutilmente; essi erano spariti. I servi si erano data cura di dare alle fiamme tutte le « cartacce » del padrone. Ma c'era L. Calza.

Nel 1785, un tal dott. Dainese, pubblicando un inedito morgagnano dal titolo « Parere sulle risaie », afferma che questo faceva parte di una cospicua raccolta di autografi del grande anatomico in suo possesso e acquistata dagli eredi del prof. Calza [7].

Il Dainese era padovano, e morì dopo il 1807, noto al suo tempo per essere un colto ed appassionato bibliofilo. Dunque nella sua biblioteca, in Padova, sicuramente esisteva, nei primi anni del secolo scorso, una importante raccolta di manoscritti morgagnani acquistata dagli eredi del Calza.

Come aveva avuto il Calza questi manoscritti? È noto che egli era in casa Morgagni alla morte di quest'ultimo, é noto che in casa, dove non risultano famigliari, erano servi che si affrettarono a dare alle fiamme tutte le « cartacce » del padrone che trovavano nello studio si lui, è noto che in detto studio c'erano ancora i quattro famosi involti di carte promessi al Girardi dal Morgagni, carte a cui questi annetteva particolare valore, e che ancora non erano stati potuti spedire, onde può supporsi (dico supporsi) che il Calza abbia potuto sottrarli al rogo servile e, non sapendo della promessa, tenersele.

Ad ogni modo egli possedeva, e questo è certo, una cospicua raccolta di manoscritti morgagnani che, alla sua morte, passarono al dott. Dainese il quale li aveva nella propria biblioteca di Padova.

(6) L. MESSEDAGLIA, *Di alcune lettere e consulti medici di G. B. Morgagni esistenti nella Biblioteca Comunale di Verona* in « Rivista critica di clinica medica », n. 43 (1911).

(7) L. MESSEDAGLIA, loc. cit.

Dunque, in una biblioteca privata padovana, nei primi anni del secolo XIX, c'era una raccolta notevole di manoscritti morgagnani.

Questa è una catena di fatti sicuri.

Veniamo ora ad un'altra catena: quella che termina alla Laurenziana. Qui esistono dieci volumi manoscritti di opere e appunti assai importanti, autografi del grande anatomico.

Il Paoli, in uno degli accennati cataloghi (e precisamente in quello riguardante i Codici Ashburnhamiani posseduti dalla Biblioteca fiorentina), offre una traccia: provenienza Gianfilippi [8].

Paolino Gianfilippi era un marchese di Verona che, morto nel 1827, possedeva una cospicua biblioteca. Venduta in parte a Parigi nel 1842-43 e acquistata da G. Libri, essa andò a finire in quella di Lord Ashburnham, e da questa, alla Laurenziana [9]. Se i manoscritti morgagnani che si trovano in questa biblioteca nel fondo Ashburnhamiano hanno provenienza Gianfilippi, è segno che detti manoscritti si trovavano a Verona, in quella biblioteca privata, nelle prime decadi del secolo XIX.

Due catene di fatti concernenti una raccolta di manoscritti del grande Forlivese: due catene che ci portano entrambe nelle prime decadi dell'ottocento nel Veneto, in due biblioteche private di due città vicine: Verona e Padova.

Se si può trovare l'anello di congiunzione e provare che il Gianfilippi di Verona acquistasse la biblioteca Dainese di Padova, io credo che si potrebbe affermare che questi della Laurenziana sono quei celebri manoscritti che il Morgagni aveva promesso al Girardi e sulla cui sorte gli storici si sono tanto arrovellati.

L'evenienza può ritenersi ammissibile anche se non documentabile, oltre che per le coincidenze di date e di località che uniscono le due catene di fatti, per i seguenti motivi:

1° Morgagni annetteva maggiore importanza alle carte promesse (ma non date) al Girardi, di quella che riconosceva a quelle già dategli, contenenti consulti (che aveva a centinaia) appunti, lettere, ecc. Ed effettivamente i manoscritti della Laurenziana mostrano maggior valore di semplici consulti che il Morgagni stesso aveva distrutti in notevole quantità.

2° I manoscritti della Laurenziana sono di opere che, o per stesura, o per contenuto, fino ad ora sono rimaste incognite agli studiosi, almeno a quanto risulta.

3° Se le carte promesse al Girardi e queste della Laurenziana costituissero due raccolte differenti, occorrerebbe pensare che, oltre ai fondi cospicui noti, ne esistessero altri *due*, ugualmente cospicui e fino ad ora ignorati.

(8) MINISTERO DELLA PUBBLICA ISTRUZIONE, *Indici e cataloghi*. – VIII. *I codici Ashburnhamiani della R. Biblioteca Mediceo-Laurenziana di Firenze*. Vol. I, fasc. 4, Roma 1896.

(9) L. DELISLE, *Les manuscrits du Compte d'Ashburnham. Rapport au Ministre de l'I. P. et des Beaux-Arts*. Paris, Imprimerie Nationale (1883).

Dunque, per le ragioni basate su principi di economia, di ragionevolezza, di coincidenza per lo meno assai curiose, posso quindi supporre, con una certa verosimiglianza, che l'anello Dainese–Gianfilippi sia chiuso e che presumibilmente i manoscritti morgagnani fiorentini sieno proprio quelli che il grande Forlivese aveva promesso al Girardi e la cui sorte era rimasta ignorata: quei manoscritti che si cercavano da 182 anni, inutilmente.

Se le opportune ricerche eseguite sul luogo non hanno condotto a dati certi documentari sul trapasso della biblioteca Dainese in quella Gianfilippi, la probabilità fondata esiste anche a giudizio dei competenti locali. E qui sento il dovere di ringraziare la Direzione della Biblioteca Civica di Verona dove si trova un ampio fondo Gianfilippi.

E tale è anche l'opinione gentilmente riferitami da L. Messedaglia e D. Giordano, da me interpellati, quali profondi studiosi del Morgagni.

Lo siano o meno, ad ogni modo questi manoscritti costituiscono sempre un documento di eccezionale valore per illuminare di nuova luce il grande Forlivese, per rivelarne una parte sconosciuta, per offrirci sicure notizie su la sua persona.

È un Morgagni nuovo, sotto un certo punto di vista, che ora viene alla luce, in sei dei dieci volumi di cui è costituito il fondo.

E veniamo ora ad un rapidissimo esame del contenuto di quest'ultimo.

Come ho detto, questo è formato da dieci volumi in folio quasi tutti autografi del Morgagni di cui sei sono intitolati *Opera postuma*, due contengono la prima stesura del *De sedibus et causis morborum* uno similmente quella delle *Adversaria anatomica* ed uno quella delle *Epistolae Anatomicae*.

Tralasciando il valore documentario del pensiero morgagnano rappresentato dalla prima stesura delle immortali opere sopra citate, valore che distingue nettamente questi manoscritti vergati sotto l'impulso della creazione, dagli analoghi forlivesi che ne costituiscono la bella copia, simile in tutto alla stampa, mi fermerò particolarmente sui primi sei contenenti opere del tutto ignorate.

E prima di tutto lo sconosciuto (o conosciuto solo per riferimenti generici) maestro di medicina teorica, l'illustratore e commentatore scolastico di Galeno, Ippocrate ed Avicenna, attività così lontana, almeno sembrerebbe, da quella nota fino ad oggi del Morgagni anatomico e anatomo–patologo.

Era noto infatti che egli avesse insegnato medicina teorica nell'università Patavina del 1712 al 1715 prima di ascendere alla cattedra di anatomia. Egli stesso in una lettera scritta al giovane Larber [10], che gli domandava in qual modo avesse impartito quell'insegnamento, dava qualche riferimento in proposito e aggiungeva che il tema delle lezioni verteva sui suddetti argomenti. Ora, invece, questo prezioso ed incognito materiale di studio è a nostra disposizione, emerso dopo un silenzio di quasi due secoli e mezzo. In questi manoscritti esistono tutti interi i tre anni di lezioni di

(10) D. GIORDANO, *G. B. Morgagni*, Torino, UTET (1941).

medicina teorica impartiti dal grande Maestro: 203 lezioni mirabilmente stese, di mano autografa di lui, secondo il suo metodo di redigere le lezioni dopo averle tenute in aula. E siccome risulta che egli tenesse circa 70 lezioni all'anno, il numero di 203 corrisponde esattamente ai tre anni durante i quali il Morgagni tenne quella cattedra.

Accennava questi al giovane suo discepolo, il metodo da lui seguito nell'impartire dette lezioni di una materia che maggiormente si sarebbe prestata al vecchio canonismo scientifico didattico: ma egli sapeva porre i quesiti in modo del tutto nuovo, mescolando l'antico col moderno così da vivificare ogni argomento.

In questi manoscritti ora messi in luce, ce ne è la prova, ce ne è la materia completa: il Morgagni patologo medico di fronte all'anatomico, l'anatomo-patologo e il clinico dei consulti, era ignoto; l'insegnante e commentatore scolastico era sfuggito all'indagine dello storico, mentre ora esso è lì che può essere studiato, come di fatti lo sarà, per constatare come in questa materia egli abbia potuto porre il sugello della sua indelebile personalità.

E già dalle parole scritte al Larber si può desumere un prezioso insegnamento: come la storia della vecchia medicina incastonata, diremo così, nella moderna, possa essere completamento utile per una visione più completa della medicina stessa.

Un'altra parte dei manoscritti autografi morgagnani concerne la vita dell'illustre personaggio: non sono notizie per servire alla sua biografia, sono invece vere ed *autentiche autobiografie*, scritte di suo pugno, una in latino, tre in italiano di cui l'ultima, in testa alla quale è scritta: « Notizie mandate in fin di maggio 1730 al sig. Muratori come stese e raccolte da' miei giovani », contiene aggiunte, precisazioni, correzioni del Morgagni stesso, tali da superare in estensione il testo.

Lamentava L. Messedaglia, e ne ripeteva il lamento D. Giordano [11], la mancanza di una biografia esatta del Nostro: ora essa esiste ed è posta in chiara luce con notizie ineccepibili, data la proverbiale probità del soggetto che lo rese noto alla pari dello scienziato illustre e dell'erudito profondo.

Preziosi sono anche gli indici dei manoscritti: ce n'è uno che riguarda un gruppo di oltre diecimila carte, redatto in maniera scrupolosa, indicante ogni suddivisione di esse, riunite a seconda del formato e controdistinte ciascuna con un numero.

Chiude la vasta collezione di manoscritti un indice per materia così fitto, così minuzioso, così irto di correzioni ecc. da esserne quasi impossibile la lettura.

Come si vede, un materiale prezioso è raccolto in questi dieci volumi: prezioso per non essere mai stato visto fino ad ora, sia per la stesura originale di opere di importanza mondiale, sia per essere effettivamente ignorate o note per riferimento.

(11) D. Giordano, loc. cit.

COMUNICAZIONI VARIE

Il Presidente porge il cordiale saluto suo e della Classe al prof. Edgar Schieldrop dell'Università di Oslo e membro dell'Accademia Reale di Norvegia che è presente alla seduta.

Il prof. Giordani comunica quindi che è uscito il fascicolo IV (aprile 1953) dei « Rendiconti » e constata con compiacimento che la pubblicazione ha ormai conseguito e mantiene un ritmo regolare.

PLICHI SUGGELLATI

Il Presidente presenta un plico suggellato dell'ing. Pietro Pisa, consegnato alla Cancelleria in data 1° corrente mese.

La Classe, constatata l'integrità dei sigilli, delibera che il plico di cui trattasi sia conservato nell'archivio accademico a disposizione dell'interessato.

PRESENTAZIONE DI LIBRI

Il Segretario Accademico De Blasi presenta una pubblicazione del dott. ing. Giovanni Massari dal titolo: « Risanamento igienico dei locali umidi » e mette in evidenza che l'Autore, da molti anni Conservatore della Farnesina, si dedica da più di un ventennio agli studi sull'umidità delle murature e ha raccolto osservazioni, prove, analisi ed esperienze di grande importanza. Egli è arrivato, con risultati veramente lusinghieri, alla soluzione di difficili problemi di risanamento sia di importanti monumenti, quali il « Cenacolo » di Leonardo a Milano, il Palazzo della Farnesina e la chiesa di S. Marco a Roma, sia di edifici utilitari, come il fabbricato demaniale di Corso di Porta Vittoria a Milano. Ha tenuto sotto controllo, per dieci anni, con ripetute misure sperimentali, i palazzi dell'Accademia.

Il Socio De Blasi, dopo aver ricordato che i lavori di risanamento degli edifici dell'Accademia furono affidati all'ing. Massari molti anni or sono da una Commissione composta dallo stesso prof. De Blasi e dal compianto Architetto prof. Giovannoni, manifesta il suo compiacimento di aver potuto presentare un'opera veramente utile e di grande importanza, quale è appunto la pubblicazione edita dal predetto ingegnere.

Il Presidente ringrazia il Collega De Blasi e si riserva di far pervenire un ringraziamento anche all'Autore.

Il Segretario Accademico illustra le pubblicazioni pervenute in omaggio, mettendo in particolare evidenza l'opera: « Reports of the Swedish Deep-sea Expedition », un volume della Direzione Generale delle Miniere e dei Servizi Geologici del Portogallo dal titolo: « Le Portugal Hydromineral », il testo delle commemorazioni del compianto Socio Straniero Paul Niggli, tenute il 24 gennaio 1953 nella Eidgenössische Technische Hochschule di

Zurigo dai proff. P. Karrer e Ernst Brandenberger e un lavoro del Socio D'Erasmo, estratto dal « Bollettino della Società Geografica Italiana », vol. VI, n. 1, dal titolo: « A proposito di una Nota del prof. Luigi Ranieri sul bradisisma del Serapeo di Pozzuoli ».

PRESENTAZIONE DI NOTE E MEMORIE

Il Socio Majorana, presentando una sua Nota dal titolo: « Gravità, inerzia e relatività », spiega che essa si riferisce alla continuazione della sua attività, che dura da molti anni. Tale Nota stabilisce, a suo avviso, la mancanza di proporzionalità fra massa pesante e massa inerte (in particolare nei casi di massimo *difetto di massa*, come Litio e Cromo).

Il prof. Majorana spiega il suo deciso orientamento con la sua lunga abitudine all'esperimento. Accenna poi a risultati sperimentali da lui ottenuti, che risalgono al 1894, nel quale anno presentò la prima sua Nota ai Lincei. Egli ricorda i principali risultati ottenuti: analogia fra raggi X e u.v. (con Alfonso Sella); attrazione fra metalli eterogenei; scoperta della birifrangenza magnetica; microfono idraulico; telefonia senza fili (già dal 1904); velocità della luce da sorgenti in moto; assorbimento della gravitazione; telefonia ottica con raggi u. v. e u. r.; nuovi fenomeni fotoelettrici, centrifugazione elettronica; nuovo fenomeno Kerr per metalli non ferromagnetici; e le ricerche sulla relatività che, nell'ultimo periodo, durano dal 1941.

Conclude affermando che, per quanto nessuna discussione o grave critica sia stata fatta pubblicamente ai suoi lavori, la detta sua attività sperimentale non sia stata garanzia sufficiente per ottenere mezzi atti a facilitargli e ad accelerare le sue ricerche.

Il Presidente ringrazia il Collega Majorana.

Presentano Note per la pubblicazione nei « Rendiconti » i Soci: Majorana, Ascoli, Segre (per conto del Collega Bompiani), Cotronei, Signorini, Puntoni, Armellini, Pupilli, Bonino e Fabiani.

Il Socio Carnera presenta una sua Memoria dal titolo « Valori angolari dei micrometri e livello dei telescopî zenitali delle Stazioni di latitudine ».

Il Presidente ringrazia i Colleghi che hanno presentato Note e la predetta Memoria, osservando che, per quest'ultima, sussistono le solite riserve di carattere finanziario.

Viene letto l'elenco delle Note inviate alla Cancelleria.

Le seguenti Note saranno pubblicate in fascicoli successivi:

Andrisano R. e Pappalardo G. – Spettri U.V. di alcuni derivati nitro-furil-etilenici (pres. dal Socio G. B. Bonino).

Chierici L. e Passerini R. – Su alcuni fenil-alchil- e difenil seleniuri (pres. dal Socio G. B. Bonino).

Emiliani F. e Pellizzer R. – Cella elementare e gruppo spaziale della simonellite. Nota II (pres. dal Corrisp. C. Andreatta).

FORTINI T. – Miglioramento delle orbite di cinque piccoli pianeti (pres. dal Socio G. ARMELLINI).

SEGRE A. G. – Risultati preliminari dell'esplorazione ecometrica del Basso Tirreno (pres. dal Socio R. FABIANI).

ZACCHEI A. M. – Ulteriori ricerche sui centri tegmentali rombencefalici degli Anfibi Anuri (pres. dal Socio G. COTRONEI).

OPERE PERVENUTE IN DONO ALL'ACCADEMIA

presentate nella seduta del 13 giugno 1953

Atti del Convegno Nazionale sulle utilizzazioni del Metano, 13–15 settembre 1952. Piacenza, Camera di Commercio, Industria e Agricoltura, 1952.

BRANDENBERGER Ernst. — Vedi: KARRER Paul.

D'ERASMO Geremia. — *A proposito di una nota del prof. Luigi Ranieri sul bradisisma del Serapeo di Pozzuoli*. Estr. da « Bollettino della Società Geografica Italiana », s. 8ª, vol. VI, 1953, n. 1.

KARRER Paul und BRANDENBERGER Ernst. — *Prof. Dr. Paul Niggli. Ansprachen zu seinem Gedenken gehalten am 24 Januar 1953 an der Eidgenössischen Technischen Hochschule*. Zürich, Polygraphischer Verlag, 1953. Pp. 23, in 8°.

MASSARI GIOVANNI. — *Risanamento igienico dei locali umidi*. Milano, Hoepli, 1952. Pp. X–298, in–8°, con figg.

MENEZES (DE) CORREA ACCIAIUOLI Luiz. — *Le Portugal hydromineral*. Vol. I, Lisbonne, Direction Générale des Mines et des Services Géologiques, 1952. Pp. 284, in–8°.

MONTEROSSO Bruno. — *Liposcelis divinatorius* (*Müll.*). I: *Osservazioni morfologiche e biologiche*. II: *Partenogenesi costante e completa*. III: *Identificazione sistematica di una forma che vive in Sicilia* (*L. bostrychoplilus Bad.*). Estr. da « Atti dell'Accademia Gioenia di Scienze Naturali », s. 6ª, vol. VIII, 1951–52, « Bollettino delle sedute dell'Accad. Gioenia », s. 4ª, vol. II, fasc. 3, 1952.

MONTEROSSO Bruno. — *Raccolta e preparazione degli Araneidi* (Note araneologiche, XXVIII). Estr. da « Bollettino dell'Associazione Romana di Entomologia », vol. IV, 1949, nn. 1–2.

— *Studi sulla respirazione di pesci*. Nota II: *Materiali per la cosiddetta facoltà atmotropica*. Estr. da «Atti della Accademia Gioenia di Scienze Naturali», s. 6ª, vol. VIII, 1951-52.

— *Vita privata dell'Accademia Gioenia dal 1824 al 1949*. Estr. da « Bollettino delle Sedute dell'Accademia Gioenia di Scienze Naturali in Catania », s. 4ª, 1950, fasc. 5.

MONTEROSSO Bruno e OCCHIPINTI Concetta. — *Ricerche sui Lepismatidi*. 1. *Muta ed esuviofagia in « Ctenolepisma ciliata »* (*Duf.*) Estr. da « Atti dell'Accademia Gioenia di Scienze Naturali in Catania », s. 6ª, vol. VIII, 1951–52.

OCCHIPINTI Concetta. — Vedi: MONTEROSSO Bruno e OCCHIPINTI Concetta.

PALLOTTI Giuseppe. — *A particular height effect and proposal of experimental verification*. S. n. t. Pp. 3, in–4°.

Reports of the Swedish Deep–sea Expedition 1947–1948. Vol. V: *Sediment Coves from the East Pacific*, fasc. I. Con appendice. Göteborg, Kungl. Vetenskaps–och Vitterhets–samhälle, 1952. Voll. 2, in–8°.

RUBIÒ Santiago. — *De la Irrealidad al Relativismo*. Estr. da « La Ingeniería », 1952.

— *Rotaciónes Corpuscolares*. Buenos Aires, G. Gili, 1952. Pp. 167, in–8°.

— *Una pregunta a los Físicos*. Foglio dattiloscritto.

D. DE BLASI e U. AMALDI.

INDICI DEL VOLUME

INDICE PER AUTORI

A

AGELLI M., vedi VERONA O.
ALNERI E., vedi CANONICA L.
ARMELLINI G., Osservazioni sul problema dei due corpi di masse variabili e sopra alcune sue applicazioni alla cosmogonia, *727*.
ARUFFO G., Sul differenziale generalizzato delle forme differenziali esterne. Nota II, *13*.
— Forme differenziali esterne di classe 0 e funzioni di più variabili complesse, *381*.

B

BAFFONI G. M., Azione dell'ormone tiroideo sul neurone di Mauthner. Esperienze su Anfibi urodeli. Nota II, *138*.
— Modificazioni metaboliche dell'epatopancreas di «Callianassa laticauda» nella castrazione parassitaria, *436*.
BALCONI M., Di un nuovo metodo di calcolo delle analisi delle rocce e di alcune notevoli conseguenze, *130*.
BALLARIO M. C., Caratteristiche fisiche e spaziali di stelle con $V \geq 40$ km/sec. Effetto di longitudine per un gruppo di stelle veloci, *251*.
BELOFF-CHAIN A., CATANZARO R., CHAIN E. B., D'AGOSTINO O., MASI I., POCCHIARI F., e ROSSI C., Destino del glucosio uniformemente marcato nel diaframma di ratti normali e diabetici da allossana in presenza ed in assenza di insulina, *589*.
BELOFF-CHAIN A., CATANZARO R., CHAIN E. B., LONGINOTTI L., MASI I., POCCHIARI F. e ROSSI C., Influenza del 2-4-dinitrofenolo sul metabolismo del glucosio e del fosfato in diaframma di ratto, *740*.
BENIGNO P. e BERTI T., Densità di popolazione batterica e sviluppo dell'«E. Coli», *687*.
BERNARD J. J., Sur une distribution composée des vitesses d'agitation moléculaire, *46*.
BERTI T., BENIGNO P.
BERTOLINI F., Traiettorie luminose in uno spazio trasparente. – Esistenza di regioni non illuminate da una sorgente luminosa puntiforme, *26*.
— Una generalizzazione del teorema di Abel sulle serie di potenze, *483*.
BIANCHERI E., Ulteriori ricerche sul rapporto tra potenziale metabolico e potere inibente dei tessuti. Variazione dell'effetto inibente in seguito a disturbi correlativi, *833*.
BIANCO I., vedi MONTALENTI G.
BIOCCA E. e LE ROUX P. L., Osservazioni sul ciclo evolutivo di un nuovo Echinostomide, *539*.
— e BRONZINI E., «Uncinaria thapari» n. sp. parassita dell'«Ailurus fulgens», *824*.
BIRINDELLI C., Integrazione dei sistemi lineari ai differenziali totali illimitatamente integrabili in due variabili indipendenti in un prescritto campo più volte connesso, *386*.
BOAGA G., Profilo gravimetrico fra il Tirreno e lo Jonio lungo il parallelo 40°, *175*.
— Risoluzione del triangolo geodetico ellissoidico per mezzo degli elementi della sua rappresentazione conforme sul piano, *349*.
BOLOGNARI A., La localizzazione delle sostanze sulfidriliche nel corpo bianco dei Molluschi Cefalopodi, *329*.
BOMPIANI E., Complessi lineari di piani nello spazio a cinque dimensioni, *719*.
BORDONI P. G., Su certe proprietà generali dei raggi di girazione delle figure piane convesse, *238*.
— Limitazioni per il raggio di girazione baricentrale delle figure piane a contorno convesso, *413*.
— Deduzione di un'equazione di stato dei solidi dalla teoria delle trasformazioni termoelastiche finite, *784*.
BOSSOLASCO M., Caratteristiche e genesi del moto ondoso del mare nel Golfo di Genova, *57*.
BOVET D., vedi GATTI G. L.
BRONZINI E., vedi BIOCCA E.

C

CAFIERO F., Sul passaggio al limite sotto il segno d'integrale di Stieltjes–Lebesgue negli spazi astratti, con masse variabili con gli integrandi, *488*.

CALIGO D., Nuovi complementi analitici e numerici allo studio delle aste vibranti. Nota I, *36*.

— Nuovi complementi analitici e numerici allo studio delle aste vibranti. Nota II, *223*.

CALOI P. e SPADEA M. C., Su una questione di idrodinamica concernente il lago di Garda, *353*.

CANONICA L., CARDANI C. e TRAVE R., Sulla condensazione di Knoevenagel: azione disidratante dei sali di alcune basi organiche, *814*.

— MARTINOLLI M. e ALNERI E., Sull'ossidazione dei composti etilenici con acqua ossigenata. Nota I, *105*.

CAPRIZ G., Sulla applicazione del metodo della trasformata parziale di Laplace ad intervallo di integrazione finito ad un problema di elasticità piana, *401*.

CARDANI C., vedi CANONICA L.

— vedi QUILICO A.

CARNERA L., Commemorazione del Corrispondente LUIGI VOLTA, *156*.

CASARINI A. e ROSSI N., Cellule cianofile e cellule mucoidi dell'adenoipofisi nelle disendocrinie umane e sperimentali, *666*.

CASTOLDI L., Calcolo della connessione affine integrale associata ad un punto di una varietà a connessione affine, *760*.

CATANZARO R., vedi BELOFF–CHAIN A.

CATTANEO L., Contributo alla conoscenza della commessura bianca anteriore dell'encefalo, *819*.

CHAIN E. B., vedi BELOFF–CHAIN A.

CHIERICI L. e PASSERINI R., Spettri u. v. di alcuni fenil–seleniuri e del difenil–selenio, *99*.

CIMINO M., Sulla variazione del profilo di alcune righe spettrali dal centro al lembo del Sole. Nota III, *243*.

— Sulla variazione del profilo di alcune righe spettrali dal centro al lembo del Sole. Nota IV, *500*.

— e FORTINI T., Fotometria fotografica dell'eclisse totale di luna del 29 gennaio 1953 e la luminescenza del suolo lunare per la radiazione ultravioletta solare, *619*.

CIMINO M., Sull'equilibrio stellare convettivo in condizioni politropiche generalizzate, *779*.

COLOMBO G., Sopra una questione di ottica geometrica, *627*.

COLONNA M. e RISALITI A., Ricerche sugli N–ossidi aromatici. Spettro di assorbimento U. V. dell'N–ossido della 2–fenil–chinolina e comportamento chimico, *809*.

COMASCHI CARIA I., Primo rinvenimento di un Mammifero terrestre nel Miocene sardo. Nota preliminare, *650*.

CONFORTO F., Sulle funzioni abeliane singolari, *754*.

CORBELLINI A. e LANZA P., Coulombometria di sostanze gassose. Nota III, *294*.

— vedi LANZA P.

CORTI R., Su « Hypericum elodes » Huds, relitto eu–atlantico della selva di San Rossore (Pisa), *308*.

— Il significato dl tessuto nucellare e la sua funzione organizzatrice durante lo sviluppo del seme delle Querci, *530*.

COSSU A., Alcune osservazioni sul confronto tra connessioni affini e metriche riemanniane, *29*.

CREPAX P., Sulla formazione di actomiosina, *332*.

— Risposta muscolare al potassio e analisi dei fattori che la compongono, *842*.

CURTI R. e LOCCHI S., Studio polarografico di alcuni N–ossidi, *796*.

D

DABONI L., Applicazione al caso del cubo di un metodo per il calcolo per eccesso e per difetto della capacità elettrostatica di un conduttore, *461*.

D'AGOSTINO O., vedi BELOFF–CHAIN A.

DANUSSO F. e FADIGATI E., Velocità ultrasonora e proprietà termodinamiche adiabatiche di composti organici liquidi, *81*.

DE CESARIS–COROMALDI L., vedi URBANI E.

DE GIORGI E., Definizione ed espressione analitica del perimetro di un insieme, *390*.

DEL MARCO A., vedi GIACOMETTI G.

DEMANGEOT J., Sulla struttura della regione della Laga (Abruzzi), *127*.

DEMICHELIS F. e MALVANO R., Coincidenze γ nel $^{214}_{84}Po$, *259*.

DESIO A., Qualche considerazione sulla tettonica del Peloponneso (Grecia), *373*.

DOLCETTA M. e LANZA P., Polarografia anodica con microelettrodi di platino rotanti. Nota I, *642*.

DOLLFUS R. PH., Sulla forma adulta di un Echinostomide (Trematoda Digenea) ottenuta sperimentalmente nel ratto bianco di laboratorio, *658*.

E

EMILIANI F. e PELLIZZER R., Cella elementare e gruppo spaziale della simonellite. Nota I, *652*.

ERDÉLYI A., Funzioni epicicloidali, *393*.

F

FABIANI R., Sulle interpretazioni geologiche delle anomalie negative della gravità regionale in Sicilia, *365*.

FADIGATI E., vedi DANUSSO F.

FAEDO S., Sulla maggiorazione dell'errore nei metodi di Ritz e dei minimi quadrati, *466*.

FAVERO P., Studi di polarografia oscillografica. – I. Sulla cinetica della reazione tra l'acido piruvico e l'ammoniaca. Comportamento oscillografico dell'acido piruvico. *433*.

— Studi di polarografia oscillografica. Sulla cinetica della reazione tra l'acido piruvico e l'ammoniaca. – II. Dispositivo sperimentale e risultati delle misure effettuate sul primo picco di corrente, *520*.

FAVINI G., vedi SIMONETTA M.

FERRO R., Sulle leghe dell'Uranio col Bismuto. Nota II, *89*.

FICHERA G., Condizioni perché sia compatibile il problema principale della statica elastica, *397*.

FINZI B., Su le equazioni di campo della teoria relativistica unitaria di Einstein, *581*.

FOFFANI A., Cella polarografica a volume variabile di soluzione, adatta per misure cinetiche a controllo continuo del pH, *281*.

— Ricerche cinetiche per via polarometrica nel gruppo delle cumarine, *418*.

FORNASARI E., SCARPA M. e LANZA P., Sul comportamento polarografico di alcuni derivati dello iodio positivo, Nota I, *70*.

— — — Sul comportamento polarografico di alcuni derivati dello iodio positivo. Nota II, *272*.

FORTE B., Di alcune proprietà cinematiche riguardanti il moto rigido di una sfera su se stessa, *765*.

FORTINI T., vedi CIMINO M.

FRESA A., Osservazioni di variabili ad eclisse *616*.

G

GAGLIARDO E. e KORNER M., Titolazione amperometrica del rame con etilxantato di potassio, *77*.

GALASSO R., vedi URBANI-MISTRUZZI L.

GALLARATI D., Sul numero dei complessi algebrici di rette, di ordine assegnato, che contengono una data rigata algebrica, *213*.

— Sulle varietà di S_r composte di ∞^r S_k, i cui S_k appartengono al massimo numero di complessi lineari, *408*.

GALLI M., Sopra una variante cinematica dell'esperimento di Sagnac. Nota I, *635*.

GAMBA A. e RADICATI L. A., Sopra un teorema per la riduzione di talune rappresentazioni del gruppo simmetrico, *632*.

GATTI G. L. e BOVET D., Proprietà simpatolitiche ed effetti centrali nei glicinammidi e alaninammidi della serie del 2-metil-1,4-benzodiossano, *645*.

GHIRARDELLI E., Sul determinante germinale in « Spadella cephaloptera » Busch, *150*.

GIACHETTI A., vedi SPADOLINI I.

GIACOMETTI G. e DEL MARCO A., Comportamento polarografico del p-NO_2-acetofenone e di alcuni suoi prodotti di riduzione, *511*.

GOPALKRISHNAN K. S., vedi THIRUMALACHAR M. J.

GORTANI M., Commemorazione del Socio GAETANO ROVERETO, *336*.

GRÜNANGER P., vedi MUGNAINI E.

GUGGENHEIMER H., Geometria pseudo-kähleriana. *220*.

I

INFANTELLINA F., Le variazioni di tensione delle contrazioni muscolari dopo stimolazione tetanizzante, *839*.

K

KLINGENBERG W., Sopra il numero degli ordinamenti di un corpo, *395*.

KÖRNER M., vedi GAGLIARDO E.

L

Lanza P. e Corbellini A., Sulla determinazionedi *n* nell'elettrolisi polarografica accompagnata da processi secondari. Applicazione alla coulombometria del nitroprussiato. Nota II, *65*.
— Vedi Corbellini A.
— Vedi Dolcetta M.
— Vedi Fornasari E.
Le Roux P. L., vedi Biocca E.
Locchi S., vedi Curti R.
Longinotti L., vedi Beloff-Chain A.

M

Magni L., vedi Romeo A.
Majorana Q., Gravità, inerzia e relatività, *733*
Malvano R., vedi Demichelis F.
Marchetti L., Determinazione del campo di velocità di una corrente subsonica piana, *42*.
Margaria R., La funzione essenziale del liquido cerebro-spinale, *188*.
Mariani A. e Toschi G., Elettroforesi su carta di proteine muscolari, *285*.
Martinolli M., vedi Canonica L.
Masi I., vedi Beloff-Chain A.
Mengarda G., vedi Sabbadin A.
Merli L., Il fenomeno di Gibbs nell'interpolazione delle funzioni discontinue. Nota I, *18*.
— Il fenomeno di Gibbs nell'interpolazione delle funzioni discontinue. Nota II, *194*.
Merlino F. S., Contributo allo studio della lastra circolare su suolo elastico, *231*.
Messeri A., Alcuni dati sulla struttura submicroscopica delle fibre di tensione di un campione di legno di pioppo, *315*.
Mineo C., Sul modo di risolvere una indeterminazione nel problema di Clairaut generalizzato delle configurazioni degli astri fluidi rotanti in equilibrio relativo, *724*.
Mineo M., Sopra un calcolo più approssimato della deviazione della geodetica da una sezione normale su una superficie qualunque, *255*.
Montalenti G., Silvestroni E. e Bianco I., Nuove indagini sul problema della microcitemia, *183*.
Mugnaini E. e Grünanger P., Sintesi eterocicliche con l'alcool propargilico e il butindiolo. Nota I, *95*.
Mugnaini E. e Grünanger P., Sintesi eterocicliche con l'alcool propargilico e il butindiolo. Nota II, *275*.

N

Nobile V., Sulla opportunità di direttive generali nella ricerca di leggi di coordinamento fra i moti stellari. Nota III, *169*.

P

Palumbi G., Valutazione di alcune strutture ritenute nervose sensitive, *534*.
Panizzi L., vedi Quilico A.
Passerini R., vedi Chierici L.
Pazzini A., Dieci ignorati volumi di manoscritti autografi morgagnani, *851*.
Pellizzer R., vedi Emiliani F.
Penso G., Il ciclo di sviluppo del fago nella cellula batterica, *679*.
Perri T., La simmetria speculare in biologia con particolare riguardo agli arti soprannumerari indotti, *563*.
— Sulle variazioni della competenza artoformativa negli Anfibi Anuri a seconda dello stadio, *845*.
Peruzzi P. e Zanghi M., Osservazioni sui riflessi miotatici nell'uomo, *668*.
Picci G., vedi Verona O.
Pini B., Sulle singolarità delle soluzioni della equazione $\Delta u + cu = 0$, *21*.
— Un problema di valori al contorno per l'equazione $\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$. Nota I, *609*.
— Un problema di valori al contorno per l'equazione $\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$. Nota II, *746*.
Pocchiari F., vedi Beloff-Chain A.
Pontieri G., Attività catalasica delle pettenkoferie da uretano, *304*.
Pucci C., Sul problema di Cauchy per le equazioni lineari a derivate parziali, *198*.
— Sulla compattezza di successioni di funzioni reali, *471*.

Q

Quilico A., Cardani C. e Panizzi L., Sulla struttura della flavoglaucina, *358*.

R

Radicati L. A., vedi Gamba A.
Rasmussen J. O., vedi Rollier M. A.

RICCI G., Nuovo metodo per le ricerche cronologiche dei calendari, *500*.
RIGGIO BEVILACQUA Ł., Piridinnucleotidi in germogli eziolati di Avena, *827*.
RISALITI A., vedi COLONNA M.
ROGNONE L., vedi URBANI E.
ROLLIER M. A. e RASMUSSEN J. O. Jr., Studi sui nuclidi del terbio in difetto di neutroni, *526*.
ROMEO A. e MAGNI L., Sintesi di alcuni β–amminoacidi bibasici, *423*.
RONCATO A., Commemorazione del Socio VIRGILIO DUCCESCHI, *443*.
ROSSI C., vedi BELOFF-CHAIN A.
— vedi CASARINI A.
ROSSI S., Sulle triazine asimmetriche: derivati 3 N-piperazinici, *113*.
RUSSO S., vedi URBANI E.

S

SABBADIN A. e MENGARDA G., Azione femminizzante di estratti vegetali nel differenziamento sessuale di « Rana esculenta », *153*.
SCARANO E., Comportamento polarografico di alcuni metalli nobili in soluzioni debolmente complessanti, *428*.
SCARPA M., vedi FORNASARI E.
SERGI S., I profanerantropi di Swanscombe e di Fontéchevade, *601*.
SILVESTRONI E., vedi MONTALENTI G.
SIMONETTA M. e FAVINI G., Sulla cinetica della reazione tra 1–cloro–2–nitroetano ed acqua. Nota I, *119*.
— — Sulla cinetica della reazione tra 1–cloro–2–nitroetano ed acqua. Nota II, *268*.
— — Sulla cinetica della reazione tra nitrocloroderivati aromatici e idrato potassico in soluzione in miscele acqua–diossano, *505*.
— — Sulla cinetica della reazione tra nitrocloroderivati aromatici e idrato potassico in soluzione idroalcolica, *804*.
SPADOLINI I. e GIACHETTI A., Sulla formazione endogena di acetilcolina nel metabolismo della fibra miocardica e sulla sua importanza per l'automatismo del cuore, *596*.
STEFANELLI A., I neuroni di Mauthner sono neuroni « larvali » anche nei Teleostei, *550*.
STEFANI R., Un particolare modo di accoppiamento negli Insetti Embiotteri, *544*.
STORCHI E., Determinazione dei potenziali nei campi elettromagnetici generalizzati, *261*.
— Sul principio dell'azione potenziale stazionaria, *771*.

T

TERRACINI A., Commemorazione del Socio GINO FANO, *702*.
THIRUMALACHAR M. J. e GOPALKRISHNAN K. S., Osservazioni sulla morfologia del « Penicillium chrysogenum » in cultura sommersa. – IV. Sviluppo di pallette scleroziali di « P. chrysogenum Thom » in cultura sommersa, *691*.
TODESCHINI B., Sul potenziale elettromagnetico nella teoria unitaria di Einstein, *495*.
TONANI F., La ripartizione degli elementi fra fase silicata e metallica nelle meteoriti ed il calore di formazione degli ossidi. – II. Forma della relazione fra log K. e ΔI_0. *298*.
TOSCHI G., vedi MARIANI A.
TRAVE R., vedi CANONICA L.
TRICOMI F. G., Determinazione del valore di un classico prodotto infinito, *3*.

U

URBANI E., Osservazioni fotometriche sull'oocite in crescita di « Antedon rosacea » Lamarck, *558*.
— e DE CESARIS-COROMALDI L., Osservazioni sulla vita latente. – II. Studio delle proteinasi di « Artemia salina», L., *144*.
— RUSSO S. e ROGNONE L., Osservazioni sulla vita latente. – III. Studio delle amilasi di « Artemia salina » L, *697*.
URBANI-MISTRUZZI L. e GALASSO R., Osservazioni citologiche sulla ghiandola dell'albume di « Eobania vermiculata » (Mueller), *323*.

V

VACCARO G., Esame di singolarità superficiali. – II. Massimo numero di punti $(n-2)$–pli inflessionali di una superficie algebrica d'ordine n, *203*.
— Sull'isometria di calotte appartenenti a due varietà, *404*.

VARDABASSO S., Analogie geologiche tra la Sardegna e l'Africa Minore. Nota I, *8*.
— Analogie geologiche tra la Sardegna e l'Africa Minore. Nota II, *178*.
VECCHI E., Ricerche polarografiche su soluzioni in ammoniaca anidra a temperatura ambiente e pressione normale (soluzioni di Divers), *290*.
VERONA O. e AGELLI M., Qualche ricerca sull'azione antibiotica dell'acido cogico, *671*.
VERONA O. e PICCI G., Intorno all'azione inibitrice dell'actidione sui lieviti della fermentazione vinaria, *680*.
VESENTINI E., Sulle molteplicità effettive delle curve polari, *209*.

Z

ZANGHI M., vedi PERUZZI P.
ZANOBETTI D., Sul periodo transiente dello « skin effect », *791*.
ZIN G., Sull'esistenza in un dominio jordaniano di funzioni olomorfe all'interno e convergenti al contorno verso valori assegnati, *476*.
— Contributo alla risoluzione del problema piano di Dirichlet, *750*.

INDICE PER MATERIE

A

Aerodinamica. — Sur une distribution composée des vitesses d'agitation moléculaire. BERNARD J. J., *46*.

— Determinazione del campo di velocità di una corrente subsonica piana. MARCHETTI L., *42*.

Analisi funzionale. — Sulla compattezza di successioni di funzioni reali. PUCCI C., *471*.

Analisi matematica. — Forme differenziali esterne di classe 0 e funzioni di più variabili complesse. ARUFFO G., *381*.

— Una generalizzazione del teorema di Abel sulle serie di potenze. BERTOLINI F., *483*.

— Integrazione dei sistemi lineari ai differenziali totali illimitatamente integrabili in due variabili indipendenti in un prescritto campo più volte connesso. BIRINDELLI C., *386*.

— Sul passaggio al limite sotto il segno di integrale di Stieltjes-Lebesgue negli spazi astratti, con masse variabili con gli integrandi. CAFIERO F., *488*.

— Definizione ed espressione analitica del perimetro di un insieme. DE GIORGI E., *390*.

— Funzioni epicicloidali. A. ERDÉLYI, *393*.

— Il fenomeno di Gibbs nell'interpolazione delle funzioni discontinue. Nota I. MERLI L., *18*.

— Il fenomeno di Gibbs nell'interpolazione delle funzioni discontinue. Nota II. MERLI L., *194*.

— Sulle singolarità delle soluzioni della equazione $\Delta u + cu = 0$. PINI B., *21*.

— Un problema di valori al contorno per l'equazione $\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$. Nota I. PINI B., *609*.

— Un problema di valori al contorno per l'equazione $\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$. Nota II. PINI B., *746*.

— Sul problema di Cauchy per le equazioni lineari a derivate parziali. PUCCI C., *198*.

— Determinazione del valore di un classico prodotto infinito. TRICOMI F. G., *3*.

— Contributo alla risoluzione del problema piano di Dirichlet. ZIN G., *750*.

Analisi numerica. — Applicazione al caso del cubo di un metodo per il calcolo per eccesso e per difetto della capacità elettrostatica di un conduttore. DABONI L., *461*.

— Sulla maggiorazione dell'errore nei metodi di Ritz e dei minimi quadrati FAEDO S., *466*.

Anatomia. — Contributo alla conoscenza della commessura bianca anteriore dell'encefalo. CATTANEO L., *819*.

Antropologia. — I profanerantropi di Swanscombe e di Fontéchevade. SERGI S., *601*.

Astronomia. — Caratteristiche fisiche e spaziali di stelle con $V \geq 40$ km/sec. Effetto di longitudine per un gruppo di stelle veloci. BALLARIO M. C., *251*.

— Sulla variazione del profilo di alcune righe spettrali dal centro al lembo del Sole. Nota III. CIMINO M., *243*.

— Sulla variazione del profilo di alcune righe spettrali dal centro al lembo del Sole. Nota IV. CIMINO M., *500*.

— Fotometria fotografica dell'eclisse totale di luna del 29 gennaio 1953 e la luminescenza del suolo lunare per la radiazione ultravioletta solare. CIMINO M. e FORTINI T., *619*.

— Sull'equilibrio stellare convettivo in condizioni politropiche generalizzate. CIMINO M., *779*.

— Osservazioni di variabili ad eclisse. FRESA A., *616*.

— Sulla opportunità di direttive generali nella ricerca di leggi di coordinamento fra i moti stellari. Nota III. NOBILE V., *169*.

— Nuovo metodo per le ricerche cronologiche dei calendari. RICCI G., *50*.

B

Biologia. — Azione dell'ormone tiroideo sul neurone di Mauthner. Esperienze su Anfibi urodeli. Nota II. BAFFONI G. M., *138*.

— Modificazioni metaboliche dell'epatopancreas di «Callianassa laticauda» nella castrazione parassitaria. BAFFONI G. M., *436*.
— La localizzazione delle sostanze sulfidriliche nel corpo bianco dei Molluschi Cefalopodi. BOLOGNARI A., *329*.
— Sul determinante germinale in «Spadella cephaloptera» Busch. GHIRARDELLI E., *150*.
— La simmetria speculare in biologia con particolare riguardo agli arti soprannumerari indotti. PERRI T., *563*.
— Sulle variazioni della competenza artoformativa negli Anfibi Anuri a seconda dello stadio. PERRI T., *845*.
— Azione femminizzante di estratti vegetali nel differenziamento sessuale di «Rana esculenta». SABBADIN A. e MENGARDA G., 153
— I neuroni di Mauthner sono neuroni «larvali» anche nei Teleostei. STEFANELLI A., *550*.
— Osservazioni fotometriche sull'oocite in crescita di «Antedon rosacea» Lamarck. URBANI E., *558*.
— Osservazioni sulla vita latente. – II. Studio delle proteinasi di «Artemia salina» L. URBANI E. e DE CESARIS-COROMALDI L., *144*.
— Osservazioni sulla vita latente. – III. Studio delle amilasi di «Artemia salina» L. URBANI E., RUSSO S. e ROGNONE L., *697*.
— Osservazioni citologiche sulla ghiandola dell'albume di «Eobania vermiculata» (Mueller). URBANI-MISTRUZZI L. e GALASSO R., *323*.

Botanica. — Su «Hypericum elodes Huds.», relitto eu-atlantico della selva di San Rossore (Pisa). CORTI R., *308*.
— Il significato del tessuto nucellare e la sua funzione organizzatrice durante lo sviluppo del seme delle Querci. CORTI R., *530*.
— Alcuni dati sulla struttura submicroscopica delle fibre di tensione di un campione di legno di pioppo. MESSERI A., *315*.

C

Calcolo delle variazioni. — Traiettorie luminose in uno spazio trasparente. – Esistenza di regioni non illuminate da una sorgente luminosa puntiforme. BERTOLINI F., *26*.

Chimica. — Ricerche sugli N-ossidi aromatici. Spettro di assorbimento U. V. dell'N-ossido della 2-fenilchinolina e comportamento chimico. M. COLONNA e RISALITI A., *809*.
— Velocità ultrasonora e proprietà termodinamiche adiabatiche di composti organici liquidi. DANUSSO F. e FADIGATI E., *81*.
— Polarografia anodica con microelettrodi di platino rotanti. Nota I. DOLCETTA M. e LANZA P., *642*.
— Studi di polarografia oscillografica. – I. Sulla cinetica della reazione tra l'acido piruvico e l'ammoniaca. Comportamento oscillografico dell'acido piruvico. FAVERO P., *433*.
— Studi di polarografia oscillografica. Sulla cinetica della reazione tra l'acido piruvico e l'ammoniaca. – II. Dispositivo sperimentale e risultati delle misure effettuate sul primo picco di corrente. FAVERO P., *520*.
— Cella polarografica a volume variabile di soluzione, adatta per misure cinetiche a controllo continuo del pH. FOFFANI A., *281*.
— Ricerche cinetiche per via polarometrica nel gruppo delle cumarine. FOFFANI A., 418.
— Sul comportamento polarografico di alcuni derivati dello iodo positivo. Nota I. FORNASARI E., SCARPA M. e LANZA P., *70*.
— Sul comportamento polarografico di alcuni derivati dello iodo positivo. Nota II. FORNASARI E., SCARPA M. e LANZA P., *272*.
— Titolazione amperometrica del rame con etilxantato di potassio. GAGLIARDO E. e KÖRNER M., *77*.
— Elettroforesi su carta di proteine muscolari. MARIANI A. e TOSCHI G., *285*.
— Sintesi di alcuni β-amminoacidi bibasici. ROMEO A. e MAGNI L., *423*.
— Comportamento polarografico di alcuni metalli nobili in soluzioni debolmente complessanti. SCARANO E., *428*.
— Ricerche polarografiche su soluzioni in ammoniaca anidra a temperatura ambiente a pressione normale (soluzioni di Divers). VECCHI E., *290*.

Chimica biologica. — Destino del glucosio uniformemente marcato nel diaframma di ratti normali e diabetici da allossana in presenza ed in assenza di insulina. BELOFF-CHAIN A., CATANZARO R., CHAIN E. B., D'AGOSTINO O., MASI I., POCCHIARI F. e ROSSI C., *589*.

— Influenza del 2–4–dinitro–fenolo sul metabolismo del glucosio e del fosfato in diaframma di ratto. BELOFF–CHAIN A., CATANZARO R., CHAIN E. B., LONGINOTTI L., MASI I., POCCHIARI F. e ROSSI C., *740*.

Chimica fisica. — Studio polarografico di alcuni N–ossidi. CURTI R. e LOCCHI S., *796*.

— Comportamento polarografico del p–NO_2–acetofenone e di alcuni suoi prodotti di riduzione. GIACOMETTI G. e DEL MARCO A., *511*.

— Sulla cinetica della reazione tra 1–cloro–2–nitroetano ed acqua. Nota I. SIMONETTA M. e FAVINI G., *119*.

— Sulla cinetica della reazione tra 1–cloro–2–nitroetano ed acqua. Nota II. SIMONETTA M. e FAVINI G., *268*.

— Sulla cinetica della reazione tra nitrocloroderivati aromatici e idrato potassico in soluzione in miscele acqua–diossano. SIMONETTA M. e FAVINI G., *505*.

— Sulla cinetica della reazione tra nitrocloroderivati aromatici e idrato potassico in soluzione idroalcolica. SIMONETTA M. e FAVINI G., *804*.

Chimica inorganica. — Sulle leghe dell'Uranio col Bismuto. Nota II. FERRO R., *89*.

Chimica nucleare. — Studi sui nuclidi del terbio in difetto di neutroni, ROLLIER M. A. e RASMUSSEN J. O. Jr., *526*.

Chimica organica. — Sulla condensazione di Knoevenagel: azione disidratante dei sali di alcune basi organiche. CANONICA L., CARDANI C. e TRAVE R., *814*.

— Sull'ossidazione dei composti etilenici con acqua ossigenata. Nota I. CANONICA L., MARTINOLLI M. e ALNERI E., *105*.

— Spettri u. v. di alcuni fenil–seleniuri e del difenil–selenio. CHIERICI L. e PASSERINI R., *99*.

— Sintesi eterocicliche con l'alcool propargilico e il butindiolo. Nota I. MUGNAINI E. e GRÜNANGER P., *95*.

— Sintesi eterocicliche con l'alcool propargilico e il butindiolo. Nota II. MUGNAINI E. e GRÜNANGER P., *275*.

— Sulla struttura della flavoglaucina. QUILICO A., CARDANI C. e PANIZZI L., *358*.

— Sulle triazine asimmetriche: derivati 3 N–piperazinici. ROSSI S., *113*.

Commemorazioni. — Commemorazione del Corrispondente Luigi Volta. CARNERA L., *156*.

— Commemorazione del Socio Gaetano Rovereto. GORTANI M., *336*.

— Commemorazione del Socio Virgilio Ducceschi. RONCATO A., *443*.

— Commemorazione del Socio Gino Fano. TERRACINI A., *702*.

Comunicazioni varie, *162, 345, 449, 567, 857*.

Concorsi a borse di studio, *452*.

Cosmogonia. — Osservazioni sul problema dei due corpi di masse variabili e sopra alcune sue applicazioni alla cosmogonia. ARMELLINI G., *727*.

F

Farmacologia. — Proprietà simpatolitiche ed effetti centrali nei glicinammidi e alaninammidi della serie del 2–metil–1,4–benzodiossano. GATTI G. L. e BOVET D., *645*.

Fisica. — Coincidenze γ nel $^{214}_{84}$Po. DEMICHELIS F. e MALVANO R., *259*.

— Sopra una variante cinematica dell'esperimento di Sagnac. Nota I. GALLI M., *635*.

— Gravità, inerzia e relatività. MAJORANA Q., *733*.

Fisica matematica. — Deduzione di un'equazione di stato dei solidi dalla teoria delle trasformazioni termoelastiche finite, BORDONI P. G., *784*.

— Sopra una questione di ottica geometrica. COLOMBO G., *627*.

— Sulle equazioni di campo della teoria relativistica unitaria di Einstein. FINZI B., *581*.

— Determinazione dei potenziali nei campi elettromagnetici generalizzati. STORCHI E., *261*.

— Sul periodo transiente dello « skin effect ». ZANOBETTI D., *791*.

Fisica teorica. — Sopra un teorema per la riduzione di talune rappresentazioni del gruppo simmetrico. GAMBA A. e RADICATI L. A., *632*.

Fisiologia. — Cellule cianofile e cellule mucoidi dell'adenoipofisi nelle disendocrinie umane e sperimentali. CASARINI A. e ROSSI N., *666*.

— Sulla formazione di actomiosina. CREPAX P., *332*.

— Risposta muscolare al potassio e analisi dei fattori che la compongono. CREPAX P., *842*.

— Le variazioni di tensione delle contrazioni muscolari dopo stimolazione tetanizzante. INFANTELLINA F., *839*.
— La funzione essenziale del liquido cerebro-spinale. MARGARIA R., *188*.
— Osservazioni sui riflessi miotatici nell'uomo. PERUZZI P. e ZANGHI M., *668*.
— Sulla formazione endogena di acetilcolina nel metabolismo della fibra miocardica e sulla sua importanza per l'automatismo del cuore. SPADOLINI I. e GIACHETTI A., *596*.

Fisiologia vegetale. — Ulteriori ricerche sul rapporto tra potenziale metabolico e potere inibente dei tessuti. Variazione dell'effetto inibente in seguito a disturbi correlativi. BIANCHERI E., *833*.
— Piridinnucleotidi in germogli eziolati di Avena. RIGGIO BEVILACQUA L., *827*.

G

Genetica. — Nuove indagini sul problema della microcitemia. MONTALENTI G., SILVESTRONI E. e BIANCO I., *183*.

Geochimica. — La ripartizione degli elementi fra fase silicata e metallica nelle meteoriti ed il calore di formazione degli ossidi. – II. Forma della relazione fra log K e ΔI_o. TONANI F., *298*.

Geodesia. — Profilo gravimetrico fra il Tirreno e lo Jonio lungo il parallelo 40°. BOAGA G., *175*.
— Risoluzione del triangolo geodetico ellissoidico per mezzo degli elementi della sua rappresentazione conforme sul piano. BOAGA G., *349*.
— Sopra un calcolo più approssimato della deviazione della geodetica da una sezione normale su una superficie qualunque. MINEO M., *255*.

Geofisica. — Caratteristiche e genesi del moto ondoso del mare nel Golfo di Genova. BOSSOLASCO M., *57*.
— Su una questione di idrodinamica concernente il lago di Garda. CALOI P. e SPADEA M. C., *353*.

Geologia. — Sulla struttura della regione della Laga (Abruzzi). DEMANGEOT J., *127*.
— Qualche considerazione sulla tettonica del Peloponneso (Grecia). DESIO A., *373*.
— Sulle interpretazioni geologiche delle anomalie negative della gravità regionale in Sicilia. FABIANI R., *365*.
— Analogie geologiche tra la Sardegna e l'Africa Minore. Nota I. VARDABASSO S., *8*.
— Analogie geologiche tra la Sardegna e e l'Africa Minore. Nota II. VARDABASSO S., *178*.

Geometria. — Complessi lineari di piani nello spazio a cinque dimensioni. BOMPIANI E., *719*.
— Calcolo della connessione affine integrale associata ad un punto di una varietà a connessione affine. CASTOLDI L., *760*.
— Alcune osservazioni sul confronto tra connessioni affini e metriche riemanniane. COSSU A., *29*.
— Sul numero dei complessi algebrici di rette, di ordine assegnato, che contengono una data rigata algebrica. GALLARATI D., *213*.
— Sulle varietà di S_r composte di ∞^1 S_k, i cui S_k appartengono al massimo numero di complessi lineari. GALLARATI D., *408*.
— Geometria pseudo-kähleriana. GUGGENHEIMER H., *220*.
— Esame di singolarità superficiali. – II. Massimo numero di punti $(n-2)$-pli inflessionali di una superficie algebrica di ordine n. VACCARO G., *203*.
— Sull'isometria di calotte appartenenti a due varietà. VACCARO G., *404*.
— Sulle molteplicità effettive delle curve polari. VESENTINI E., *209*.

M

Matematica. — Sul differenziale generalizzato delle forme differenziali esterne. Nota II. ARUFFO G., *13*.
— Sulle funzioni abeliane singolari. CONFORTO F., *754*.
— Sopra il numero degli ordinamenti di un corpo. KLINGENBERG W., *395*.
— Sull'esistenza in un dominio jordaniano di funzioni olomorfe all'interno e convergenti al contorno verso valori assegnati. ZIN G., *476*.

Meccanica. — Su certe proprietà generali dei raggi di girazione delle figure piane convesse. BORDONI P. G., *238*.
— Limitazioni per il raggio di girazione baricentrale delle figure piane a contorno convesso. BORDONI P. G., *413*.
— Nuovi complementi analitici e numerici allo studio delle aste vibranti. Nota I. CALIGO D., *36*.

— Nuovi complementi analitici e numerici allo studio delle aste vibranti. Nota II. CALIGO D., *223*.
— Di alcune proprietà cinematiche riguardanti il moto rigido di una sfera su se stessa. FORTE B., *765*.
— Contributo allo studio della lastra circolare su suolo elastico. MERLINO F. S., *231*.
— Sul modo di risolvere una indeterminazione nel problema di Clairaut generalizzato delle configurazioni degli astri fluidi rotanti in equilibrio relativo. MINEO C., *724*.
— Sul principio dell'azione potenziale stazionaria. STORCHI E., *771*.
— Sul potenziale elettromagnetico nella teoria unitaria di Einstein. TODESCHINI B., *495*.

Microbiologia. — Densità di popolazione batterica e sviluppo dell'« E. Coli ». BENIGNO P. e BERTI T., *687*.
— Il ciclo di sviluppo del fago nella cellula batterica. PENSO G., *679*.
— Attività catalasica delle pettenkoferie da uretano. PONTIERI G., *304*.
— Osservazioni sulla morfologia del « Penicillium chrysogenum » in cultura sommersa. – IV. Sviluppo di pallette scleroziali di « P. chrysogenum Thom » in cultura sommersa. THIRUMALACHAR M. J. e GOPALKRISHNAN K. S., *691*.
— Qualche ricerca sull'azione antibiotica dell'acido cogico. VERONA O. e AGELLI M., *671*.
— Intorno all'azione inibitrice dell'actidione sui lieviti della fermentazione vinaria. VERONA O. e PICCI G., *680*.

Microcoulombometria. — Coulombometria di sostanze gassose. Nota III. CORBELLINI A. e LANZA P., *294*.
— Sulla determinazione di *n* nell'elettrolisi polarografica accompagnata da processi secondari. Applicazione alla coulombometria del nitroprussiato. Nota II. LANZA P. e CORBELLINI A., *65*.

Mineralogia. — Cella elementare e gruppo spaziale della simonellite. Nota I. EMILIANI F. e PELLIZZER R., *652*.

O

Opere pervenute in dono all'Accademia, *168, 348, 459, 579, 717, 859*.

P

Paleontologia. — Primo rinvenimento di un Mammifero terrestre nel Miocene sardo. Nota preliminare. COMASCHI CARIA I., *650*.

Personale accademico, *164, 344, 449, 716*.

Petrografia. — Di un nuovo metodo di calcolo delle analisi delle rocce e di alcune notevoli conseguenze. BALCONI M., *130*.

Plichi suggellati, *164, 345, 450, 570, 716, 857*.

Premi in corso di assegnazione, *571*.

Presentazione di libri, *165, 345, 450, 568, 716, 857*.

Presentazione di Note e Memorie, *166, 347, 451, 570, 716, 858*.

R

Relazioni di Commissioni, *348, 570*.

S

Storia della Medicina. — Dieci ignorati volumi di manoscritti autografi morgagnani. PAZZINI A., *851*.

T

Teoria matematica dell'elasticità. — Sulla applicazione del metodo della trasformata parziale di Laplace ad intervallo di integrazione finito ad un problema di elasticità piana. CAPRIZ G., *401*.
— Condizioni perché sia compatibile il problema principale della statica elastica. FICHERA G., *397*.

Z

Zoologia. — « Uncinaria thapari », n. sp. parassita dell'« Ailurus fulgens ». BIOCCA E. e BRONZINI E., *824*.
— Osservazioni sul ciclo evolutivo di un nuovo Echinostomide. BIOCCA E. e LE ROUX P. L., *539*.
— Sulla forma adulta di un Echinostomide (Trematoda Digenea) ottenuta sperimentalmente nel ratto bianco di laboratorio. DOLTFUSS R. PH., *658*.
— Valutazione di alcune strutture ritenute nervose sensitive. PALUMBI G., *534*.
— Un particolare modo di accoppiamento negli Insetti Embiotteri. STEFANI R., *544*.

INDICI DEI FASCICOLI

FASCICOLO 1.

GENNAIO 1953.

NOTE DI SOCI

TRICOMI F.G., Determinazione del valore di un classico prodotto infinito . . . Pag. 3
VARDABASSO S., Analogie geologiche tra la Sardegna e l'Africa Minore. Nota I . . . 8

NOTE PRESENTATE DA SOCI

ARUFFO G., Sul differenziale generalizzato delle forme differenziali esterne. Nota II (pres. dal Corrisp. *B. Segre*) . . . . . Pag. 13
MERLI L., Il fenomeno di Gibbs nell'interpolazione delle funzioni discontinue. Nota I (pres. dal Corrisp. *G. Sansone*) 18
PINI B., Sulle singolarità delle soluzioni della equazione $\Delta u + cu = 0$ (pres. dal Socio *M. Picone*) 21
BERTOLINI F., Traiettorie luminose in uno spazio trasparente. – Esistenza di regioni non illuminate da una sorgente luminosa puntiforme (pres. dal Socio *M. Picone*) 26
COSSU A., Alcune osservazioni sul confronto tra connessioni affini e metriche riemanniane (pres. dal Socio *E. Bompiani*) 29
CALIGO D., Nuovi complementi analitici e numerici allo studio delle aste vibranti. Nota I (pres. dal Socio *G. Krall*) 36
MARCHETTI L., Determinazione del campo di velocità di una corrente subsonica piana (pres. dal Corrisp. *B. Finzi*) 42
BERNARD J. J., Sur une distribution composée des vitesses d'agitation moléculaire (pres. dal Socio straniero *J. Pérès*) 46
RICCI G., Nuovo metodo per le ricerche cronologiche dei calendari (pres. dal Socio *G. Abetti*) 50
BOSSOLASCO M., Caratteristiche e genesi del moto ondoso del mare nel Golfo di Genova (pres. dal Socio *C. Somigliana*) 57
LANZA P. e CORBELLINI A., Sulla determinazione di *n* nell'elettrolisi polarografica accompagnata da processi secondari. Applicazione alla coulombometria del nitroprussiato. Nota II (pres. dal Corrisp. *G. Semerano*) 65
FORNASARI E., SCARPA M. e LANZA P., Sul comportamento polarografico di alcuni derivati dello iodo positivo (pres. dal Corrisp. *G. Semerano*) 70
GAGLIARDO E. e KÖRNER M., Titolazione amperometrica del rame con etilxantato di potassio (pres. dal Corrisp. *G. Semerano*) 77
DANUSSO F. e FADIGATI E., Velocità ultrasonora e proprietà termodinamiche adiabatiche di composti organici liquidi (pres. dal Corrisp. *G. Natta*) 81
FERRO R., Sulle leghe dell'Uranio col Bismuto. Nota II (pres. dal Socio *L. Rolla*) 89

MUGNAINI E. e GRÜNANGER P., Sintesi eterocicliche con l'alcool propargilico e il butindiolo. Nota I (pres. dal Corrisp. *A. Quilico*) . . . . . Pag. 95
CHIERICI L. e PASSERINI R., Spettri u. v. di alcuni fenil-seleniuri e del difenil-selenio (pres. dal Socio *G. B. Bonino*) 99
CANONICA L., MARTINOLLI M. e ALNERI E., Sull'ossidazione dei composti etilenici con acqua ossigenata. Nota I (pres. dal Socio *L. Cambi*) 105
ROSSI S., Sulle triazine asimmetriche: derivati 3 N-piperazinici (pres. dal Socio *L. Cambi*) 113
SIMONETTA M. e FAVINI G., Sulla cinetica della reazione tra 1-cloro-2 nitroetano ed acqua. Nota I (pres. dal Socio *L. Cambi*) 119
DEMANGEOT J., Sulla struttura della regione della Laga (Abruzzi) (pres. dal Socio *R. Fabiani*) 127
BALCONI M., Di un nuovo metodo di calcolo delle analisi delle rocce e di alcune notevoli conseguenze (pres. dal Socio *U. Panichi*) 130
BAFFONI G. M., Azione dell'ormone tiroideo sul neurone di Mauthner. Esperienze su Anfibi urodeli. Nota II (pres. dal Socio *G. Cotronei*) 138
URBANI E. e DE CESARIS-COROMALDI L., Osservazioni sulla vita latente. – II. Studio delle proteinasi di «Artemia salina» L. (pres. dal Socio *G. Cotronei*) 144
GHIRARDELLI E., Sul determinante germinale in «Spadella cephaloptera» Busch (pres. dal Socio *G. Cotronei*) 150
SABBADIN A. e MENGARDA G., Azione femminizzante di estratti vegetali nel differenziamento sessuale di «Rana esculenta» (pres. dal Corrisp. *U. D'Ancona*) . . . 153

COMMEMORAZIONI

CARNERA L., Commemorazione del Corrispondente Luigi Volta . . . . . Pag. 156

Comunicazioni varie 162
Personale accademico 164
Plichi suggellati 164
Presentazione di libri 165
Presentazione di Note e Memorie 166
Opere pervenute in dono all'Accademia presentate nella seduta del 10 gennaio 1953 . . 168

FASCICOLO 2.

FEBBRAIO 1953.

NOTE DI SOCI

NOBILE V., Sulla opportunità di direttive generali nella ricerca di leggi di coordinamento fra i moti stellari. Nota III . . . . . Pag. 169
BOAGA G., Profilo gravimetrico fra il Tirreno e lo Jonio lungo il parallelo 40° 175
VARDABASSO S., Analogie geologiche tra la Sardegna e l'Africa Minore. Nota II . . 178
MONTALENTI G., SILVESTRONI E. e BIANCO I., Nuove indagini sul problema della microcitemia (pres. dal Corrisp. *G. Montalenti*) 183
MARGARIA R., La funzione essenziale del liquido cerebro-spinale 188

NOTE PRESENTATE DA SOCI

MERLI L., Il fenomeno di Gibbs nell'interpolazione delle funzioni discontinue. Nota II (pres. dal Corrisp. *G. Sansone*) . . . . . Pag. 194
PUCCI C., Sul problema di Cauchy per le equazioni lineari a derivate parziali (pres. dal Socio *M. Picone*) 198
VACCARO G., Esame di singolarità superficiali. – II. Massimo numero di punti $(n-2)$-pli inflessionali di una superficie algebrica d'ordine n (pres. dal Socio *E. Bompiani*) 203
VESENTINI E., Sulle molteplicità effettive delle curve polari (pres. dal Corrisp. *B. Segre*) 209
GALLARATI D., Sul numero dei complessi algebrici di rette, di ordine assegnato, che contengono una data rigata algebrica (pres. dal Corrisp. *B. Segre*) 213
GUGGENHEIMER H., Geometria pseudo-kähleriana (pres. dal Socio *E. Bompiani*) . . . 220
CALIGO D., Nuovi complementi analitici e numerici allo studio delle aste vibranti. Nota II (pres. dal Socio *G. Krall*) 223
MERLINO F. S., Contributo allo studio della lastra circolare su suolo elastico (pres. dal Socio *G. Colonnetti*) 231
BORDONI P. G., Su certe proprietà generali dei raggi di girazione delle figure piane convesse (pres. dal Socio *A. Signorini*) 238
CIMINO M., Sulla variazione del profilo di alcune righe spettrali dal centro al lembo del Sole. Nota III (pres. dal Socio *G. Armellini*) 243
BALLARIO M. C., Caratteristiche fisiche e spaziali di stelle con V > 40 km/sec. Effetto di longitudine per un gruppo di stelle veloci (pres. dal Socio *G. Abetti*) 251
MINEO M., Sopra un calcolo più approssimato della deviazione della geodetica da una sezione normale su una superficie qualunque (pres. dal Socio *G. Armellini*) . . . 255
DEMICHELIS F. e MALVANO R., Coincidenze γ nel $^{214}_{84}$Po (pres. dal Socio *E. Perucca*) 259
STORCHI E., Determinazione dei potenziali nei campi elettromagnetici generalizzati (pres. dal Corrisp. *B. Finzi*) 261
SIMONETTA M. e FAVINI G., Sulla cinetica della reazione tra 1-cloro-2-nitroetano ed acqua. Nota II (pres. dal Socio *L. Cambi*) 268
FORNASARI E., SCARPA M. e LANZA P., Sul comportamento polarografico di alcuni derivati dello iodo positivo. Nota II (pres. dal Corrisp. *G. Semerano*) 272
MUGNAINI E. e GRÜNANGER P., Sintesi eterocicliche con l'alcool propargilico e il butindiolo. Nota II (pres. dal Corrisp. *A. Quilico*) 275
FOFFANI A., Cella polarografica a volume variabile di soluzione, adatta per misure cinetiche a controllo continuo del pH (pres. dal Corrisp. *G. Semerano*) 281
MARIANI A. e TOSCHI G., Elettroforesi su carta di proteine muscolari (pres. dal Socio *D. Marotta*) 285
VECCHI E., Ricerche polarografiche su soluzioni in ammoniaca anidra a temperatura ambiente e pressione normale (soluzioni di Divers) (pres. dal Corrisp. *G. Semerano*) 290
CORBELLINI A. e LANZA P., Coulombometria di sostanze gassose. Nota III (pres. dal Corrisp. *G. Semerano*) 294
TONANI F., La ripartizione degli elementi fra fase silicata e metallica nelle meteoriti ed il calore di formazione degli ossidi. – II. Forma della relazione fra log K e ΔI_o (pres. dal Socio *G. Carobbi*) 298
PONTIERI G., Attività catalasica delle pettenkoferie da uretano (pres. dal Corrisp. *L. Califano*) 304
CORTI R., Su « Hypericum elodes Huds. », relitto eu-atlantico della selva di San Rossore (Pisa) (pres. dai Soci *A. Chiarugi* e *G. Negri*) 308
MESSERI A., Alcuni dati sulla struttura submicroscopica delle fibre di tensione di un campione di legno di pioppo (pres. dal Socio *A. Chiarugi*) 315
URBANI MISTRUZZI L. e GALASSO R., Osservazioni citologiche sulla ghiandola dell'albume di « Eobania vermiculata » (Mueller) (pres. dal Socio *C. Cotronei*) 323
BOLOGNARI A., La localizzazione delle sostanze sulfidriliche nel corpo bianco dei Molluschi Cefalopodi (pres. dal Socio *A. Russo*) 329
CREPAX P., Sulla formazione di actomiosina (pres. dal Socio *G. C. Pupilli*) 332

COMMEMORAZIONI

GORTANI M., Commemorazione del Socio Gaetano Rovereto . . . . . Pag. 336

Personale accademico 344
Comunicazioni varie 345
Plichi suggellati 345
Presentazione di libri 345
Presentazione di Note e Memorie 347
Relazioni di Commissioni 348
Opere pervenute in dono all'Accademia presentate nella seduta del 14 febbraio 1953 . 348

FASCICOLO 3.

MARZO 1953.

NOTE DI SOCI

BOAGA G., Risoluzione del triangolo geodetico ellissoidico per mezzo degli elementi della sua rappresentazione conforme sul piano . . . . . Pag. 349
CALOI P. e SPADEA M. C., Su una questione di idrodinamica concernente il lago di Garda (pres. dal Corrisp. *P. Caloi*) 353
QUILICO A., CARDANI C. e PANIZZI L., Sulla struttura della flavoglaucina (pres. dal Corrisp. *A. Quilico*) 358
FABIANI R., Sulle interpretazioni geologiche delle anomalie negative della gravità regionale in Sicilia 365
DESIO A., Qualche considerazione sulla tettonica del Peloponneso (Grecia) 373

NOTE PRESENTATE DA SOCI

ARUFFO G., Forme differenziali esterne di classe 0 e funzioni di più variabili complesse (pres. dal Corrisp. *B. Segre*) . . . . . Pag. 381
BIRINDELLI C., Integrazione dei sistemi lineari ai differenziali totali illimitatamente integrabili in due variabili indipendenti in un prescritto campo più volte connesso (pres. dal Socio *M. Picone*) 386
DE GIORGI E., Definizione ed espressione analitica del perimetro di un insieme (pres. dal Corrisp. *R. Caccioppoli*) 390
ERDÉLYI A., Funzioni epicicloidali (pres. dal Corrisp. *G. Tricomi*) 393
KLINGENBERG W., Sopra il numero degli ordinamenti di un corpo (pres. dal Corrisp. *B. Segre*) 395
FICHERA G., Condizioni perché sia compatibile il problema principale della statica elastica (pres. dal Socio *M. Picone*) 397
CAPRIZ G., Sulla applicazione del metodo della trasformata parziale di Laplace ad intervallo di integrazione finito ad un problema di elasticità piana (pres. dal Socio *M. Picone*) 401
VACCARO G., Sull'isometria di calotte appartenenti a due varietà (pres. dal Socio *E. Bompiani*) 404
GALLARATI D., Sulle varietà di S_r composte di $\infty^1 S_k$, i cui S_k appartengono al massimo numero di complessi lineari (pres. dal Corrisp. *B. Segre*) 408

BORDONI P. G., Limitazioni per il raggio di girazione baricentrale delle figure piane a contorno convesso (pres. dal Socio *A. Signorini*) . . . . . Pag. 413
FOFFANI A., Ricerche cinetiche per via polarometrica nel gruppo delle cumarine (pres. dal Corrisp. *G. Semerano*) 418
ROMEO A. e MAGNI L., Sintesi di alcuni β-amminoacidi bibasici (pres. dal Socio *G. Bargellini*) 423
SCARANO E., Comportamento polarografico di alcuni metalli nobili in soluzioni debolmente complessanti (pres. dal Corrisp. *G. Semerano*) 428
FAVERO P., Studi di polarografia oscillografica. – I. Sulla cinetica della reazione tra l'acido piruvico e l'ammoniaca. Comportamento oscillografico dell'acido piruvico (pres. dal Corrisp. *G. Semerano*) 433
BAFFONI G. M., Modificazioni metaboliche dell'epatopancreas di «Callianassa laticauda» nella castrazione parassitaria (pres. dal Socio *G. Cotronei*) 436

COMMEMORAZIONI

RONCATO A., Commemorazione del Socio Virgilio Ducceschi . . . . . Pag. 443

Comunicazioni varie 449
Personale accademico 449
Plichi suggellati 450
Presentazione di libri 450
Presentazione di Note e Memorie 451
Concorsi a borse di studio presso Istituti o Laboratori Nazionali e Esteri banditi dal Consiglio Nazionale delle Ricerche 452
Opere pervenute in dono all'Accademia presentate nella seduta del 14 marzo 1953 . 459

FASCICOLO 4.

APRILE 1953.

NOTE PRESENTATE DA SOCI

DABONI L., Applicazione al caso del cubo di un metodo per il calcolo per eccesso e per difetto della capacità elettrostatica di un conduttore (pres. dal Socio *M. Picone*) . . . . . Pag. 461
FAEDO S., Sulla maggiorazione dell'errore nei metodi di Ritz e dei minimi quadrati (pres. dal Socio *M. Picone*) 466
PUCCI C., Sulla compattezza di successioni di funzioni reali (pres. dal Socio *M. Picone*) 471
ZIN G., Sull'esistenza in un dominio jordaniano di funzioni olomorfe all'interno e convergenti al contorno verso valori assegnati (pres. dal Corrisp. *G. Ascoli*) 476
BERTOLINI F., Una generalizzazione del teorema di Abel sulle serie di potenze (pres. dal Socio *M. Picone*) 483
CAFIERO F., Sul passaggio al limite sotto il segno d'integrale di Stieltjes Lebesgue negli spazi astratti, con masse variabili con gli integrandi (pres. dal Corrisp. *R. Caccioppoli*) 488
TODESCHINI B., Sul potenziale elettromagnetico nella teoria unitaria di Einstein (pres. dal Corrisp. *B. Finzi*) 495
CIMINO M., Sulla variazione del profilo di alcune righe spettrali dal centro al lembo del Sole. Nota IV (pres. dal Socio *G. Armellini*) 500

SIMONETTA M. e FAVINI G., Sulla cinetica della reazione tra nitrocloroderivati aromatici e idrato potassico in soluzione in miscele acqua–diossano (pres. dal Socio *L. Cambi*) . . . . . Pag. 505
GIACOMETTI G. e DEL MARCO A., Comportamento polarografico del p–NO_2–acetofenone e di alcuni suoi prodotti di riduzione (pres. dal Corrisp. *G. Semerano*) 511
FAVERO P., Studi di polarografia oscillografica. Sulla cinetica della reazione tra l'acido piruvico e l'ammoniaca. – II. Dispositivo sperimentale e risultati delle misure effettuate sul primo picco di corrente (pres. dal Corrisp. *G. Semerano*) 520
ROLLIER M. A. e RASMUSSEN J. O. Jr., Studi sui nuclidi del terbio in difetto di neutroni (pres. dal Corrisp. *A. Quilico*) 526
CORTI R., Il significato del tessuto nucellare e la sua funzione organizzatrice durante lo sviluppo del seme delle Querci (pres. dal Socio *A. Chiarugi*) 530
PALUMBI G., Valutazione di alcune strutture ritenute nervose sensitive (pres. dal Socio *A. Pensa*) 534
BIOCCA E. e LE ROUX P. L., Osservazioni sul ciclo evolutivo di un nuovo Echinostomide (pres. dal Corrisp. *V. Puntoni*) 539
STEFANI R., Un particolare modo di accoppiamento negli Insetti Embiotteri (pres. dal Socio G. COTRONEI) 544
STEFANELLI A., I neuroni di Mauthner sono neuroni « larvali » anche nei Teleostei (pres. dal Socio *G. Cotronei*) 550
URBANI E., Osservazioni fotometriche sull'oocite in crescita di « Antedon rosacea » Lamarck (pres. dal Socio *G. Cotronei*) 558
PERRI T., La simmetria speculare in biologia con particolare riguardo agli arti soprannumerari indotti (pres. dal Socio *G. Cotronei*) 563

Comunicazioni varie 567
Presentazione di libri 568
Presentazione di Note e Memorie 570
Relazioni di Commissioni 570
Plichi suggellati 570
Premi in corso di assegnazione presso l'Accademia Nazionale dei Lincei 571
Opere pervenute in dono all'Accademia presentate nella seduta dell'11 aprile 1953 . . 579

FASCICOLO 5.

MAGGIO 1953.

NOTE DI SOCI

FINZI B., Su le equazioni di campo della teoria relativistica unitaria di Einstein Pag. 581
BELOFF-CHAIN A., CATANZARO R., CHAIN E. B., D'AGOSTINO O., MASI I., POCCHIARI F., ROSSI C., Destino del glucosio uniformemente marcato nel diaframma di ratti normali e diabetici da allossana in presenza ed in assenza di insulina (pres. dal Socio *E. B. Chain*) 589
SPADOLINI I. e GIACHETTI A., Sulla formazione endogena di acetilcolina nel metabolismo della fibra miocardica e sulla sua importanza per l'automatismo del cuore (pres. dal Corrisp. *I. Spadolini*) 596
SERGI S., I profanerantropi di Swanscombe e di Fontéchevade 601

NOTE PRESENTATE DA SOCI

PINI B., Un problema di valori al contorno per l'equazione $\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$. Nota I (pres. dal Socio *M. Picone*) . . . . . Pag. 609
FRESA A., Osservazioni di variabili ad eclisse (pres. dal Socio *G. Abetti*) 616
CIMINO M. e FORTINI T., Fotometria fotografica dell'eclisse totale di luna del 29 gennaio 1953 e la luminescenza del suolo lunare per la radiazione ultravioletta solare (pres. dal Socio *G. Armellini*) 619
COLOMBO G., Sopra una questione di ottica geometrica (pres. dal Corrisp. *A. Tonolo*) 627
GAMBA A. e RADICATI L. A., Sopra un teorema per la riduzione di talune rappresentazioni del gruppo simmetrico (pres. dal Corrisp. *G. Wataghin*) 632
GALLI M., Sopra una variante cinematica dell'esperimento di Sagnac. Nota I (pres. dal Socio *G. Abetti*) 635
DOLCETTA M. e LANZA P., Polarografia anodica con microelettrodi di platino rotanti. Nota I (pres. dal Corrisp. *G. Semerano*) 642
GATTI G. L. e BOVET D., Proprietà simpatolitiche ed effetti centrali nei glicinammidi e alaninammidi della serie del 2-metil-1,4-benzodiossano (pres. dal Socio *D. Marotta*) 645
COMASCHI CARIA I., Primo rinvenimento di un Mammifero terrestre nel Miocene sardo. Nota preliminare (pres. dal Corrisp. *S. Vardabasso*) 650
EMILIANI F. e PELLIZZER R., Cella elementare e gruppo spaziale della simonellite. Nota I (pres. dal Corrisp. *C. Andreatta*) 652
DOLLFUS R. PH., Sulla forma adulta di un Echinostomide (Trematoda Digenea) ottenuta sperimentalmente nel ratto bianco di laboratorio (pres. dal Corrisp. *V. Puntoni*) 658
CASARINI A. e ROSSI N., Cellule cianofile e cellule mucoidi dell'adenoipofisi nelle disendocrinie umane e sperimentali (pres. dal Socio *A. Pensa*) 666
PERUZZI P. e ZANGHI M., Osservazioni sui riflessi miotatici nell'uomo (pres. dal Corrisp. *I. Spadolini*) 668
VERONA O. e AGELLI M., Qualche ricerca sull'azione antibiotica dell'acido cogico (pres. dal Socio *A. Chiarugi*) 671
PENSO G., Il ciclo di sviluppo del fago nella cellula batterica (pres. dal Corrisp. *D. Marotta*) 679
VERONA O. e PICCI G., Intorno all'azione inibitrice dell'actidione sui lieviti della fermentazione vinaria (pres. dal Socio *A. Chiarugi*) 680
BENIGNO P. e BERTI T., Densità di popolazione batterica e sviluppo dell'« E. Coli » (pres. dal Socio *E. Meneghetti*) 687
THIRUMALACHAR M. J. e GOPALKRISHNAN K. S., Osservazioni sulla morfologia del « Penicillium chrysogenum » in cultura sommersa. – IV. Sviluppo di pallette sclerozíali di « P. chrysogenum Thom » in cultura sommersa (pres. dal Socio *E. B. Chain*) 691
URBANI E., RUSSO S. e ROGNONE L., Osservazioni sulla vita latente. – III. Studio delle amilasi di « Artemia salina » L. (pres. dal Socio *G. Cotronei*) 697

COMMEMORAZIONI

TERRACINI A., Commemorazione del Socio Gino Fano . . . . . Pag. 702
Personale accademico 716
Plichi suggellati 716
Presentazione di libri 716
Presentazione di Note e Memorie 716
Opere pervenute in dono all'Accademia presentate nella seduta del 9 maggio 1953 . . . 717

FASCICOLO 6.

GIUGNO 1953.

NOTE DEI SOCI

BOMPIANI E., Complessi lineari di piani nello spazio a cinque dimensioni . . . . Pag. 719
MINEO C., Sul modo di risolvere una indeterminazione nel problema di Clairaut generalizzato delle configurazioni degli astri fluidi rotanti in equilibrio relativo . 724
ARMELLINI G., Osservazioni sul problema dei due corpi di masse variabili e sopra alcune sue applicazioni alla cosmogonia 727
MAJORANA Q., Gravità, inerzia e relatività 733
BELOFF-CHAIN A., CATANZARO R., CHAIN E. B., LONGINOTTI L., MASI I., POCCHIARI F. e ROSSI C., Influenza del 2-4-dinitro-fenolo sul metabolismo del glucosio e del fosfato in diaframma di ratto (pres. dal Socio *E. B. Chain*) 740

NOTE PRESENTATE DA SOCI

PINI B., Un problema di valori al contorno per l'equazione $\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$. Nota II (pres. dal Socio *M. Picone*) . . . . . Pag. 746
ZIN G., Contributo alla risoluzione del problema piano di Dirichlet (pres. dal Corrisp. *G. Ascoli*) 750
CONFORTO F., Sulle funzioni abeliane singolari (pres. dal Socio *F. Severi*) 754
CASTOLDI L., Calcolo della connessione affine integrale associata ad un punto di una varietà a connessione affine (pres. dal Socio *E. Bompiani*) 760
FORTE B., Di alcune proprietà cinematiche riguardanti il moto rigido di una sfera su se stessa (pres. dal Socio *A. Signorini*) 765
STORCHI E., Sul principio dell'azione potenziale stazionaria (pres. dal Corrisp. *B. Finzi*) 771
CIMINO M., Sull'equilibrio stellare convettivo in condizioni politropiche generalizzate (pres. dal Socio *G. Armellini*) 779
BORDONI P. G., Deduzione di un'equazione di stato dei solidi dalla teoria delle trasformazioni termoelastiche finite (pres. dal Socio *A. Signorini*) 784
ZANOBETTI D., Sul periodo transiente dello « skin effect » (pres. dal Socio *Q. Majorana*) 791
CURTI R. e LOCCHI S., Studio polarografico di alcuni N-ossidi (pres. dal Corrisp. *G. Semerano*) 796
SIMONETTA M. e FAVINI G., Sulla cinetica della reazione tra nitrocloro-derivati aromatici e idrato potassico in soluzione idroalcolica (pres. dal Socio *L. Cambi*) . . . 804
COLONNA M. e RISALITI A., Ricerche sugli N-ossidi aromatici. - Spettro di assorbimento U. V. dell'N-ossido della 2-fenilchinolina e comportamento chimico (pres. dal Socio *G. B. Bonino*) 809
CANONICA L., CARDANI C. e TRAVE R., Sulla condensazione di Knovenagel: azione disidratante dei sali di alcune basi organiche (pres. dal Socio *L. Cambi*) 814
CATTANEO L., Contributo alla conoscenza della commessura bianca anteriore dell'encefalo (pres. dal Socio *A. Pensa*) 819
BIOCCA E. e BRONZINI E., « Uncinaria thapari » n. sp. parassita dell'« Airulus fulgens » (pres. dal Corrisp. *V. Puntoni*) 824

RIGGIO BEVILACQUA L., Piridinnucleotidi in germogli eziolati di Avena (pres. dal Corrisp. *E. Remotti*) . . . . . Pag. 827
BIANCHERI E., Ulteriori ricerche sul rapporto tra potenziale metabolico e potere inibente dei tessuti. Variazione dell'effetto inibente in seguito a disturbi correlativi (pres. dal Corrisp. *E. Remotti*) 833
INFANTELLINA F., Le variazioni di tensione delle contrazioni muscolari dopo stimolazione tetanizzante (pres. dal Socio *G. C. Pupilli*) 839
CREPAX P., Risposta muscolare al potassio e analisi dei fattori che la compongono (pres. dal Socio *G. C. Pupilli*) 842
PERRI T., Sulle variazioni della competenza arto-formativa negli Anfibi Anuri a seconda dello stadio (pres. dal Socio *G. Cotronei*) 845
PAZZINI A., Dieci ignorati volumi di manoscritti autografi morgagnani (pres. dal Corrisp. *V. Puntoni*) 851

Comunicazioni varie 857
Plichi suggellati 857
Presentazione di librl 857
Presentazione di Note e Memorie 858
Opere pervenute in dono all'Accademia presentate nella seduta del 13 giugno 1953 . 859
Indice per Autori 863
Indice per materie 869
Indici dei fascicoli 875